

M.C. ESCHER KALEIDOZYKLEN

von Doris Schattschneider und Wallace Walker



© 1977 Doris Schattschneider und Wallace Walker
© 1987 TACO Verlagsgesellschaft und Agentur mbH,
TACO, Hauptstr. 9, D-1000 Berlin 62
© Für die Illustrationen von M. C. Escher:
Cordon Art B. U., W. F. Veldhuysen,
NL 3743 De Baarn

Übersetzung aus dem Amerikanischen: Nikolaus Hoffmann

Alle Rechte vorbehalten. Kein Teil des Buches darf nachgedruckt, photokopiert oder in irgendeiner anderen Weise übertragen werden ohne die Genehmigung des Copyright-Inhabers.

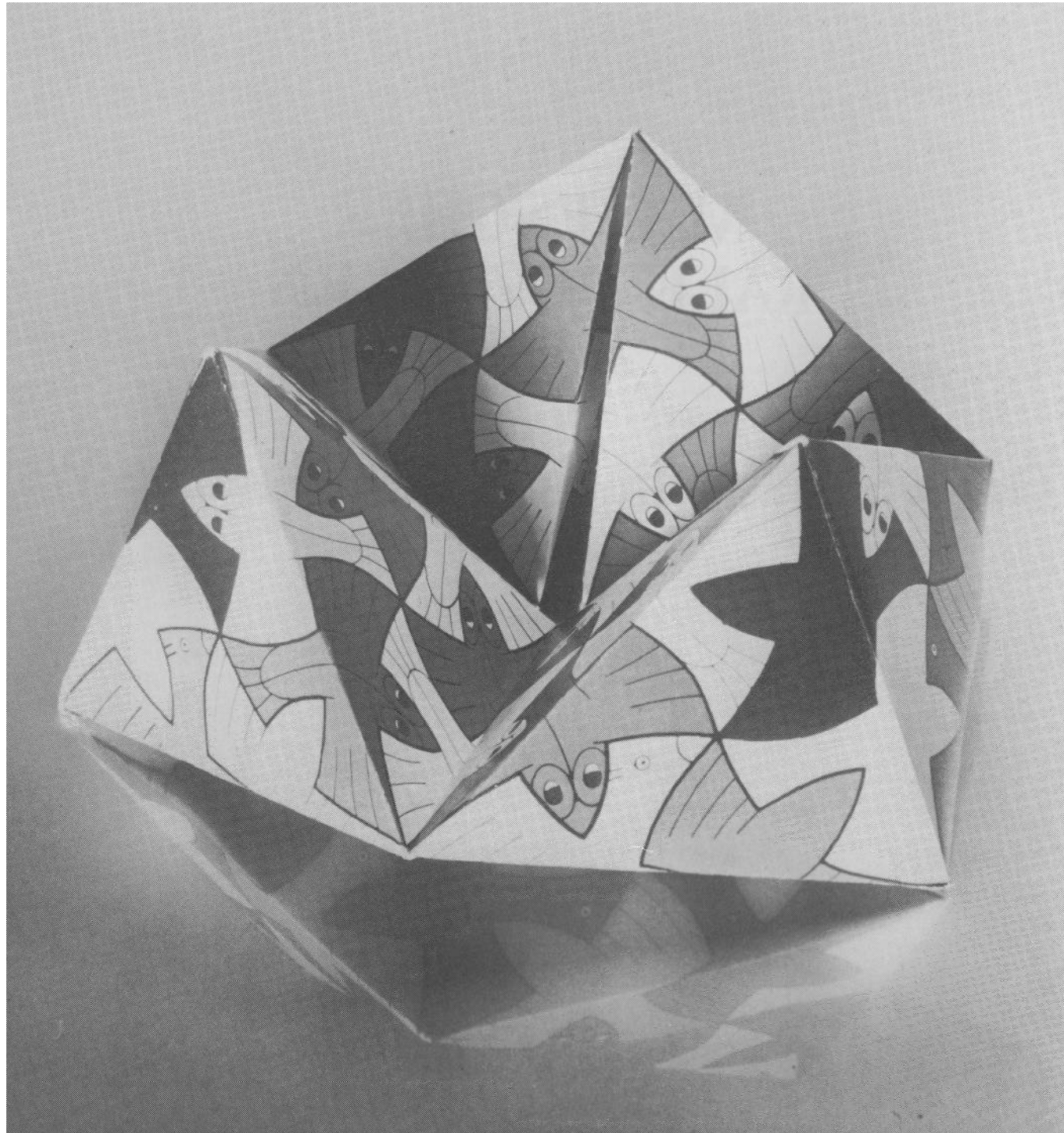
ISBN 3-89268-013-2

M.C. ESCHER
KALEIDOZYKLEN

**M.C. ESCHER
KALEIDOZYKLEN**

von Doris Schattschneider und Wallace Walker

TACO



INHALT

In drei Dimensionen	8
Die geometrischen Körper	10
Die Kaleidozyklen	11
Zyklische Flächenaufteilungen	14
Oberflächengestaltung bei den geometrischen Körpern	16
Oberflächengestaltung bei den Kaleidozyklen	18
Die farbliche Gestaltung der Entwürfe	20
Einzelheiten zu den Modellen	21
Geometrische Körper	21
Sechseckige Kaleidozyklen	25
Quadratische Kaleidozyklen	30
Verdrillte Kaleidozyklen	34
Weiterführende Literatur	35
Bauanleitungen für die Modelle	35

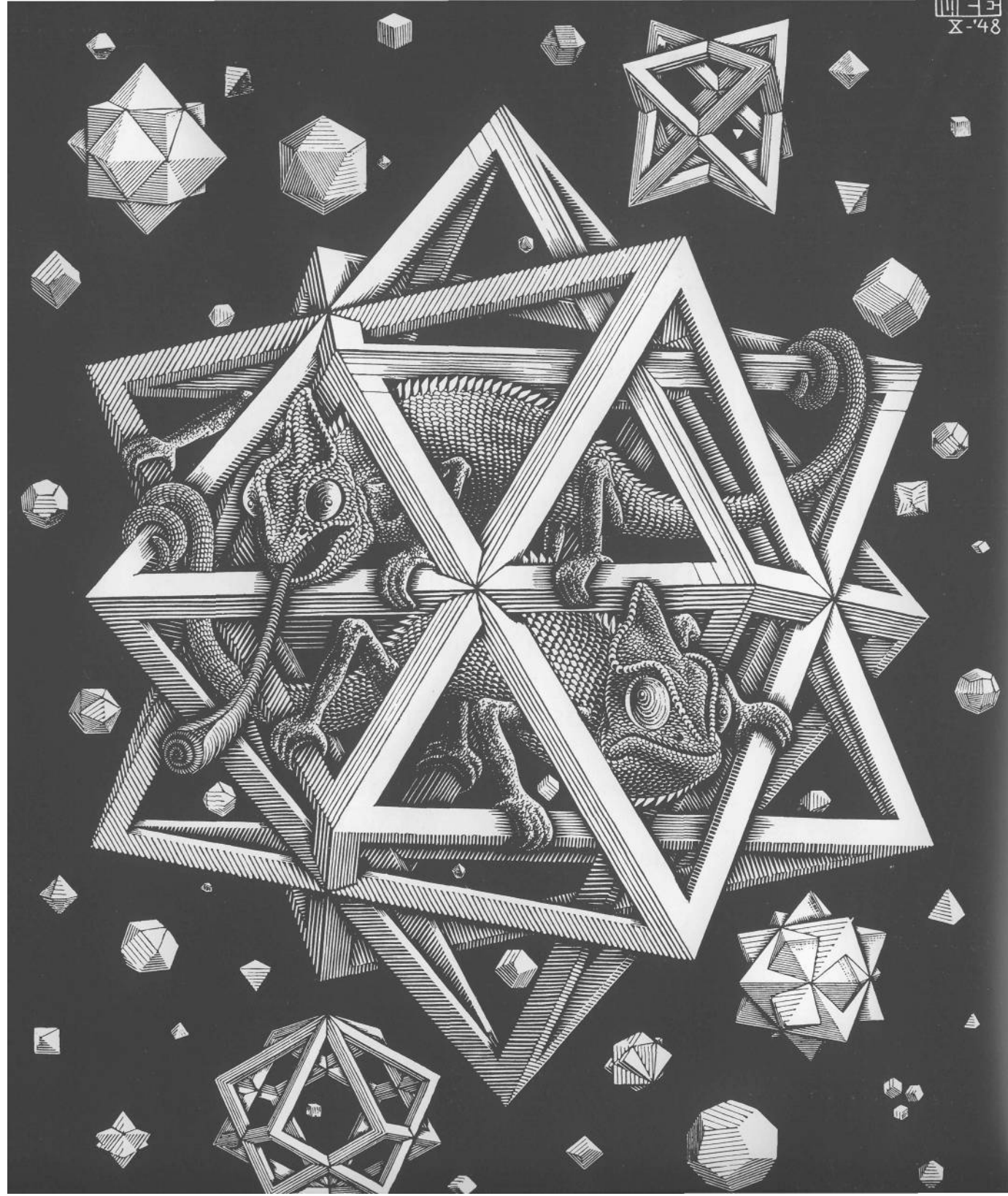
IN DREI DIMENSIONEN:

Erweiterung der Kunst M. C. Eschers

Jeder mag Überraschungen, und es gibt zwei Arten von ihnen. Die eine ist ein freudiger Zufall, die andere minutiös geplant, vielleicht sogar geschickt getarnt, um natürlich zu erscheinen. Häufig ist es schwer zu entscheiden, wer dabei das größere Vergnügen hat - die Person, die überrascht wird, oder die, die sich den Zauber ausgedacht hat. Der holländische Künstler M. C. Escher (1898-1972) war ein genialer Schöpfer vieler Überraschungen der zweiten Art. Seine Grafiken sind voll von intelligent entworfenen optischen Überraschungen. Auf den ersten Blick sehen viele seiner Werke naturalistisch aus, doch beim zweiten Hinsehen stellt sich das scheinbar Einleuchtende als unmöglich heraus, und der Betrachter muß immer wieder und wieder hinsehen. Nur so entdeckt er die versteckten Überraschungen, die das Werk bietet. Wie hat Escher das gemacht? Er besaß eine geniale Phantasie und war ein handwerklich hervorragender Grafiker, doch der Schlüssel zu den erstaunlichen Effekten in seinen Bildern ist die Mathematik. Nicht die Mathematik der Zahlen und Gleichungen, die den meisten von uns sofort einfällt, sondern die Geometrie, und zwar die klassische wie die moderne Geometrie. Escher konnte sich die phantastischen Effekte, die er grafisch hervorrufen wollte, in der Phantasie ausmalen, doch notwendiges Mittel, um diese Effekte praktisch zu bewältigen, war die Mathematik. Aus diesem Grund las er technische Abhandlungen und korrespondierte mit Mathematikern und Kristallographen. In diesen Briefen kommt zum Ausdruck, daß er sein mathematisches Verständnis nicht hoch einschätzte, und dennoch veranschaulicht er in seinen Bildern, daß er die grundlegenden mathematischen Prinzipien beherrschte.

Die kaleidoskopartig ausgestalteten geometrischen Formen in diesem Buch sind eine Fortführung und Erweiterung von Eschers Werk. Sie wurden mit Reproduktionen von Eschers Zeichnungen versehen und repräsentieren viele Themen seiner Drucke, die sich auf seine Erforschung einer dreidimensionalen Ausdrucksmöglichkeit beziehen. Wer Eschers Werk kennt, den kann es nicht überraschen, daß diese Entwürfe nur mit Hilfe eines Mathematikers und eines Grafikers möglich waren. Auch IHRE aktive Beteiligung ist erforderlich. Bei einer oberflächlichen Betrachtung kann man die subtilen Überraschungen in Eschers Drucken nicht entdecken. Sie er-

Abb. 1 Sterne, Holzstich 1948, National Gallery of Art, Washington, D. C., Schenkung von Mr. C. V. S. Roosevelt.



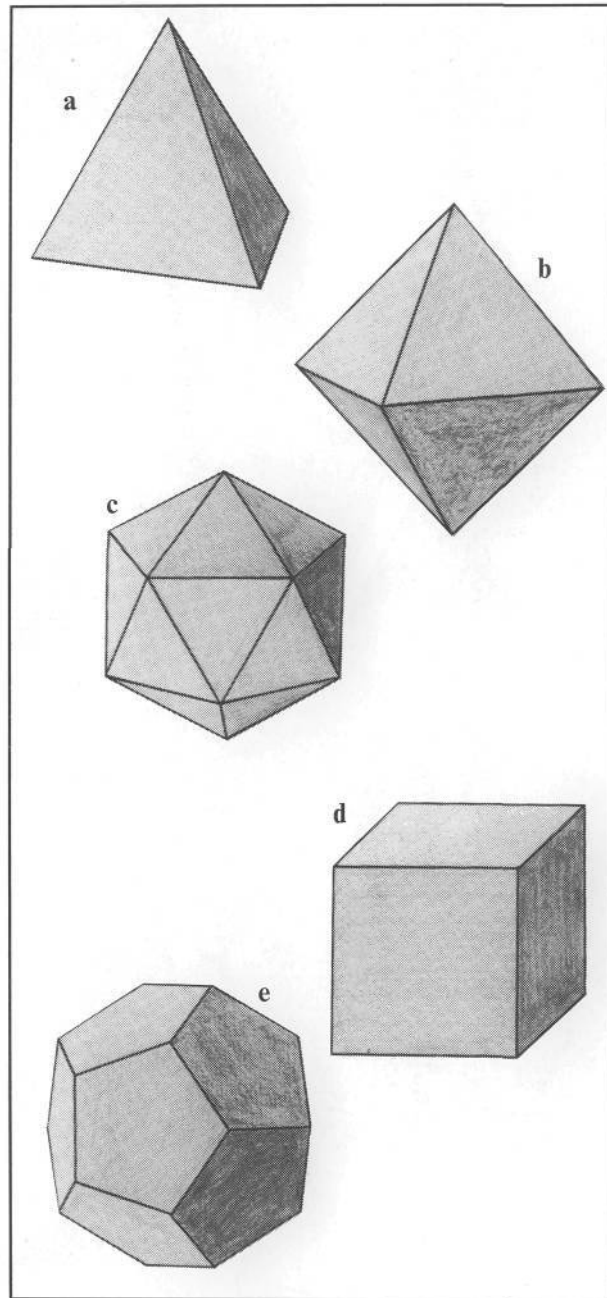


Abb. 2 Die fünf Platonischen Körper: (a) Tetraeder mit vier Flächen; (b) Oktaeder mit acht Flächen; (c) Ikosaeder mit zwanzig Flächen; (d) Würfel mit sechs Flächen; (e) Dodekaeder mit zwölf Flächen.



Abb. 3 Reptilien, Lithographie, 1943, National Gallery of Art, Washington, D. C., Schenkung von Mr. C. V. S. Roosevelt.

fahren die wahren Geheimnisse unserer Modelle nur, wenn Sie die Objekte bauen, genau untersuchen und natürlich auch mit ihnen spielen. Jedes der geometrischen Objekte liegt zunächst als flache Zeichnung vor, SIE erwecken das Objekt zum Leben, indem Sie es von einem zweidimensionalen in ein dreidimensionales Ding ver-

wandeln. Wenn die Modelle erst einmal zum „Leben“ erwacht sind, bieten sie viele Überraschungen für Hand und Auge. Das zweidimensionale Muster gibt wenig Aufschluß darüber, was Sie an dem fertigen dreidimensionalen Objekt sehen und wie Sie es empfinden werden.

DIE GEOMETRISCHEN KÖRPER

Die *Sterne*, die in Eschers schwarzem Universum (Abb. 1) schweben, sind geometrische Figuren mit der Symmetrie geschliffener Juwelen. Eschers Atelier war voll von solchen geometrischen Formen, und er gestand bereitwillig seine Ehrfurcht vor diesen Figuren, die in vielen seiner Grafiken vorkommen.

Die Platonischen Körper (Abb. 2) werden seit frühester Zeit von den Menschen bewundert und geachtet, denn sie sind konvexe Polyeder mit der perfektesten Symmetrie: Jeder Platonische Körper hat als Außenflächen identische Kopien eines regelmäßigen Vielecks - alle Kanten und Winkel jeder Fläche sind gleich. Außerdem sind alle Eckpunkte des Körpers identisch, das heißt in jeder Ecke stoßen gleichviele Flächen zusammen, und diese sind zueinander jeweils im gleichen Winkel geneigt. Mathematiker nennen sie regelmäßige Polyeder (oder regelmäßige Vielfache). Bei jedem werden alle nur denkbaren Forderungen nach Deckungsgleichheit erfüllt. Diese Forderungen sind so streng, daß es nur fünf regelmäßige Körper gibt.

Die Namen stammen aus dem Griechischen und geben an, wieviele Außenflächen ein Körper besitzt. Drei von ihnen sind mit gleichseitigen Dreiecken bedeckt: Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder. Der bekannteste ist der Würfel (Kubus), der von sechs Quadraten begrenzt wird, die rechtwinklig aufeinanderstehen. Sein Name kommt vom griechischen Wort für Spielwürfel - cubos. Das Dodekaeder hat als Flächen zwölf regelmäßige Fünfecke; es ist wahrscheinlich der bewundernswerteste Körper, da das Dodekaeder kaum vorstellbar scheint. In dem Druck *Reptilien* (Abb. 3) schnaubt der kleine Drache auf einem Dodekaeder, das den Gipfel seiner phantastischen Reise bildet.

Wenn man nur eine Forderung nach Regelmäßigkeit für den Körper fallen läßt, stößt man auf eine große Gruppe anderer hochsymmetrischer Formen. Die Archimedischen (oder auch halbregehmäßigen) Körper lassen zwei oder mehr verschiedene Arten regelmäßiger Vielecke als Außenfläche zu. Sie erfüllen ansonsten alle anderen Bedingungen eines regelmäßigen Polyeders: Die Kanten aller Außenflächen sind gleichlang, die Ecken des Körpers sind alle gleich (in jeder Ecke stoßen die Flächen in der gleichen Weise aufeinander). Von diesen halbregehmäßigen Körpern gibt es dreizehn verschiedene. Wir stellen hier einen vor.

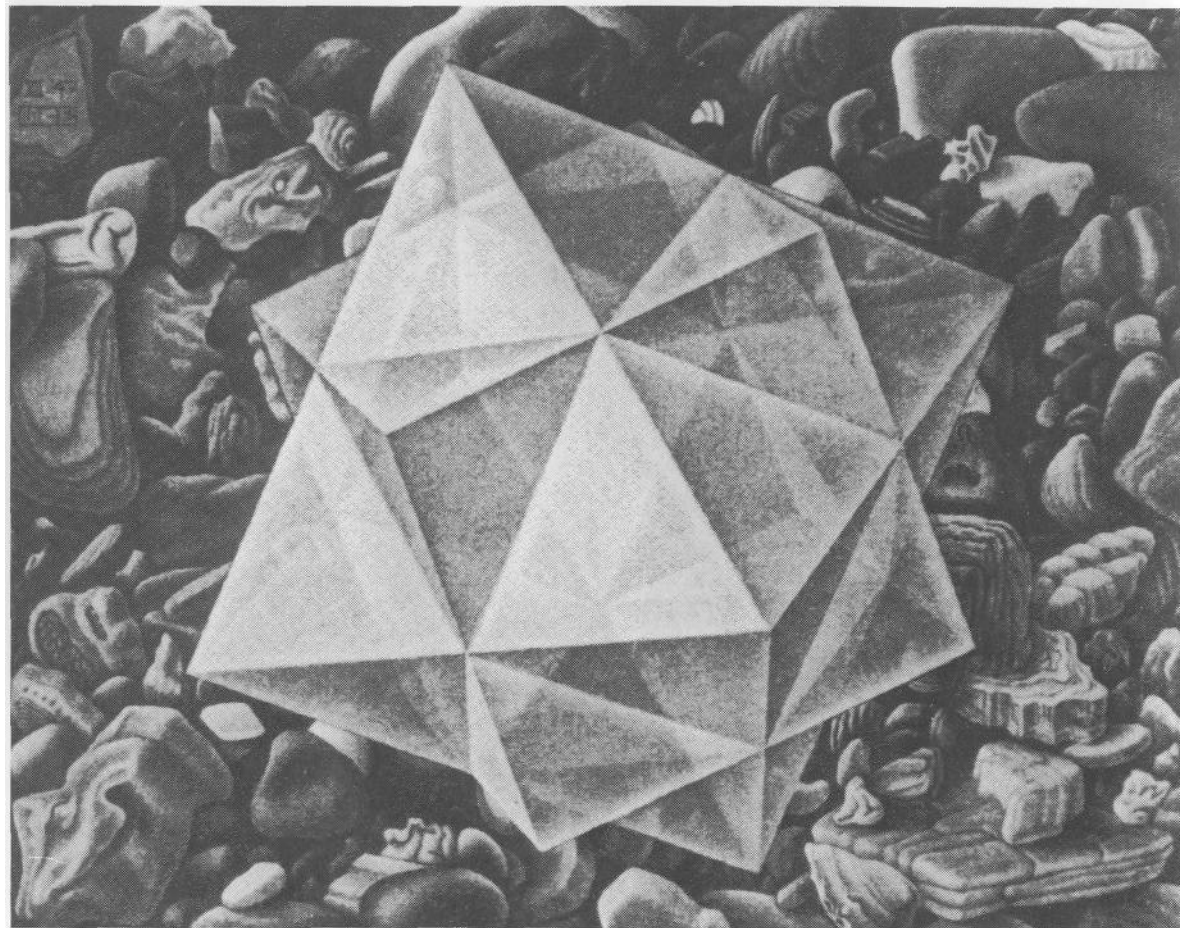
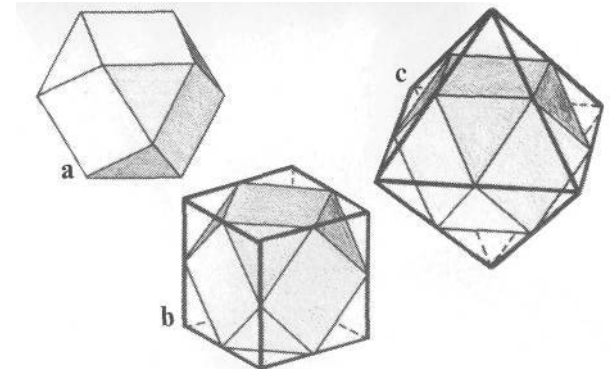


Abb. 5 Kristall, Mezzotinto, 1947, National Gallery of Art, Washington, D. C., Schenkung von Mr. C. V. S. Roosevelt.



Das Kubo-Oktaeder (Kubus + Oktaeder) hat sechs Quadrate und acht gleichseitige Dreiecke als Außenflächen (Abb. 4). In jeder Ecke stoßen zwei Quadrate und zwei Dreiecke zusammen, und zwar so, daß jeweils zwischen zwei Dreiecken ein Quadrat liegt. An dem Namen des Körpers kann man erkennen, wovon er abgeleitet ist. Man erhält diesen Körper auf drei Arten: indem man an einem Würfel die Ecken abschneidet oder an einem Oktaeder die Ecken entfernt; ebenso findet man diesen Körper als gemeinsam umschlossenen Raum, wenn ein Würfel und ein Oktaeder sich durchdringen. Diese Möglichkeit zeigt Eschers Grafik *Kristall* (Abb. 5).

Abb. 4 Das Kubo-Oktaeder (a) erhält man aus einem Würfel (b) oder aus einem Oktaeder (c), wenn man deren Ecken abschneidet. (Es muß immer durch die Mitten der zusammenstoßenden Kanten geschnitten werden.) Werden alle hervortretenden Ecken an Eschers Kristall (Abb. 5) entfernt, so entsteht ein Kubo-Oktaeder. Der Kristall ist die Durchdringung von einem Würfel und einem Oktaeder.

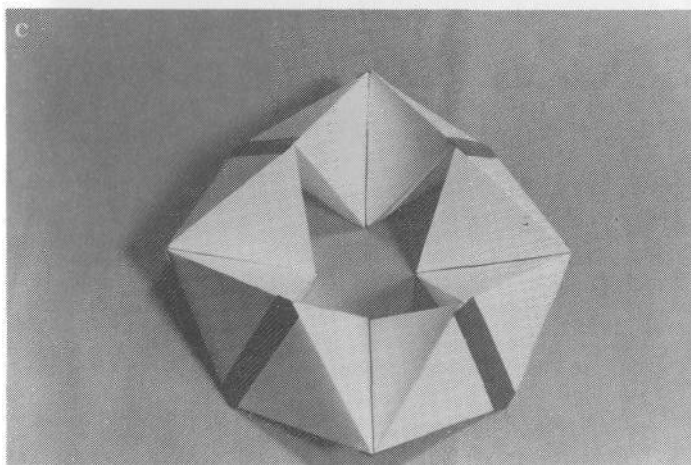
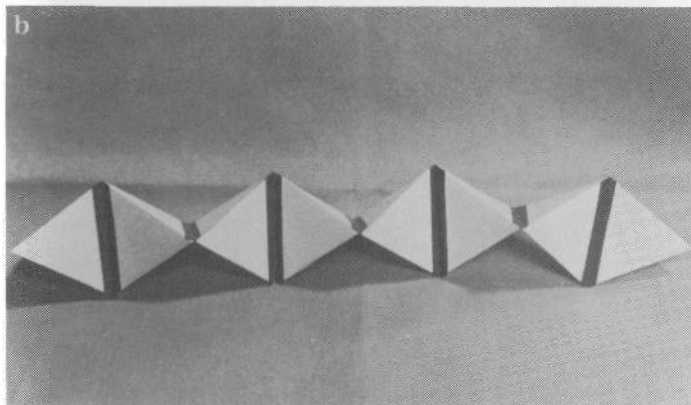
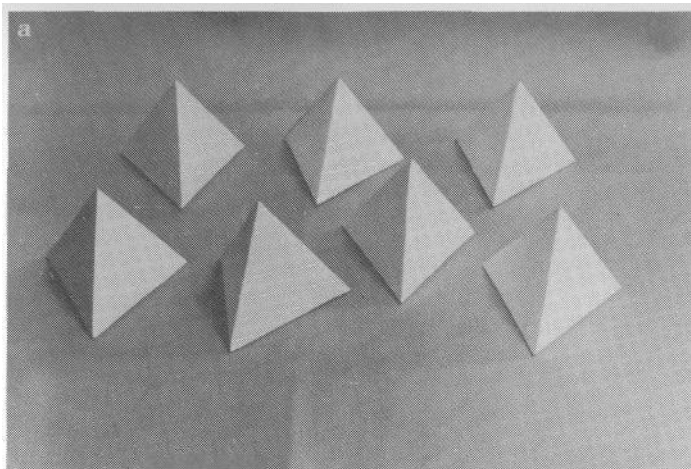


Abb. 6 Die Verbindung einiger Tetraeder an ihren Kanten ergibt einen geschlossenen Ring. Man kann die Kaleidozyklen auf diese Weise erhalten.

DIE KALEIDOZYKLEN

Ein Kaleidozyklus ist ein dreidimensionaler Ring aus Tetraedern. Um ihn herzustellen, beginnt man mit mehreren identischen Tetraedern (Abb. 6a). Verbindet man nun jeweils zwei davon flexibel an einer Kante, so erhält man eine Kette von Tetraedern (Abb. 6b). Sobald diese Kette lang genug ist, läßt sie sich zu einem geschlossenen Kreis zusammenfügen (Abb. 6c). Wegen der flexiblen Scharniere an den Kanten kann man den Ring kontinuierlich durch sein Zentrum drehen.

Meistens wird in Lehrbüchern die Entdeckung neuer Formen und neuer Ideen als das Ergebnis einer vorhersehbaren Entwicklung beschrieben. Die Wirklichkeit ist anders. Man macht eine unerwartete Entdeckung, und erst viel später wird die neue Erkenntnis in ihren „natürlichen“ Zusammenhang eingeordnet. So war es auch mit der Entdeckung der Kaleidozyklen. Obwohl sie natürlicherweise zu dem oben beschriebenen Gebiet gehören, hat erst eine außergewöhnlich genaue Analyse zu ihrer Entdeckung geführt. Zuerst gab es IsoAxis^R (U.S. Patent Nr. 3302321), das von dem Grafik-Designer Wallace Walker erfunden wurde. Walker hatte IsoAxis^R im Jahr 1958 bei der Arbeit an einem Projekt zur strukturellen Gestaltung von Papier geschaffen. Er war damals Student an der Cranbrook Academy of Art in Michigan. Im zweidimensionalen Zustand ist IsoAxis^R ein Gitternetz aus sechzig gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecken (Abb. 7a). Diesem flachen Muster sieht man keine seiner erstaunlichen dreidimensionalen Formen an. Wenn man es entlang der Linien faltet und zu einem dreidimensionalen Ring formt, nimmt IsoAxis^R eine auffallende Gestalt an (Abb. 7b). Erstaunlicherweise kann diese Ringform durch ihr Zentrum gedreht werden. Bei jeder Drehung ändert sie ihr Aussehen (Abb. 7c und d). Nach fünf Drehungen nimmt sie wieder die Ausgangsgestalt an, und der Zyklus der Veränderungen kann von neuem beginnen.

Ein mathematisch orientierter Mensch fragt natürlich sofort: In welcher Beziehung steht das zweidimensionale Gitternetz zu den dreidimensionalen Formen? Was passiert, wenn man das Netz ändert? Die Untersuchungen der Autorin, einer Mathematikerin, haben zu dem Ergebnis geführt, daß sich eine unendlich große Klasse von dreidimensionalen Formen ergibt. Unsere Kaleidozyklen gehören zu dieser Klasse.

Das Liniennetz des flachen Musters von IsoAxis^R kann gedehnt und gestaucht werden wie ein Holzlattenzaun. Dabei entstehen Muster, die man genau wie IsoAxis^R zu ei-

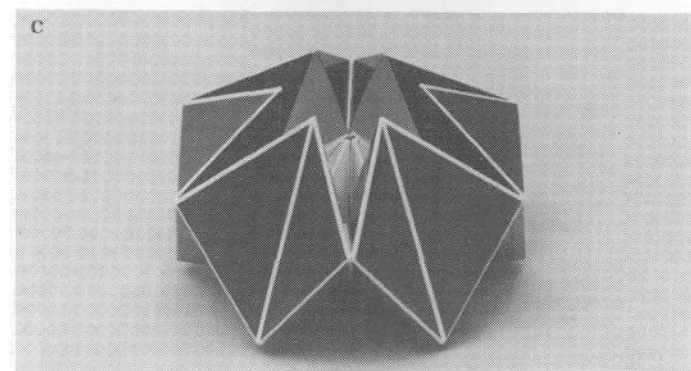
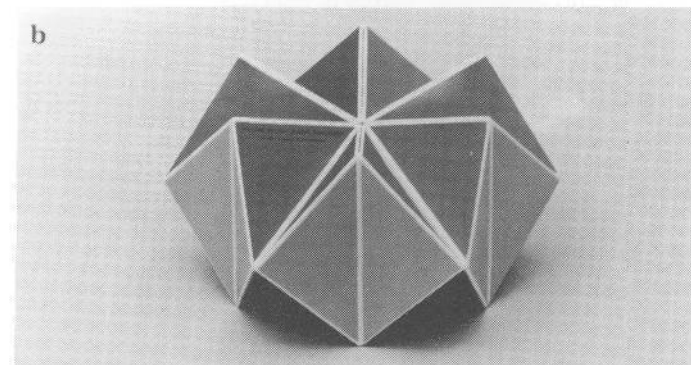
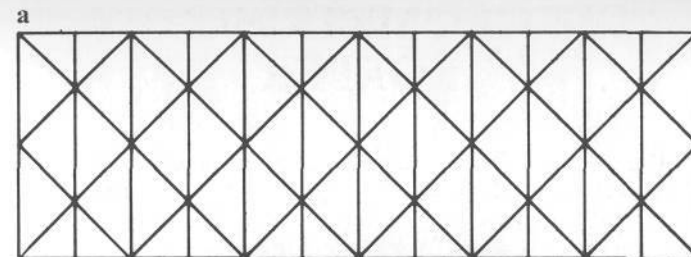
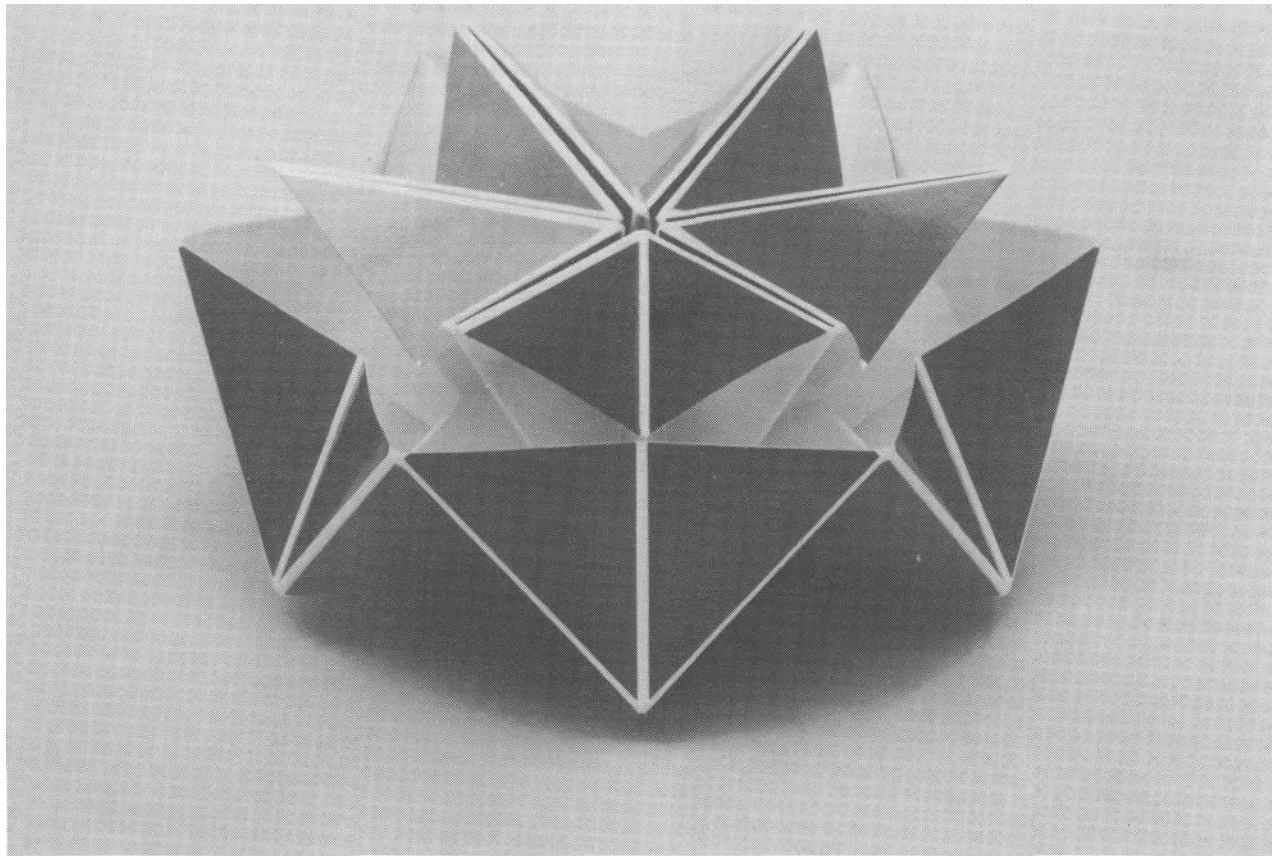


Abb. 7 IsoAxis^R ist zuerst ein ebenes Gitternetz von gleichschenkligen Dreiecken. Man kann aus ihm den gezeigten Körper falten - er „blüht“ auf, sobald man die Einzelflächen durch das Zentrum des Ringes drückt. Photo: Terry McGinnis.

nem Ring falten kann. Alle diese Ringe sind außen von Dreiecken begrenzt und können erstaunlicherweise ebenso wie IsoAxis^R durch ihr Zentrum rotieren. Für diese außergewöhnlich symmetrischen Figuren, die sich endlos wie ein Rad drehen können, scheint „Kaleidozyklen“ der passende Name zu sein. (Griechisch: kalós (schön) + eidos (Figur) + kyklos (Ring))



d

Wenn man das IsoAxis^R-Netz staucht, sehen die entstehenden Figuren wie vielfach gefaltete Lampenschirme aus. Sie sind sehr biegsam und wirken bei der Rotation wie aufblühende Blumen. Leider sind sie jedoch schwer zu handhaben, da sie eine Vielzahl kleiner Außenflächen aufweisen.

Bei der Dehnung des IsoAxis^R-Netzes entstehen Dreiecke, deren Winkel kleiner sind als ein rechter. Wenn man diese Muster zusammenfaltet, entsteht ein Ring zusammenhängender Tetraeder! Man kann die kleinen Dreiecke von der Oberkante des Netzes entfernen und an den unteren Rand setzen; dabei entsteht zwar ein neues Gittermuster (Abb. 9), jedoch ergibt sich die gleiche dreidimensionale Figur. Jeder senkrechte „Streifen“ von vier kongruenten Dreiecken wird zu einem Tetraeder gefaltet; die senkrechten Linien im Muster ergeben die Scharniere für die fertige Kette. Ändert man den Dehnungsfaktor für das Muster oder fügt man Dreiecke an, so kann man eine unendliche Vielfalt von Tetraederringen erzeugen.

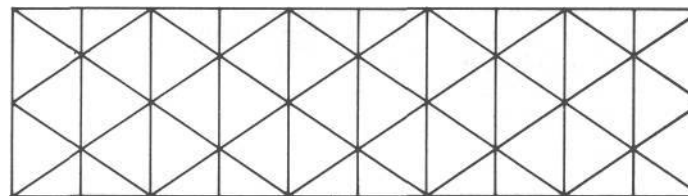


Abb. 8 Ein Gitternetz, das entsteht, wenn man das IsoAxis^R-Muster stretcht.

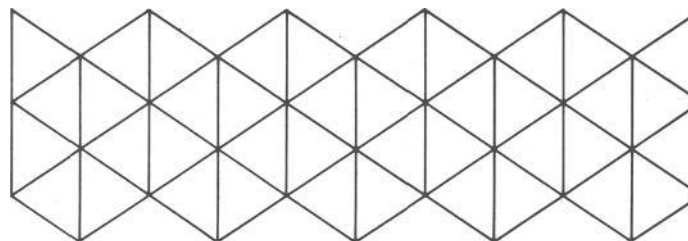


Abb. 9 In diesem Netz sind alle Dreiecke identisch; wenn man es faltet und richtig zusammenfügt, ergibt sich der gleiche Tetraederring wie bei dem Netz aus Abb. 8.

Damit stellen sich neue Fragen: Wieviele Tetraeder braucht man mindestens, um einen geschlossenen Ring zu erhalten? Wie klein läßt sich das Loch in der Mitte des Ringes machen? Diese Fragen wurden durch praktische Versuche und mit Hilfe der Lehrsätze der Euklidischen Geometrie beantwortet. Man braucht mindestens sechs Tetraeder, um einen Ring zu erhalten; man kann das Loch in der Mitte, theoretisch zumindestens, auf die Größe eines Punktes zusammenziehen. Auch dann würden die Tetraeder sich noch durch dieses Zentrum drehen lassen. Es ließen sich sogar Bedingungen für die Dreiecke formulieren, die ein punktförmiges Zentrum für den Ring ergeben.

Nach diesen Vorüberlegungen konnten nun viele wunderbare Kaleidozyklen konstruiert werden. Die ersten beiden Exemplare der Gruppe von Ringen, die nur ein punktgroßes Loch in der Mitte aufweisen, haben einen ähnlichen Umriss, wenn man sie von oben betrachtet. Der von sechs Tetraedern gebildete Kaleidozyklus hat als Umrisslinie ein regelmäßiges Sechseck (Abb. 10a), der Ring aus acht Tetraedern hat den Umriss eines Quadrates (Abb. 10b). Mit steigender Zahl von Tetraedern wird die Silhouette sternförmig oder ähnelt einer vielblättrigen Blüte (Abb. 11).

Alle bisher behandelten Kaleidozyklen sind wunderbar symmetrisch. Bei der Rotation berühren sich die Dreiecksflächen und gleiten dann auseinander. Das wirft eine weitere Frage auf: Lassen sich mit anderen Dreiecksnetzen andersartige Kaleidozyklen herstellen? Wieder gaben Experimente und Lehrsätze aus der Geometrie die Antwort. Ein schräges Netz von Dreiecken ergibt einen verdrehten Ring von Tetraedern (Abb. 12). Die verdrehten Kaleidozyklen sehen unregelmäßig aus, der Umriss zeigt Kerben, und bei der Rotation scheinen sich die Tetraeder einzeln durch das Zentrum zu drehen.

Die vielen Außenflächen der Kaleidozyklen laden zur Verzierung ein. Eine farbige Gestaltung der Flächen ergibt viele geometrische Effekte, und mit einem Linienmuster läßt sich die besondere Art der Bewegung betonen (Abb. 13). Während die Autorin sich mit diesen Fragen beschäftigte, erforschte und unterrichtete sie die mathematischen Aspekte zyklischer Flächenaufteilung. Bei diesen Untersuchungen boten die Zeichnungen von M. C. Escher einen großen Fundus an Beispielen. In vielen seiner Drucke tauchen diese Muster auf. Bei der Betrachtung von Eschers Zeichnungen wird deutlich, daß die Kaleidozyklen zwei seiner Hauptthemen aufgreifen: geschlossene Zyklen und unendliche Bewegung. *Reptilien* (Abb. 3) und *Begegnung* (Abb. 14) zeigen zwei Beispiele von sich durchdringenden und wiederholenden Mustern, die einen unendlichen Zyklus der Bewegung vorspiegeln.

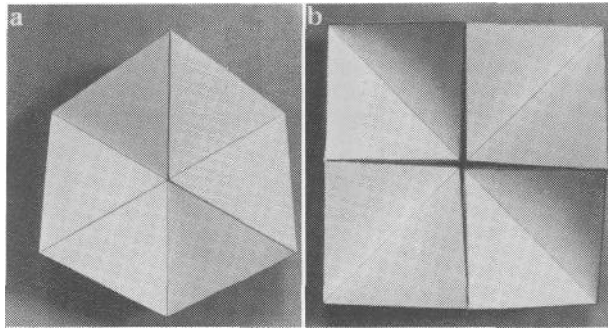


Abb. 10 (a) Ein sechseckiger Kaleidozyklus, (b) ein quadratischer Kaleidozyklus.

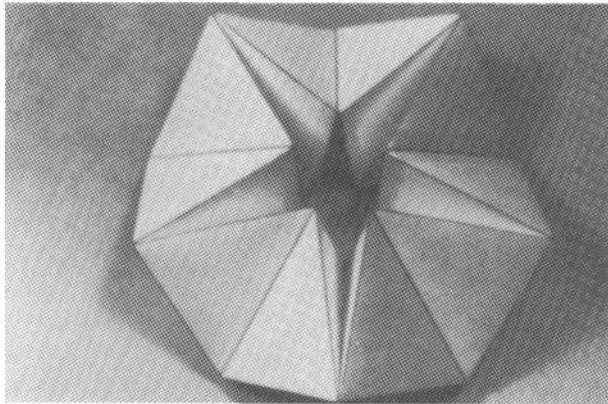


Abb. 11 Ein sternförmiger Kaleidozyklus aus zehn Tetraedern.

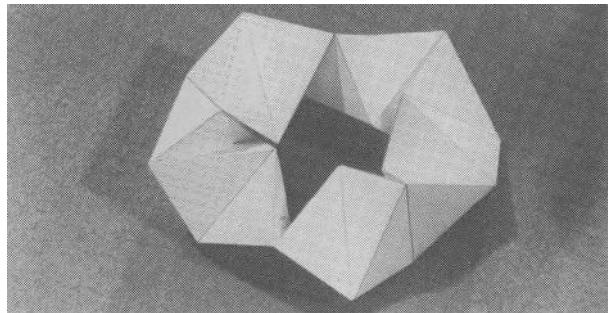


Abb. 12 Ein verdrehter Kaleidozyklus.

Daraus ergab sich natürlicherweise eine Idee zur Oberflächengestaltung der Kaleidozyklen; doch würden sich Eschers Zeichnungen bruchlos auf die Kaleidozyklen übertragen lassen? Dann würden nämlich im Dreidimensionalen viele Aspekte von Eschers Werken lebendiger hervortreten. Diese Frage konnte schließlich mit Ja" beantwortet werden, doch um den Weg dorthin zu verstehen, müssen wir erst etwas über zyklische Flächenaufteilungen lernen.

Abb. 13 Auffällige geometrische Verzierung akzentuiert die besondere Form eines Kaleidozyklus.

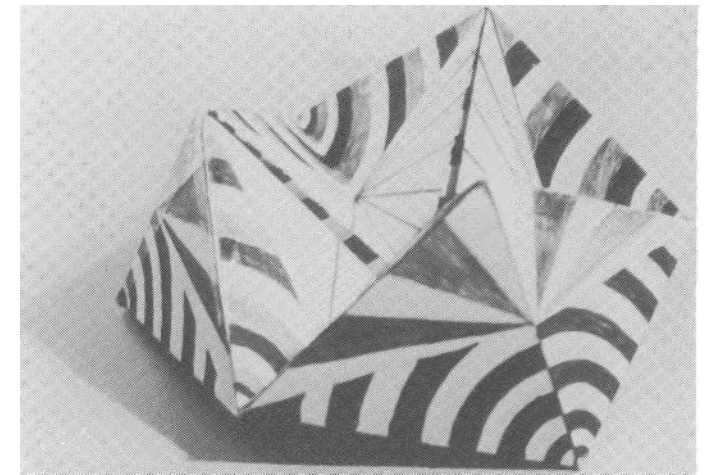
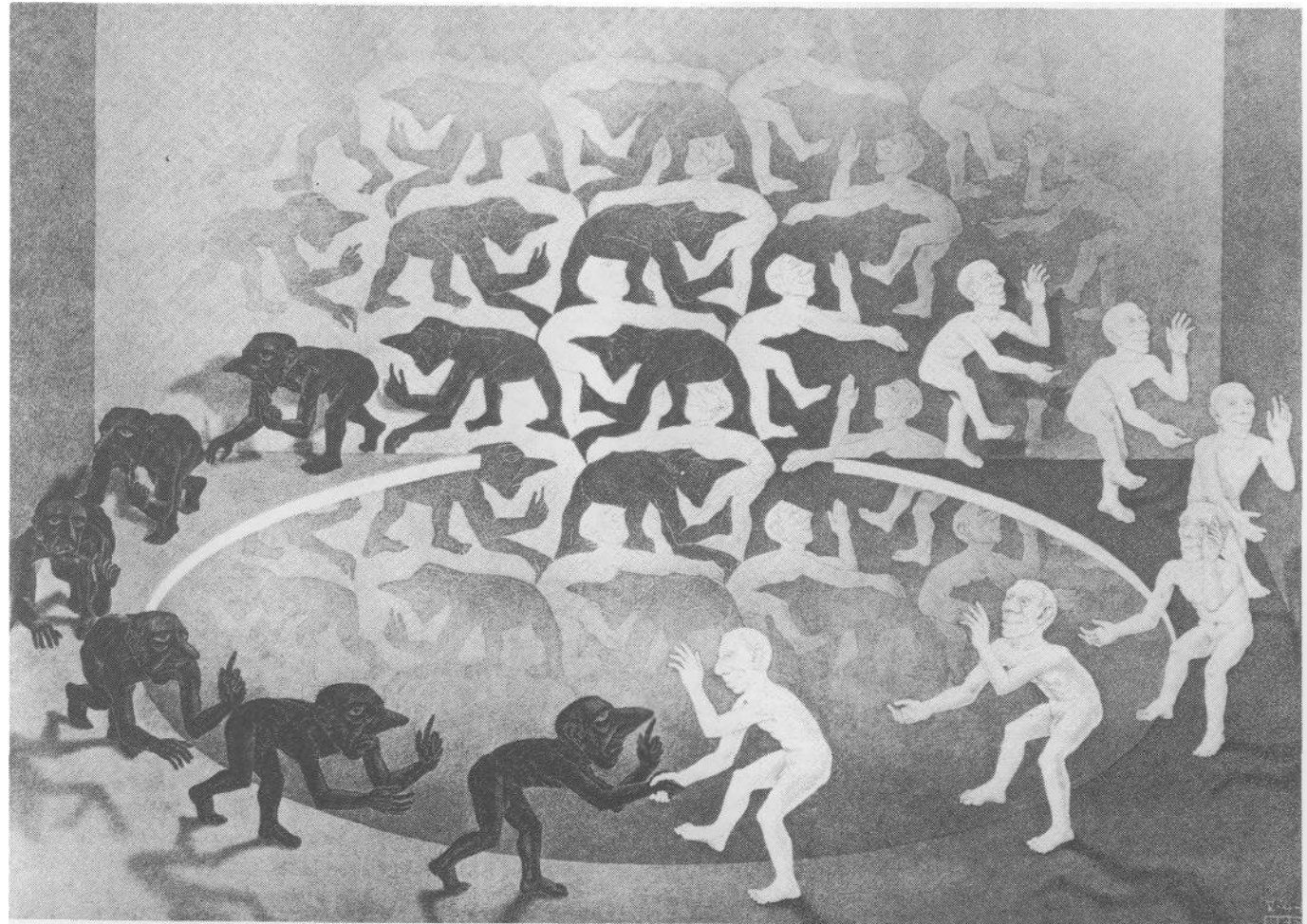


Abb. 14 *Begegnung*, Lithographie, 1944, National Gallery of Art, Washington, D. C., Schenkung von Mr. C. V. S. Roosevelt.



ZYKLISCHE FLÄCHENAUFTEILUNGEN

Jedermann weiß, wie man einen Fußboden fliest. Viele identische, manchmal auch verschieden große Fliesen werden wie ein Puzzle ausgelegt, um den Boden glatt und fugenlos zu bedecken. Zwar kann man die Fliesen einigermaßen zufällig legen, doch gewöhnlich entsteht ein Muster, das sich in regelmäßigen Abständen wiederholt. Solch ein Muster nennt man eine zyklische Flächenaufteilung. Diese Art der Flächenaufteilung war für Escher sein Leben lang Hauptthema, ernannte seine Begeisterung dafür eine „hoffnungslose Besessenheit“ (vgl. Eschers Vorwort zu dem Buch von Caroline MacGillany). Solange die



Abb. 15 Periodische Zeichnung 50; VII1942. Fisch und Frosch, Studie für *Verbum*. Man wähle einen festen Punkt in einem periodischen Muster (hier wurde der Punkt gewählt, an dem die Beine von drei Fröschen zusammentreffen) und suche alle seine Wiederholungen. Die Anordnung dieser Punkte ergibt das Gitter des Musters. Die Verbindungslinien dieser Punkte bilden ein Netz aus Parallelogrammen (breite weiße Linien); diese Parallelogramme sind alle identisch und geben die Originalzeichnung wieder. Eine Halbierung der Parallelogramme ergibt ein Dreiecksnetz. Jedes Parallelogramm enthält genau einen Fisch und einen Frosch (obwohl die Linien das Motiv zerschneiden). Aus dem gleichen Raster von Punkten kann man auch andere Parallelogrammetze erhalten: Jeder Schnittpunkt von Netzlinien ist dann ein Eckpunkt des Gitters und liegt daher nicht innerhalb eines Parallelogramms. Die neuen Parallelogramme haben eine andere Form als die in der Abbildung gezeigten, besitzen aber den gleichen Flächeninhalt und enthalten ebenfalls genau einen Fisch und einen Frosch.

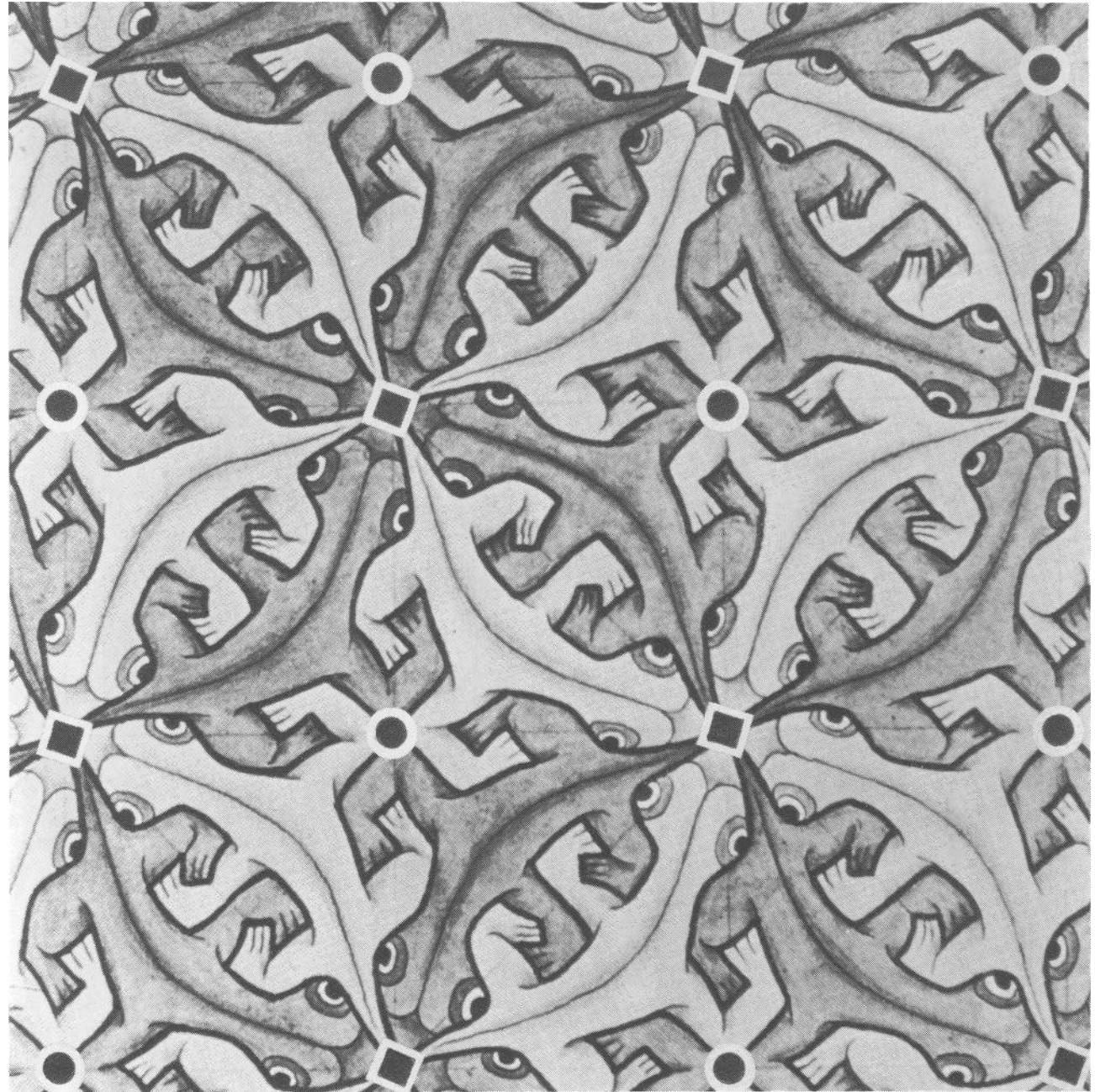
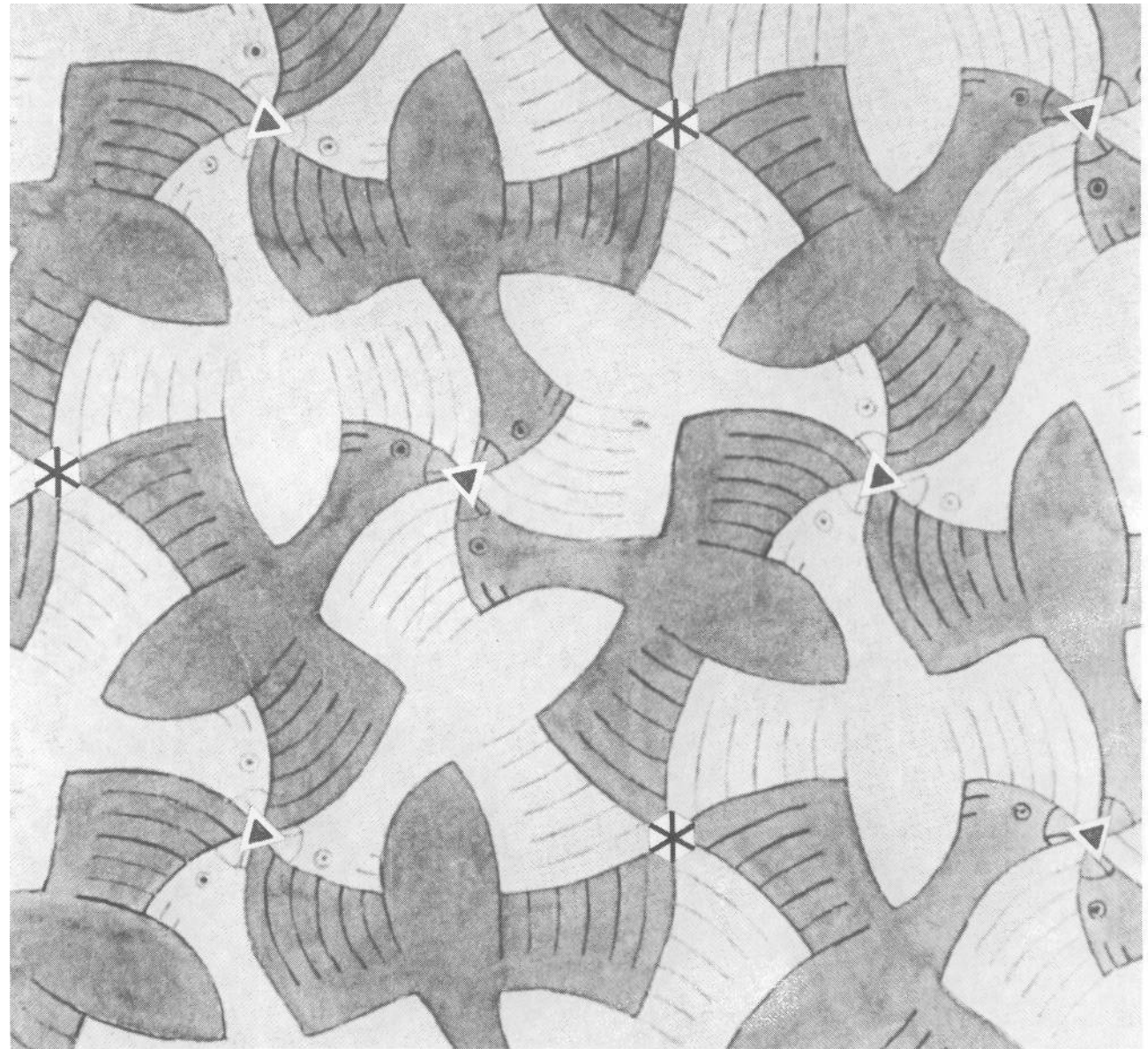


Abb. 16 Periodische Zeichnung 35; VII1941, Echsen. Jeder mit einem kleinen Quadrat markierte Punkt ist Zentrum einer vierfachen Drehsymmetrie für dieses Muster. D. h.: hält man diesen Punkt fest, lässt sich mit einer Vierteldrehung (90°) das Muster wieder zur Deckung bringen. Die Kreise kennzeichnen die Zentren einer zweifachen Rotationssymmetrie; eine Drehung um 180° bildet die Zeichnung wieder auf sich selbst ab.

Form der Fliesen auf gleichseitige Dreiecke, Quadrate oder regelmäßige Sechsecke beschränkt bleibt, ist es kinderleicht, ein Muster zu finden. Escher hatte sich jedoch selbst auferlegt, zyklische Flächenaufteilungen zu erfinden, bei denen die Elemente erkennbar belebte Figuren darstellen (natürlich ließ er auch Phantasiefiguren zu). Aus den Notizen über seine ersten Bemühungen um dieses Thema wird deutlich, daß er dieses Unterfangen aus eigener Kraft zu bewältigen versuchte. Erst später stellte er fest, daß Mathematiker und Kristallographen all diese Muster schon theoretisch untersucht hatten und auf Gesetzmäßigkeiten gestoßen waren, die für jede zyklische Flächenaufteilung gelten. Mit diesem Wissen konnte Escher seine enttäuschenden Experimente aufgeben und die ganze Kraft seines kreativen Talentes darauf verwenden, Figuren zu entwickeln, die sich in der gewünschten Weise überlagern. Er fertigte über 150 farbige Skizzen von zyklischen Mustern an, die aus Phantasiefiguren bestehen. In der Zeichnung *Reptilien* (Abb. 3) flieht eine solche Figur aus der Fläche des Skizzenblocks, um schließlich wieder in seine parkettierte Welt einzutauchen.

Die genaue Definition einer zyklischen Flächenaufteilung verlangt, daß das Muster durch eine in Richtung und Strecke festgelegte Verschiebung auf sich selbst abbildbar ist. In der Sprache der Mathematiker heißt dieser Vorgang die *Translation* einer Menge von Punkten in der Ebene. Alle Wiederholungen eines beliebigen Punktes bilden ein Gitter. Die Anordnung dieses Gitters ist unabhängig von der Wahl des Punktes. Die parallelen Verbindungen der Gitterpunkte ergeben immer ein Netz aus Parallelogrammen. Durch weitere parallele Aufteilung wird daraus ein Netz von Dreiecken (Abb. 15). Jede zyklische Flächenaufteilung läßt sich auf ein solches Liniennetz zurückführen. Dabei spielen Form und Größe der ursprünglichen Flächenelemente keine Rolle. Die entstehenden Netze aus Parallelogrammen oder Dreiecken bilden selbst wieder eine Parkettierung aus untereinander gleichen Einzelteilen. Jede zyklische Flächenaufteilung hat eine charakteristische Verteilung der Gitterpunkte, und diese Punkte können sehr verschieden miteinander verbunden werden. Daraus ergeben sich völlig unterschiedliche Parallelogramm- und Dreiecksgitter. Nur diese Gitter sind Gegenstand der mathematischen Analyse, bei der man sich auf gewisse Grundtypen beschränken kann.

Manche zyklische Flächenaufteilungen lassen sich nicht nur durch Verschiebungen auf sich selbst abbilden. Die möglichen anderen Bewegungen nennt man auch die *Symmetrien* eines Musters; erstaunlicherweise gibt es nur drei Arten von Symmetrien. Es kann einen Punkt in dem Muster geben, der die Rolle einer Radnabe spielt; das Muster läßt sich um den festen Punkt drehen, und nach weniger als einer vollen Umdrehung kommt es wieder mit sich



selbst zur Deckung. Diese Art der Bewegung nennt man *Drehung* (Abb. 16 und 17). Läßt sich durch das Muster eine Gerade ziehen, so daß die eine Hälfte des Musters das Spiegelbild der anderen ist, kann man es durch Umklappen auf sich selbst abbilden. Alle Punkte der Geraden bleiben dabei unbewegt (Abb. 18). Diese Bewegung nennt man *Spiegelung*, und die Gerade heißt Spiegelachse. Schließlich kann es notwendig sein, das Muster erst entlang einer Strecke zu verschieben und dann an der entsprechenden Geraden zu spiegeln (Abb. 19). Diese Art der

Abb. 17 Periodische Zeichnung 44; XII 1941. Vögel. Dieses Muster hat Zentren für sechsfache Rotationssymmetrien. (Sie sind mit Sechsecken markiert; die Zentren für eine dreifache Drehsymmetrie sind mit Dreiecken gekennzeichnet.) Ebenso gibt es Zentren für eine zweifache Drehung. (Finden Sie diese Symmetriezentren!) Dreht man das Muster 60° um ein Zentrum der sechsfachen Drehsymmetrie, so kommen alle Umrißlinien zur Deckung, doch sind die grauen und die weißen Vögel vertauscht. Eine Drehung von 120° um ein Zentrum der dreifachen Symmetrie bildet die Vögel der gleichen Farbe aufeinander ab.

Bewegung nennt man *Schubspiegelung*. Die theoretische Bearbeitung der drei Bewegungsklassen ist Gegenstand der Transformationsgeometrie, deren Gesetze für jede zyklische Flächenaufteilung gelten.

Bei seinen farbig zusammengesetzten Zeichnungen hat Escher die Farben so verteilt, daß jeweils benachbarte Figuren verschiedene Farben erhielten. Dadurch sind einzelne Figuren klar erkennbar - auch wenn alle den gleichen Umriß haben. In Mustern mit identischen Einzelflächen bringen manche Symmetrien die Umrißlinien zur Deckung, vertauschen dabei aber die Farbverteilung; ebenso gibt es Symmetrien, die auch die Farben richtig abbilden (Abb. 17). Escher war Vorreiter einer systematischen Untersuchung von kolorierten zyklischen Flächenaufteilungen, heute heißt dieser Forschungsbereich *Farb-Symmetrie*.

Der tatsächliche Entwurf von Motiven, die sich durchdringen und ausschließlich vermittle Kopien lückenlos eine Fläche bedecken, ist nach Eschers Worten ein „schwierige

Abb. 19 Periodische Zeichnung 63; II 1944. Studie für *Begegnung*. Dieses Muster läßt sich entlang der eingezeichneten Linie verschieben und danach umklappen. Bei dieser Schubspiegelung werden die nach links schauenden Optimisten auf die nach rechts schauenden abgebildet.

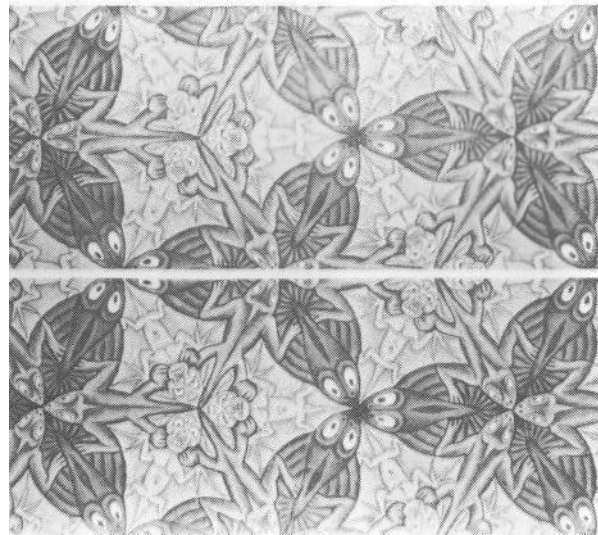
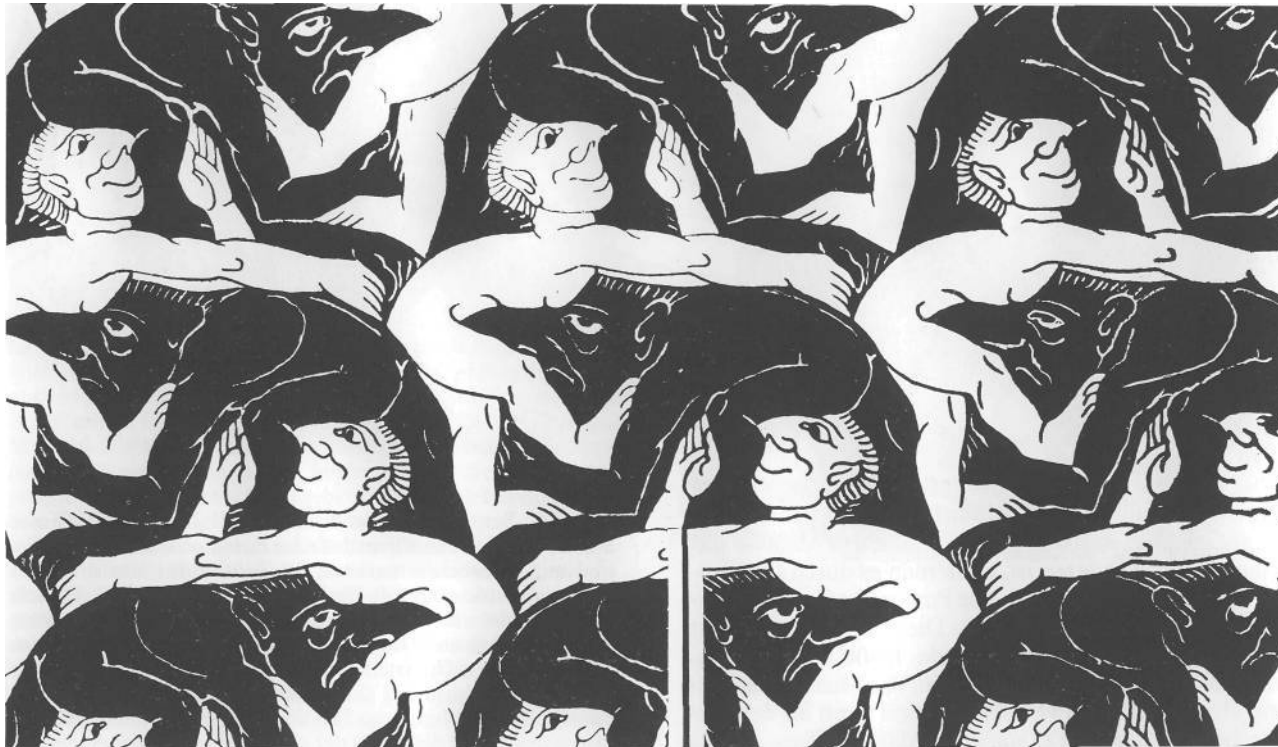


Abb. 18 Periodische Zeichnung 85; IV 1952. *Drei Elemente*. Eine Spiegelungsachse teilt diese Zeichnung in zwei Hälften. Hier lassen sich durch jedes Motiv mehrere Spiegelachsen legen.

ges Unterfangen". Vom mathematischen Standpunkt aus gibt es nur 17 verschiedene Muster, d.h. Muster mit verschiedenen Symmetriearten. Für den Künstler gibt es natürlich eine unendliche Vielzahl von Möglichkeiten. Um ein einzelnes passendes Flächenelement zu entwerfen, muß der Künstler den Beschränkungen gehorchen, die die möglichen Symmetrien der Zeichnung für die Umrißlinie des Elementes vorgeben. Noch schwieriger ist der Entwurf einer Umrißlinie, die zwei verschiedene Darstellungen in der Zeichnung gleichzeitig umschließen muß. Dieser kurze Blick auf die geometrischen Prinzipien der zyklischen Flächenaufteilung soll genügen. Jetzt können wir beschreiben, wie die Modelle unserer Sammlung mit Eschers Zeichnungen versehen wurden.

OBERFLÄCHENGESTALTUNG BEI DEN GEOMETRISCHEN KÖRPERN

Escher selbst hat Versuche angestellt, seine periodischen Muster zur Oberflächengestaltung dreidimensionaler Objekte zu verwenden. In seinem Aufsatz „Annäherung an die Unendlichkeit“ deutet er die ebenen Zeichnungen als Bruchstücke einer möglichen Unendlichkeit. Auf der Oberfläche eines dreidimensionalen Körpers läßt sich die unendliche Wiederholung einer Zeichnung mit einer endlichen Anzahl von Figuren verwirklichen. Das Muster auf einem Körper hat weder Anfang noch Ende. Bei seinen Versuchen hat Escher einige Papiermodelle beklebt (Abb. 20), doch lediglich einer dieser Körper ist schließlich wirklich in endgültiger Form hergestellt worden. Es war ein Metallkosaeder mit einem Emailledesign aus Muscheln und Seesternen. Eine holländische Firma hatte es als Jubiläumsausgabe bestellt (Abb. 21).

Escher hat außerdem Kugeln entworfen, deren Oberflächen geschnitzte, sich wiederholende Motive zeigen (Abb. 22). Wahrscheinlich hat er sich bei der Planung der Kugeloberfläche die ebenen Muster auf einem geeigneten Vielfach, einem Würfel oder Oktaeder, vorgestellt und sie sich von diesem Vielfach auf die umhüllende Kugeloberfläche projiziert gedacht.

Die drei Platonischen Körper mit Dreiecksaußenflächen sowie der Würfel haben als ebenes Netz eine Verbindung von gleichseitigen Dreiecken bzw. Quadraten. Für diesen Körper findet man leicht passende Entwürfe, da ihre Netze bei zyklischen Zeichnungen häufig als Grundmuster auftreten. Es ist jedoch nicht ganz einfach, diese Körper zu bekleben, denn es kann sein, daß die ausgeschnittenen Stücke der Zeichnung beim Zusammenfallen und Kleben nicht mehr genau aneinanderpassen.

Grundsätzlich läßt sich das Kubo-Oktaeder ebenfalls leicht bekleben, vorausgesetzt, man verwendet Zeichnungen, deren Symmetrien sowohl auf Dreieck- als auch auf Quadratgittern beruhen. Es gibt von Escher solche Zeichnungen, er hat sie als Studien für *Kreislimit III* (Abb. 23) entworfen. In diesem Bild wechseln Dreiecke und Quadrate als Flächenelemente ab; bei der Übertragung auf die zweidimensionale Darstellung einer besonders gekrümmten (hyperbolischen) Ebene mußten allerdings die Gitterstrukturen ebenfalls gekrümmt werden.

(Eine hyperbolische Ebene hat folgende Eigenschaft: Zu einer gegebenen Geraden und einem gegebenen Punkt lassen sich mindestens zwei Geraden zeichnen, die durch den Punkt gehen, nicht aber die erste Gerade schneiden.) Bei der Gestaltung der Oberfläche stellt das Dodekaeder die größte Herausforderung dar, da die regelmäßigen Fünfecke nicht als Gitterelemente einer Symmetrie der Ebene vorkommen können. Es ist unmöglich, eine ebene Zeichnung in regelmäßige Fünfecke zu zerlegen und diese auf dem Körper anzubringen. Aber es gibt eine spezielle Zerlegung der Fläche in unregelmäßige Fünfecke, die hier den Schlüssel zum Erfolg darstellte. In Verbindung mit der Technik, die Escher wahrscheinlich bei den Kugeln benutzt hat, gelang es, ein Dodekaeder mit einer Escher-Zeichnung zu versehen. (Die Details der Entwürfe für die einzelnen Körper werden später in dem Kapitel *Einzelheiten zu den Modellen* besprochen.)

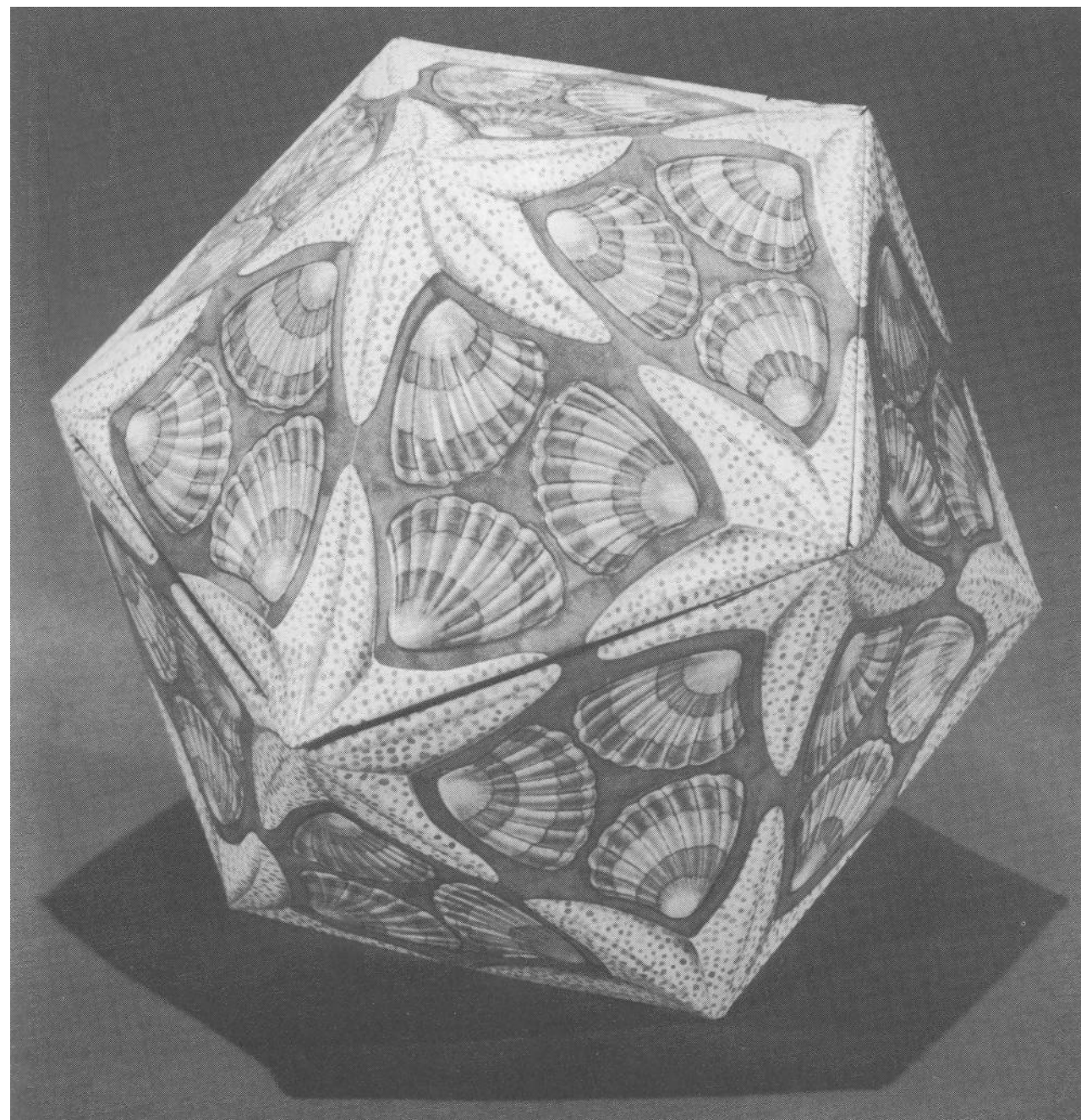


Abb. 20 M. C. Escher hat dieses Papiermodell eines rhombischen Dodekaeders (12 rautenförmige Außenflächen) mit einer Version seiner Zeichnung aus Abb. 18 versehen.

Abb. 21 Dieses emaillierte Metallikosaeder wurde von M. C. Escher gestaltet. National Gallery of Art, Washington, D. C., Schenkung von Mr. C. V. S. Roosevelt.

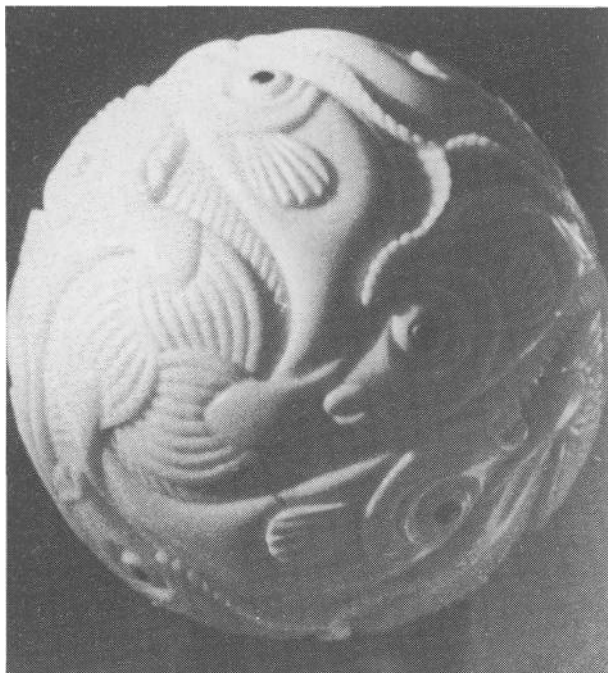


Abb. 22 Eine elfenbeinerne Nachbildung von Eschers *Kugel mit Fisch*; sie wurde 1962 von Masatoshi, einem Netsuke-Schnitzer, hergestellt. (Netsuke ist in Japan ein kleiner geschnittener Kopf zur Befestigung von Schreib- oder Rauchgegenständen.) National Gallery of Art, Washington, D. C., Schenkung von Mr. C. V. S. Roosevelt.

OBERFLÄCHENGESTALTUNG BEI DEN KALEIDOZYKLEN

Als Escher sich mit dem Problem der Darstellung wirklich unendlicher Wiederholung beschäftigte, mußte er zugeben, daß Zeichnungen für diesen Zweck unangemessen sind. Er schlug daher eine Teillösung vor: Wenn man bei einer rechteckigen Zeichnung mit einem solchen Muster (Abb. 24a) zwei gegenüberliegende Kanten passend zusammenfügt, erhält man einen Zylinder (Abb. 24b). In der Richtung, die um den Zylinder herumführt, hat das Muster dann weder Anfang noch Ende. Da jedoch der Zylinder nur eine endliche Höhe haben kann, endet das Muster unvermittelt an seiner Ober- und Unterkante. Eine Form mit einer echten unendlichen Wiederholung ließe sich auf folgende Weise herstellen: Man beginnt mit einem ebenen Rechteck, formt dann daraus einen Zylinder und setzt dessen Ober- und Unterkanten aufeinander, so daß man einen geschlossenen Ring erhält. Bei einem normalen Papierzylinder läßt sich das nicht bewerkstelligen, ohne das Papier zu zerknittern. Mit den Kaleidozyklen läßt sich das

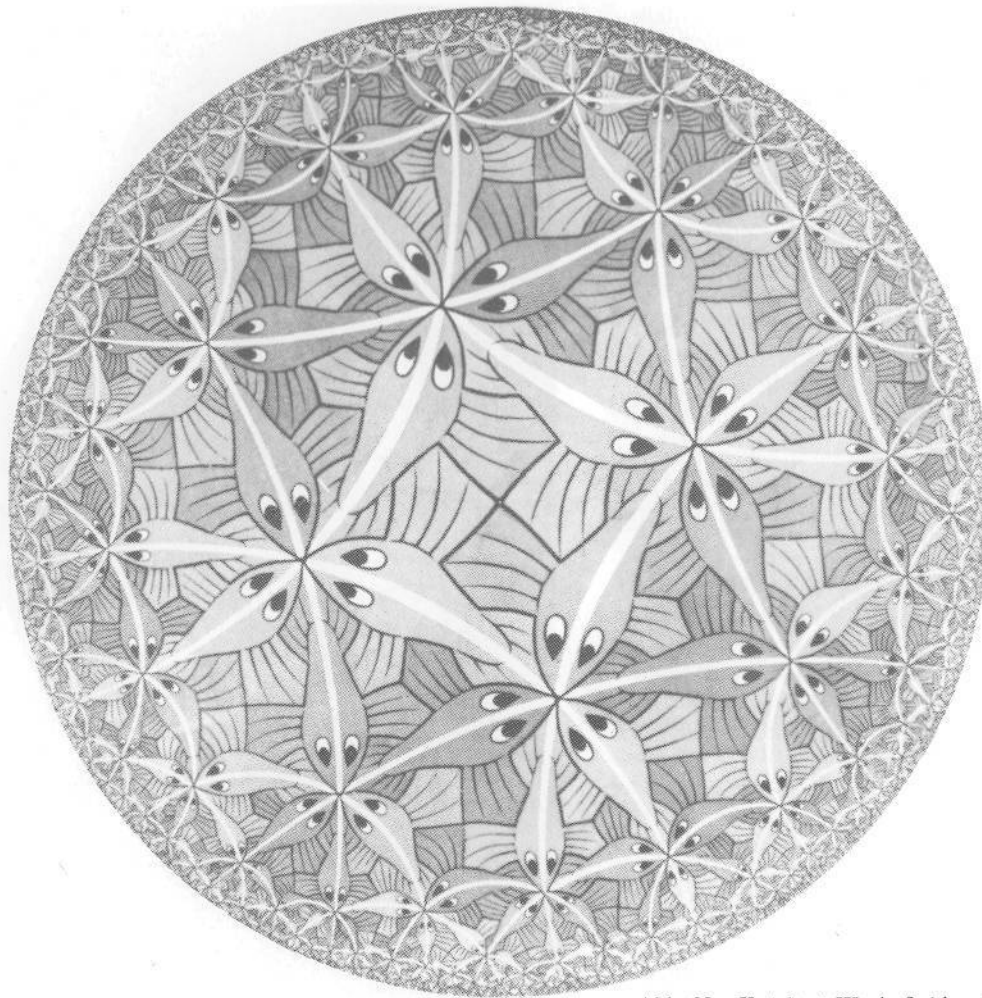


Abb. 23 *Kreislimit III*, vierfarbiger Holzschnitt, 1959, National Gallery of Art, Washington, D. C., Roosevelt-Sammlung.

Kunststück eines geschlossenen Ringes fertigbringen, da bei ihnen das Papier so gefalzt und gefaltet wird, daß aus dem ursprünglichen *Zylinder* eine Kette von Tetraedern entsteht. Diese Kette läßt sich leicht zu einem Ring zusammenfügen, ohne das Papier zu verletzen (Abb. 24c). Die dreieckigen Facetten des Kaleidozyklus wiederholen sich also unendlich oft in beiden ringförmigen Richtungen - ähnlich wie auf der Oberfläche eines Rettungsringes. Die Oberfläche eines Kaleidozyklus durchgehend mit zyklischen Flächenaufteilungen zu versehen stellt die Weiterentwicklung und endgültige Lösung des von Escher vorgeschlagenen Ansatzes dar.

Geht man nun tatsächlich daran, die Kaleidozyklen mit Eschers periodischen Zeichnungen zu versehen, so ist das nicht so einfach, wie man es sich nach der oben gegebenen

Beschreibung denken könnte. Die einfache Beobachtung, daß sowohl die zyklische Flächenaufteilung als auch die Grundmuster der Kaleidozyklen einen gemeinsamen geometrischen Aspekt haben, hatte zu der Hoffnung auf eine einfache Lösung Anlaß gegeben. Jeder Kaleidozyklus entsteht aus einem ebenen Netz von Dreiecken - und ein solches Netz von Dreiecken ist eng verwandt mit einer regelmäßigen Flächenaufteilung. Es sah erst so aus, als müsse man bloß eine zyklische Flächenaufteilung mit einem gewissen Gitter auf das Baumuster eines Kaleidozyklus mit demselben Gitter abbilden; doch das war leider zu naiv gedacht. Betrachtet man einen sechseckigen Kaleidozyklus von oben, so scheint er sich aus sechs gleichseitigen Dreiecken zusammensetzen (Abb. 25a), ein quadratischer Kaleidozyklus erscheint als Zusammensetzung aus

8 identischen Dreiecken (Abb. 26a). Es sieht so aus, als ob eine regelmäßige Flächenaufteilung, die auf einem Netz von gleichseitigen Dreiecken beruht, die Facetten des sechseckigen Kaleidozyklus bedecken könnte; und ebenso, als ob eine Aufteilung, die ein Netz aus gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecken besitzt, die Einzelflächen des quadratischen Kaleidozyklus bedecken könnte. Doch unser Auge spielt uns hier einen Streich. Es liegt daran, daß wir die Kaleidozyklen von oben sehen; die dreieckigen Einzelflächen sind in Wirklichkeit geneigt. Seitenansichten der Modelle (Abb. 25b und 26b) und eine genauere Untersuchung ihrer ebenen Netze zeigen, daß die dreieckigen Einzelflächen nicht mit den Dreiecken übereinstimmen, die den regelmäßigen Mustern zugrunde liegen.

Eine Kamera projiziert ein dreidimensionales Objekt auf eine ebene Fläche. Es ist möglich, diesen Vorgang umzukehren und eine ebene Fläche auf ein dreidimensionales Objekt zu projizieren. Warum sollte man also nicht eine Zeichnung mit einem Netz aus gleichseitigen Dreiecken von oben auf den sechseckigen Kaleidozyklus¹ projizieren? Ebenso könnte man auch ein Muster mit rechtwinkligen Dreiecken auf die Außenfläche eines quadratischen Kaleidozyklus projizieren. Um dies auszuführen, benötigt man einen anderen Zweig der Geometrie: die *projektive Geometrie*; sie untersucht, welche Eigenschaften eines Objektes unverändert bleiben, wenn man es auf eine andere Oberfläche projiziert.

Es gibt zwei wesentlich verschiedene Arten der Projektion. Die eine Art, die *Zentralprojektion* (Abb. 27a), kennt man vom Diaprojektor. Eine punktförmige Quelle sendet einen Lichtkegel aus, der das Bild vergrößert und es auf einer Fläche abbildet. Die andere Art der Projektion ist technisch schwieriger zu bewerkstelligen, mathematisch gesehen jedoch genauso „natürlich“. Bei einer *Parallelprojektion* (Abb. 27b) wird das Bild durch parallele Strahlen übertragen. Bei beiden Arten der Projektion bleiben gewisse Eigenschaften des Bildes erhalten, während andere verändert werden. Die wesentlichen Eigenschaften der zyklischen Flächenaufteilungen, die man zur durchgängigen Bedeckung der Kaleidozyklen benötigt, bleiben nur bei der Parallelprojektion erhalten. Damit war, zumindest theoretisch, das Problem der Projektion von Flächenmustern auf die Kaleidozyklen gelöst. (Für die praktische Ausführung einer Parallelprojektion braucht man einen Computer oder ein kompliziertes Linsensystem.)

Damit blieb nur noch eine Frage unbeantwortet: Welche Art Muster kann man auf die sechseckigen bzw. quadratischen Kaleidozyklen übertragen? Wenn man diese Tetraederringe dreht, berühren sich die Dreiecksflächen und gleiten dann aneinander vorbei; viele unterschiedliche

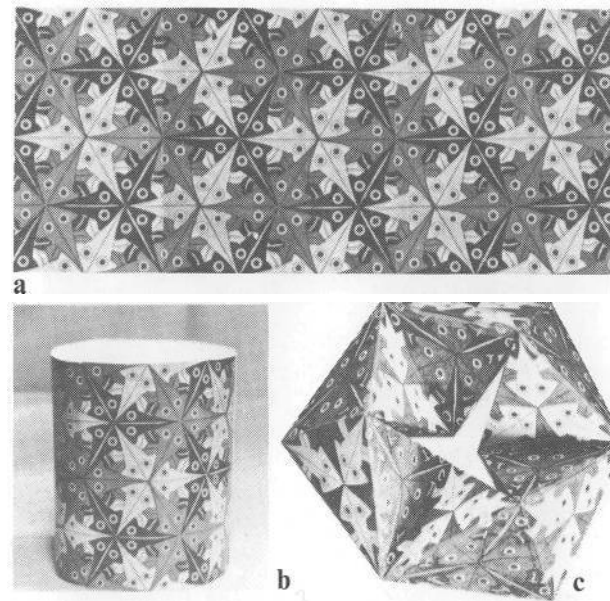


Abb. 24 Periodische Zeichnung 103; IV1959. Fisch. Bei diesem rechteckigen Ausschnitt der periodischen Zeichnung passen die Kanten rechts, links, oben und unten zusammen, (b) Man erhält einen Zylinder, indem man eines der Paare gegenüberliegender Kanten zusammenfügt, (c) Wenn man die Zeichnung entlang der Gitterlinien eines Kaleidozyklus falzt, kann man beide Paare der gegenüberliegenden Kanten zusammensetzen und das Muster um den Kaleidozyklus „wickeln“.

Kanten treffen aufeinander, während das Modell in seinem endlosen Zyklus bewegt wird. Außerdem muß der Entwurf das ebene Netz des Kaleidozyklus ausfüllen, sonst treffen die Ober- und Unterkanten sowie die Kanten rechts und links nicht passend aufeinander. Es ließen sich viele Muster finden, die diesen Anforderungen genügten und damit wurde die theoretische Möglichkeit der durchgehend bedeckten Kaleidozyklen Wirklichkeit.

Die Herstellung der Vorlagen für die Kaleidozyklen erforderte ein absolut genaues Vorgehen. Eschers Skizzen in den Notizheften sehen zwar einigermaßen präzise aus, doch ergeben sich bei den handgezeichneten Motiven winzige Abweichungen innerhalb einer ganzen Seite. Bei der Gestaltung eines Kaleidozyklus muß jedes Detail zu

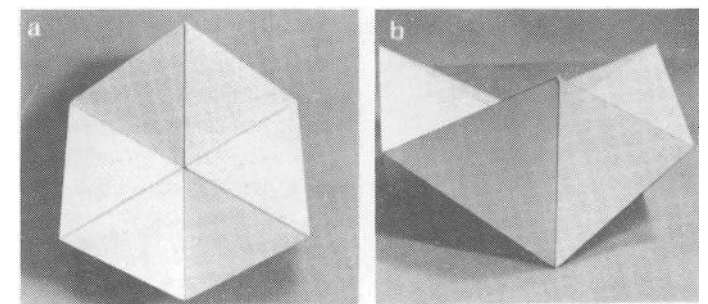


Abb. 25 (a) Draufsicht und (b) Seitenansicht eines sechseckigen Kaleidozyklus.

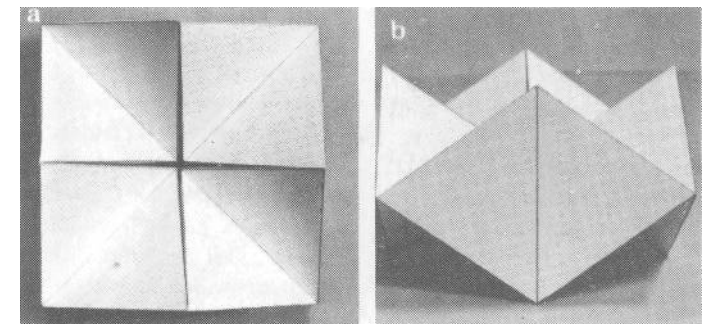


Abb. 26 (a) Draufsicht und (b) Seitenansicht eines quadratischen Kaleidozyklus.

jedem entsprechenden anderen des Musters genau passen, da bei der Rotation des Kaleidozyklus Einzelheiten aus entferntliegenden Teilen des Musters aufeinander treffen; darum war für die Oberflächengestaltung äußerste Genauigkeit gefordert. Für jeden der verwendeten geometrischen Körper und für alle Kaleidozyklen wurden die Entwürfe von Hand nachgezeichnet. Wallace Walker und seine Helfer - Victoria Vebell, Robert McKee und Robin McGrath - wandelten im Wortsinn auf Eschers Spuren, als sie die Zeichnungen noch einmal schufen. Die exakten Entwürfe wurden in einem speziellen photographischen Verfahren vergrößert und entsprechend der Parallelprojektion gestreckt. Schließlich wurden die Entwürfe sorgfältig handkoloriert. In jedem Fall sollten die Farben der Originalskizzen so genau wie möglich getroffen werden.

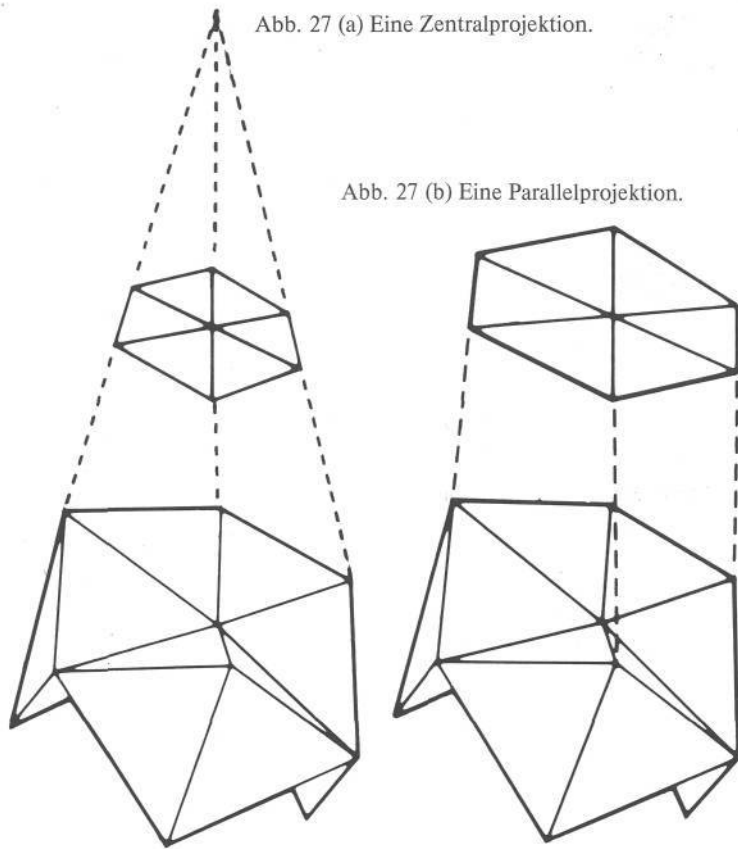


Abb. 27 (a) Eine Zentralprojektion.

Abb. 27 (b) Eine Parallelprojektion.

DIE FARBLICHE GESTALTUNG DER ENTWÜRFE

Escher hatte ein strenges Kriterium für die Kolorierung der zyklischen Flächenaufteilungen: Je zwei benachbarte Motive sollten verschiedene Farben tragen; denn nur durch den farblichen Kontrast lassen sich in einem Entwurf aus identischen Kopien einzelne Motive erkennbar herausheben.

Kartographen müssen normalerweise jedes Land mit einer eigenen Farbe kennzeichnen; dabei verwenden sie ausreichend viele Farben, um Länder mit gemeinsamen Grenzen unterschiedlich einfärben zu können. Es mag befremdlich klingen, doch die Probleme, die bei diesen Anforderungen an die Farbgebung auftreten, gehören in den Bereich der Mathematik. Bei einer vorgegebenen Struktur, die farblich wie eine Landkarte zu gestalten ist (sei es eine geometrische Zeichnung oder ein Mosaik), fragen Mathematiker: Wieviele verschiedene Farben brauche ich höchstens, um den Anforderungen zu genügen? Auf wieviele verschiedene Weisen kann ich die Struktur einfärben? Kann man die Farben so verteilen, daß zwangsläufig bestimmte Farbkombinationen auftreten? Diese Fragen sind erstaunlich schwer zu beantworten, besonders wenn die Struktur kompliziert ist und die Farbgebung strengen Regeln zu gehorchen hat. Kombinatorik, Graphentheorie und Topologie sind die Zweige der modernen Mathematik, in denen solche Fragen bearbeitet werden.

Die Frage nach der minimalen Anzahl von Farben, die man für eine beliebige Landkarte in der Ebene oder auf einer Kugeloberfläche benötigt, blieb über zweihundert Jahre lang unbeantwortet, obwohl viele fähige Mathematiker nach einer Antwort suchten. Viele glaubten, daß vier Farben für jede Landkarte ausreichend sind - denn niemandem gelang der Entwurf einer denkbaren Karte, die fünf Farben verlangt. Erst 1976 konnte bewiesen werden, daß diese Vermutung korrekt ist. (Die Mathematiker K. Appel und W. Haken der University of Illinois benötigten zum Beweis Zehntausende von Computeroperationen.) Zwar sind vier Farben ausreichend, um eine ebene Zeichnung entsprechend den Forderungen für Landkarten zu kolorieren, doch für zyklische Flächenaufteilungen ist es ansprechender, wenn die Farbgebung die Symmetrien der Zeichnung betont. Escher hatte lange vor einer systematischen Bearbeitung durch Mathematiker und Kristallographen in dieser Richtung gearbeitet und die experimentell gefundenen Möglichkeiten systematisiert. Bei der Übernahme von Eschers Entwürfen für die Gestaltung der geometrischen Modelle wurden die Anforderungen an die

Kolorierung aufrechterhalten. Wenn man die ebenen Netze der Körper aus den Gittern, die Eschers periodischen Zeichnungen zugrunde liegen, ausschneidet, fallen einige Teile der Zeichnung fort. So kann es vorkommen, daß beim Zusammenfallen zu einem Körper gleichfarbige Motive aufeinanderstoßen. Um bei den Körperoberflächen das Prinzip der unterschiedlichen Farbgebung durchzuhalten, mußte Eschers Kolorierung in einigen Fällen geändert werden. So waren für einige ebene Muster lediglich drei Farben nötig, während dasselbe Muster auf der Oberfläche eines Platonischen Körpers vier Farben verlangte. In drei Fällen - beim Würfel, beim Ikosaeder und beim Kubo-Oktaeder - mußte die Farbgestaltung der Muster geändert werden.

Bei allen Modellen wurde eine zusätzliche Anforderung an die Farbgebung erfüllt: Jeder mit einem Muster versehene Körper konnte gerade koloriert werden, d.h. jede Farbe wurde gleich häufig verwendet. Eine solche Farbverteilung für den Würfel zu finden, der mit zwölf identischen Fischen bedeckt ist, haben wir als Rätsel für Sie offengelassen.

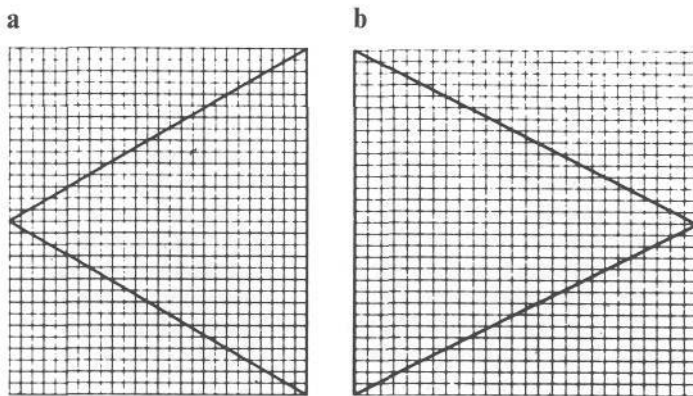


Abb. 28 (a) Ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck wurde mit Hilfe eines Computers auf die Dreiecksaußenfläche (b) eines quadratischen Kaleidozyklus parallelprojiziert. Man beachte, daß in der Waagerechten der Abstand zwischen den Parallelen unverändert bleibt, während in der senkrechten Richtung alle Abstände einheitlich gestreckt sind.

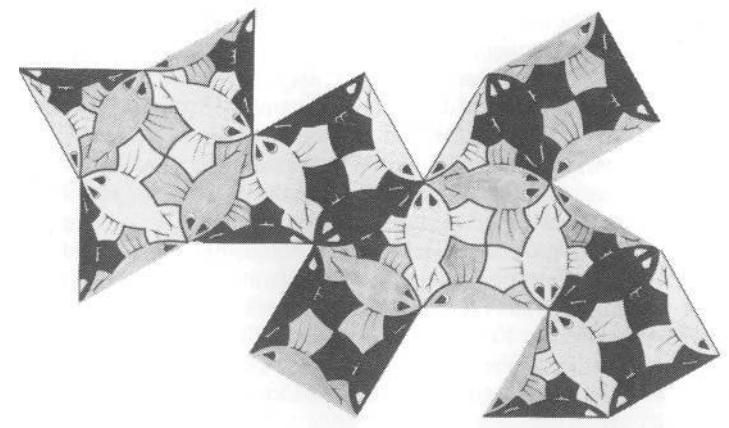


Abb. 29 Das Fischmuster auf dem Kubo-Oktaeder kommt bei der Kolorierung mit nur drei Farben aus. Jede der hier eingesetzten Farben (Weiß, Grau und Schwarz) wird genau für je acht der insgesamt vierundzwanzig Fische auf dem Kubo-Oktaeder verwendet.

EINZELHEITEN

ZU DEN MODELLEN

DIE GEOMETRISCHEN KÖRPER

Das Tetraeder

Die Zeichnung *Reptilien* bot sich natürlicherweise für die Oberfläche des Tetraeders an. Verbindet man die Zentren der sechsfachen Rotationssymmetrien, so ergibt sich ein Gitter aus gleichseitigen Dreiecken. (Ein Dreieck wird in Abb. 30a gezeigt.) Werden vier Teile dieses Gitters verwendet, erhält man das Netz eines Tetraeders, bei dem sowohl Farbgebung als auch Umrißlinien passend zusammenstoßen; die Rotationszentren des ebenen Musters werden zu Zentren der Drehsymmetrie des ganzen Körpers. Bei einer Drehachse, welche die Mitte einer Dreiecksfläche mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt verbindet (Abb. 30b), bringt eine 120° -Drehung den Körper mit sich selbst zur Deckung. Da man diese Drehung dreimal ausführen kann, bis sich der Körper wieder in der Ausgangslage befindet, heißt sie dreifache Rotationssymmetrie des Tetraeders; dabei kann man drei Reptilien im Schnittpunkt Achse/Oberfläche laufen sehen. Der Mittelpunkt jeder Kante des Tetraeders ist Drehzentrum einer zweifachen Rotationssymmetrie der ebenen Zeichnung und des gesamten Tetraeders; die entsprechende Achse im Tetraeder verbindet die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Kanten (Abb. 30c).

Das Oktaeder

Die periodische Zeichnung, welche die *Drei Elemente* - Erde, Wasser und Luft - zeigt (Abb. 18), verwendete Escher, als er mit der Oberflächengestaltung bei dreidimensionalen Formen experimentierte. Jedes Motiv füllt annähernd einen Rhombus aus zwei verbundenen gleichseitigen Dreiecken. Die Maße der Rhomben lassen sich so verändern, daß diese eine Facette des rhombischen Dodekaeders ergeben. Auf diese Weise veränderte Escher den ebenen Entwurf und erzielte eine vollständige Bedeckung des zwölfblättrigen Körpers (Abb. 20). Ein Prisma konnte er ebenfalls mit dieser Zeichnung versehen.

Auf Anregung von C. V. S. Roosevelt, einem begeisterten Sammler seines Werkes, fertigte Escher im Jahre 1963 einen detaillierten Entwurf und eine Modellkugel für den japanischen Handwerker Masatoshian, der nach diesen Vorgaben eine kleine Elfenbeinkugel schnitzte (Abb. 31).

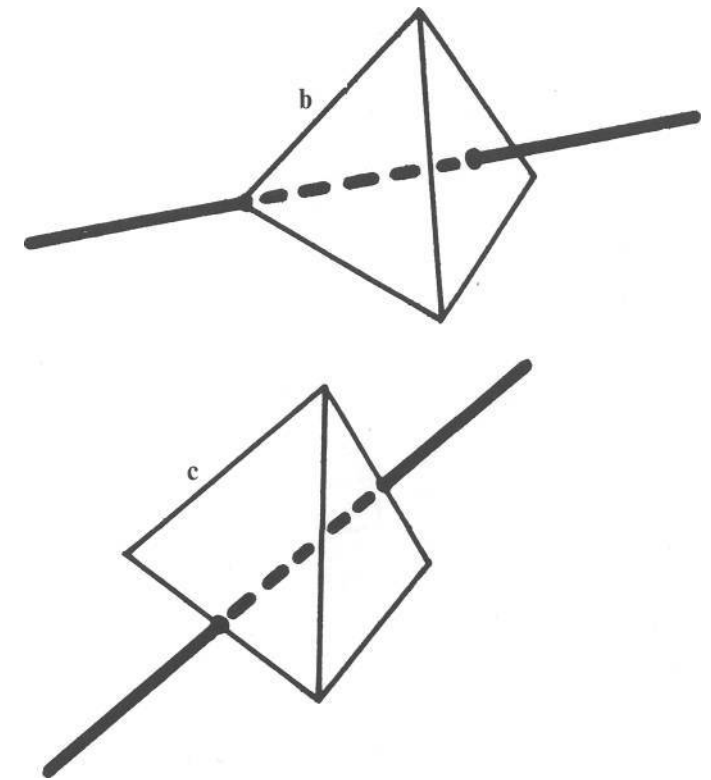
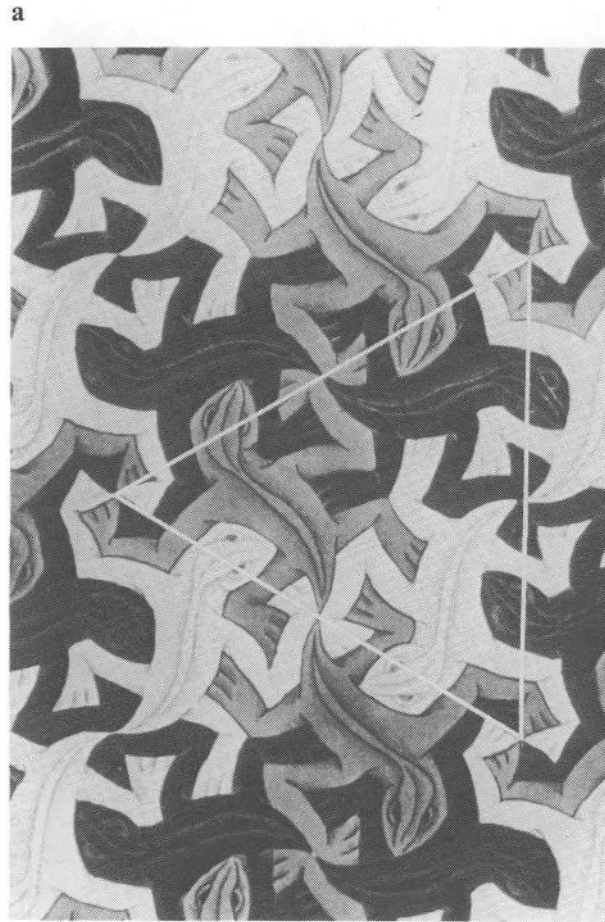


Abb. 30 (a) Periodische Zeichnung 56; XI1942. Reptilien, (b) Eine Achse der dreifachen Rotationssymmetrie, (c) Eine Achse der zweifachen Rotationssymmetrie.

Der ebene Entwurf von *Drei Elemente* eignet sich offensichtlich am besten für die Oberfläche eines Oktaeders. Bei der Übertragung sind keine Veränderungen erforderlich. Jedes gleichseitige Dreieck enthält die verschränkten Hälften der drei Motive und kann die Außenfläche des Oktaeders bilden (Abb. 31d). Insgesamt zwölf Einzelmotive - vier von jeder Sorte - bedecken das Oktaeder. Die vier Wiederholungen eines Motivs liegen rund um das Oktaeder auf einem quadratisch angeordneten Weg, der über einige Kanten führt.

Umhüllt man das Oktaeder mit einer Kugel und projiziert, vom Mittelpunkt ausgehend, die Oktaederoberfläche auf

die Kugeloberfläche, so erhält man den Entwurf der Elfenbeinkugel. Der erwähnte quadratische Weg wird dabei zu einem Großkreis auf der Kugel.

Escher war sehr genau bei der farblichen Gestaltung der geschnitzten Elfenbeinkugel. Er versah seinen Entwurf mit Mustern der drei Farben, die er bei der fertigen Kugel verwendet sehen wollte. Unsere Version des Oktaeders mit der Zeichnung *Drei Elemente* entspricht Eschers Wunsch für die Kugel. Man beachte, daß diese Farbgebung von der des ebenen Entwurfs abweicht. Eschers ursprüngliche Farbgebung haben wir bei der Gestaltung des sechseckigen Kaleidozyklus mit derselben Zeichnung verwendet.

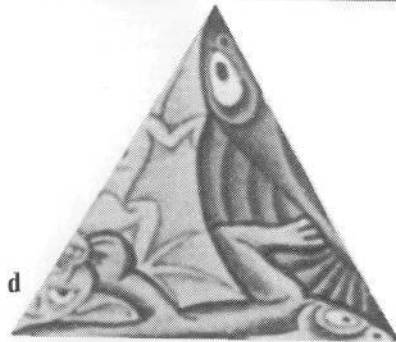
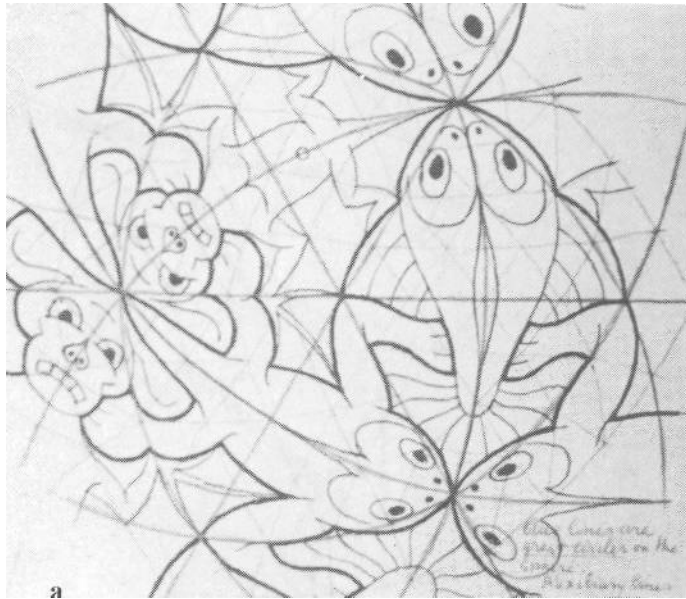


Abb. 31 (a) Eschers Anweisungen und (b) das plastische Modell für die geschnittene Elfenbeinkugel (c) mit der *Dreielemente-Zugschnung*. Das sphärische Dreieck, welches die Hälfte jedes Motivs umfaßt, ist klar erkennbar. Das Dreieck entsteht durch die Projektion einer Außenfläche des Oktaeders (d) auf die Oberfläche der umhüllenden Kugel. Photo: (b) National Gallery of Art, Washington, D. C., Schenkung von Mr. C. V. S. Roosevelt.

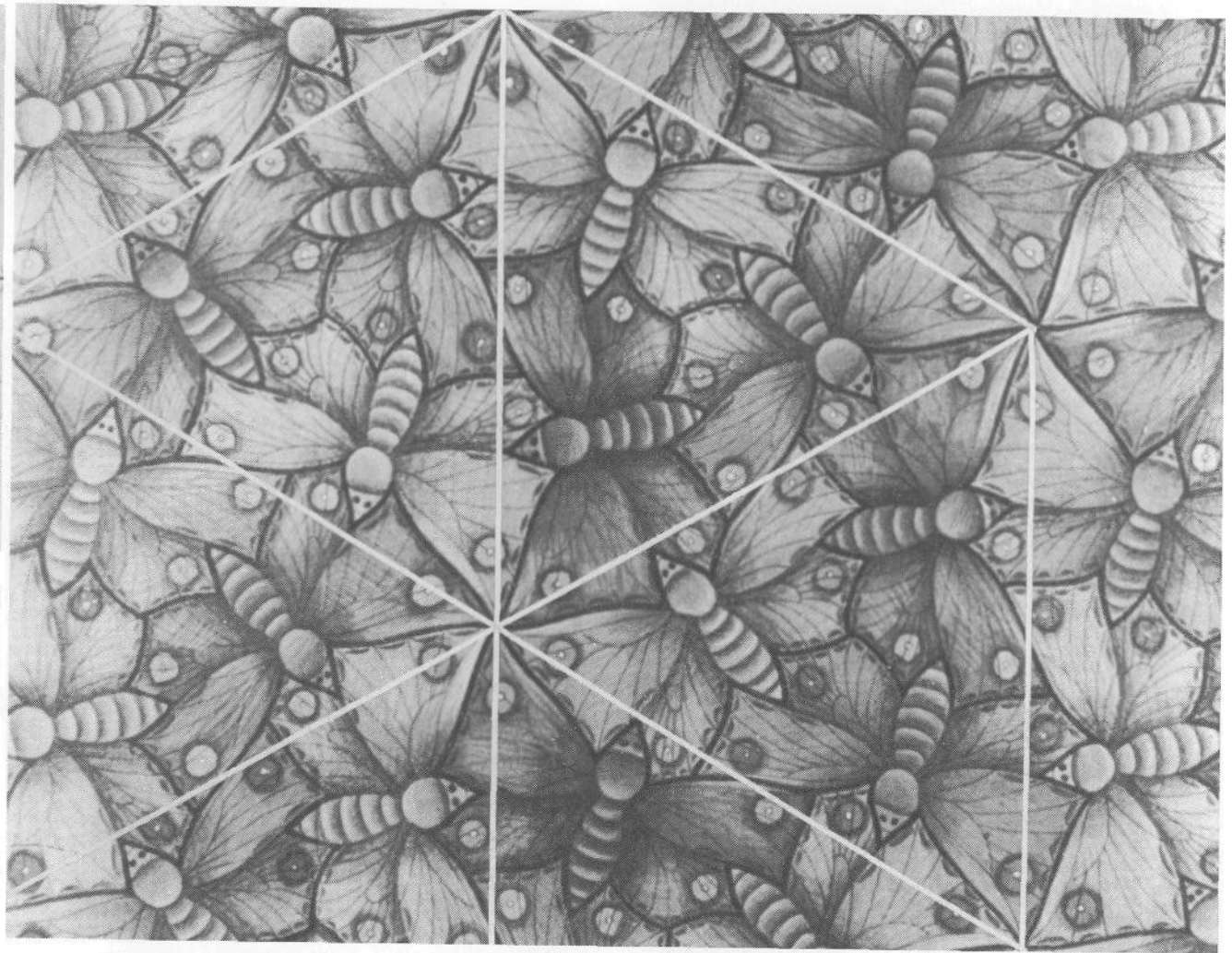


Abb. 32 Periodische Zeichnung 70; III 1948. Schmetterlinge. Rosa und grüne Schmetterlinge wechseln sich ab rund um das Zentrum der sechsfachen Rotationssymmetrie. Zwei Farben genügen, um diesen Teil der Zeichnung in der Ebene nach den Regeln für Landkarten zu kolorieren. Wird dieser Entwurf auf die Oberfläche eines Ikosaeders übertragen, muß ein Schmetterling herausgeschnitten werden; das Zentrum der Drehung wird dann zu einem Eckpunkt. An dem Eckpunkt liegen dann zwei gleichfarbige Schmetterlinge nebeneinander. Damit benachbarte Motive unterschiedliche Farben bekommen, muß man bei diesem Entwurf auf dem Körper vier Farben verwenden.

Das Ikosaeder

Eschers periodische Zeichnung mit dem Motiv der Schmetterlinge (Abb. 32) hat eine sehr komplizierte und ausgeklügelte Kolorierung. Jedes Muster, in dem Zentren einer sechsfachen Drehung vorkommen, läßt sich auf die Oberfläche eines Ikosaeders übertragen, doch der schöne Schmetterlingsentwurf war eine besondere Herausforderung. In der ebenen Zeichnung genügen drei Farben, um benachbarte Einzelmotive zu unterscheiden; Escher verwendete eine Färb Verteilung, bei der jeweils zwei Farben rund um die Rotationszentren abwechselnd auftreten. (Es sind die Punkte, an denen sechs Flügelspitzen zusammen treffen.) Das Fehlen der jeweils dritten Farbe hebt Escher hervor, indem er sie für die Zeichnung auf den Flügeln ver-

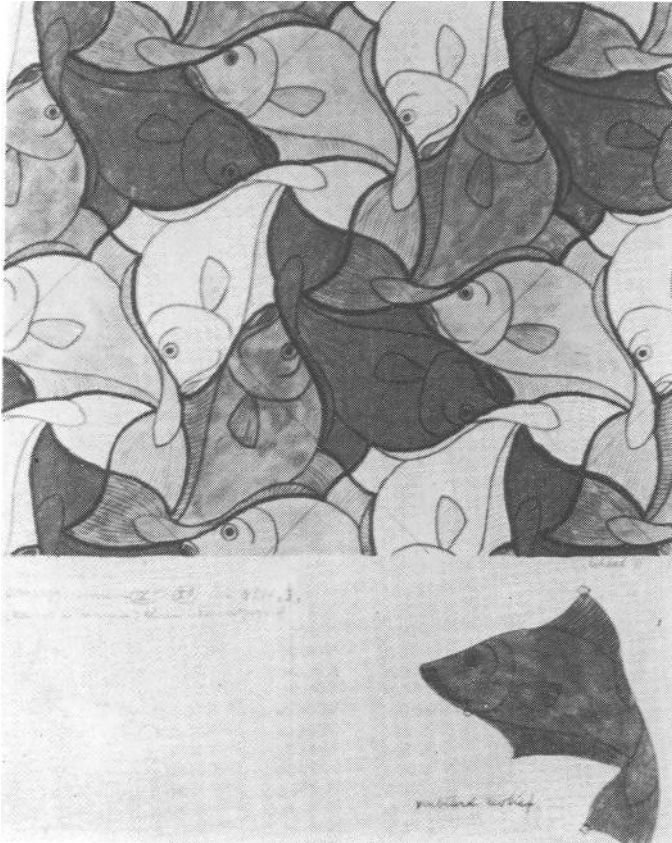


Abb. 33 Periodische Zeichnung 20; III1938. Fisch.

wendet: Jeder Schmetterling, der um ein Drehzentrum schwirrt, trägt sie als kleinen Kreis auf den Flügeln. Das Netz des Ikosaeders läßt sich aus den gleichseitigen Dreiecken, die ein Gitter der ebenen Zeichnung bilden, zusammensetzen; bei dieser Vorgehensweise werden die Rotationszentren zu Eckpunkten des Ikosaeders. Also sind auf der Körperoberfläche nur fünf der sechs Schmetterlinge um diesen Punkt gruppiert. Die Verteilung der Farben mußte geändert werden, um benachbarte Schmetterlinge durch unterschiedliche Farben abzugrenzen.

Es ist leicht einsehbar, daß unter dieser Bedingung auf der Körperoberfläche vier Farben notwendig sind. Ein interessantes Ziel war, die neue Kolorierung so ausgewogen wie möglich zu gestalten. Vielleicht erscheint die erreichte Farbverteilung ein wenig beliebig, sie hält jedoch eine außergewöhnliche Balance: Rund um jeden Eckpunkt des

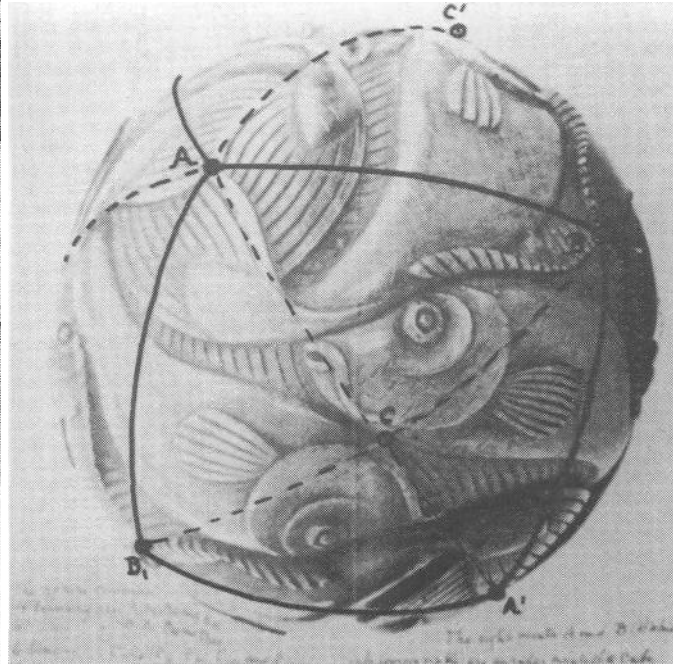


Abb. 34 Eschers Anweisungen für das Schnitzen einer Elfenbein-Kopie seiner hölzernen *Kugel mit Fisch*. Die eingezeichneten Umrißlinien auf dem Photo der Holzkugel zeigen die Projektion einer Würfelseite unseres Modells Nr. 4. Escher notierte zu dem Photo: „Die acht Punkte A und B (von denen nur vier sichtbar sind) bilden die Eckpunkte eines Würfels.“

Körpers werden drei der insgesamt vier Farben verwendet. Jede mögliche Kombination, bei der zwei Farben doppelt und die dritte nur einmal verwendet wird, tritt an einem Eckpunkt auf. (Zum Beispiel gibt es mit den drei Farben Grün, Blau und Rosa genau drei Möglichkeiten, eine Ecke des Körpers zu kolorieren: (1) zweimal Grün, zweimal Blau, einmal Rosa; (2) zweimal Grün, zweimal Rosa, einmal Blau; (3) zweimal Blau, zweimal Rosa, einmal Grün.) Außerdem ist es auch noch eine gerade Farbverteilung, das heißt hier: Auf der Körperoberfläche sind sechzig Schmetterlinge zu sehen, von jeder Farbe genau fünfzehn Exemplare. Das Ikosaeder war das einzige Modell, bei dem eine zusätzliche Farbe verwendet werden mußte. Escher hatte Grün, Blau und Rosa für den ebenen Entwurf ausgewählt. Für die Lösung des Problems der Farbverteilung auf dem Körper wurde die Farbe Gelb hinzugenommen.

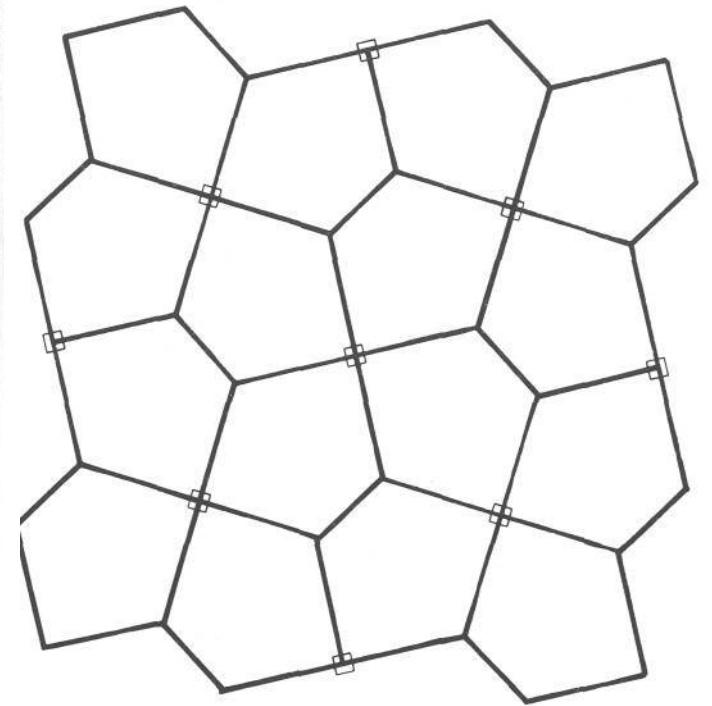


Abb. 35

Da unser Modell *Der Würfel* in einer direkten Beziehung zu Eschers *Kugel mit Fisch* steht, kann es als Zwischenstation bei der Umwandlung einer Parkettierung der Ebene (Abb. 33) in eine regelmäßige Aufteilung der Kugeloberfläche angesehen werden. Mit einer einzigen Fliesenart des Fischmotivs bedeckt man die Ebene in einem Muster, das zwei verschiedene Zentren vierfacher Drehsymmetrien enthält: Vier Fische wirbeln um den Punkt, an dem die Schwanzflossen zusammentreffen, und vier (andere) Fische drehen sich um den Punkt, an dem sich die Rückenflossen berühren. Escher hat die Symmetriezentren an dem einzeln gezeichneten Fisch mit kleinen Quadraten gekennzeichnet. In der Ebene bilden die Verbindungen der Drehzentren ein Gitter aus Quadraten, aus dem sich das Netz des Würfels herauslösen läßt. Faltet man den so erhaltenen Würfel zusammen, sieht man, daß er die Bilder von zwölf einzelnen Fischen trägt: Um jede Ecke drehen

sich drei Fische. Ließe sich der Würfel zu einer Kugel aufblasen, so würde er zu Eschers *Kugel mit Fisch*. Möglicherweise hat Escher auf diese Weise seine geschnittene Holzkugel entworfen. Zu den Planskizzen (Abb. 34) für ein kleines Elfenbeinreplik (Abb. 22) machte Escher die Bemerkung, daß die Mittelpunkte der dreifachen Symmetrie sich an den Berührungsstellen eines der Kugel einbeschriebenen Würfels (mit der Kugel) befinden.

In seinem Skizzenheft notiert Escher über die Zeichnung mit dem Fischmotiv, daß es möglich sei, dieses Muster mit drei Farben entsprechend den Regeln für Landkarten zu kolorieren. Er verwendete jedoch vier Farben, damit die Symmetrie der Zeichnung deutlicher hervortritt. Auf der Würfeloberfläche verlangt dieses Muster vier Farben. Eschers geschnittene Kugel ist nicht koloriert, darum haben wir auch für den Würfel keine Farben ausgewählt. Sie sind eingeladen, folgendes Farbenproblem selbst zu lösen: Verteilen Sie die Farben auf dem Würfel unter folgenden Bedingungen: (1) Jeder Fisch hat eine Farbe. (2) Benachbarte Fische haben verschiedene Farben. (3) Genau vier Farben werden verwendet. (4) Jede Farbe kommt bei genau drei der zwölf Fische vor. (Doch, das ist möglich! Wir haben für Sie eine kleine Kopie des Würfelmusters abgebildet, an der Sie die Möglichkeiten ausprobieren können.) Mit der Lösung der Aufgabe erhalten Sie ein Beispiel für eine gerade Farbverteilung (nach den Regeln für Landkarten) auf einer Kugeloberfläche. Bei diesem Beispiel sind vier Farben erforderlich.

Das Dodekaeder

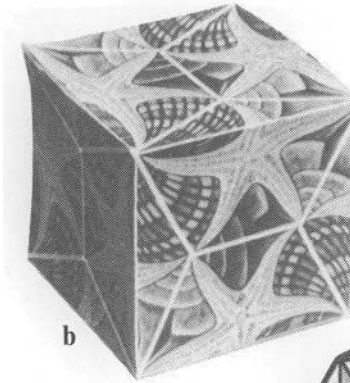
Die Ebene läßt sich nicht in regelmäßige Fünfecke zerlegen - zwischen den einzelnen Flächenstücken gibt es immer unbedeckte Stellen. Wie sollte unter diesen Voraussetzungen das Dodekaeder mit einer zyklischen Flächenaufteilung versehen werden? Eins der bevorzugten Muster war für Escher die Parkettierung durch kongruente Fünfecke, wie sie in Abbildung 35 zu sehen ist. Da bei den Fünfecken nicht alle Winkel übereinstimmen, sind sie nicht regelmäßig. In der Zeichnung sind die Zentren der vierfachen Drehsymmetrien markiert; die Verbindungslinien dieser Zentren bilden ein Netz aus Quadraten. Sechs passend zusammenhängende Quadrate lassen sich zu einem Würfel zusammenfalten.

Die periodische Zeichnung *Muscheln und Seesterne* beruht auf der Fünfeck-Parkettierung; in jedem der unregelmäßigen Fünfecke ist ein Seestern abgebildet (Abb. 36a). Damit sich die Zeichnung auf die Oberfläche eines Dodekaeders übertragen läßt, haben wir sie zuerst auf einem Wür-

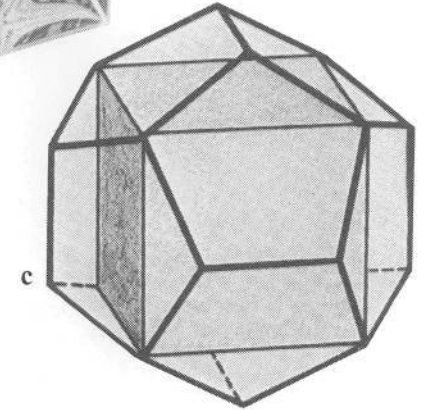


a

Abb. 36 Die Vorgehensweise bei der Bedeckung des Dodekaeders mit der *Muscheln-und-Seesterne-Zeichnung*. (a) Periodische Zeichnung 42; VIII1941. *Muscheln und Seesterne* (Das Netzwerk aus Fünfecken, das der Zeichnung zugrunde liegt, wird von der Würfeloberfläche nach außen auf die Oberfläche des umhüllenden Dodekaeders (c) projiziert.



b



c

fei angebracht (Abb. 36b). Bei genauer Betrachtung des von Fünfecken bedeckten Würfels macht man zwei aufregende Beobachtungen, die Hinweise zur Lösung des ursprünglichen Problems geben. Erstens umfaßt die Zeichnung auf der Würfeloberfläche genau zwölf Fünfecke - das Dodekaeder hat zwölf fünfeckige Außenflächen. Zweitens weiß man, daß sich dem Dodekaeder ein Würfel einbeschreiben läßt, so daß jede Würfelkante unter einer Außenfläche des Dodekaeders liegt und jede Ecke des Würfels zugleich Eckpunkt des Dodekaeders ist (Abb. 35c). Die Umrißlinien der Fünfecke erscheinen auf dem Würfel so, als ob sie die Projektionen der Kanten des Dodekaeders wären. Der Würfel aus Abbildung 36b wurde also mit einem passenden Dodekaeder umhüllt, dann war nur noch das Muster auf die Flächen des Dodekaeders zu projizieren. Auf diesem Wege wurde das Muster beibehalten (obwohl es zu regelmäßigen Fünfecken verformt wurde) und zur durchgängigen Oberflächengestaltung des ungewöhnlichsten Platonischen Körpers verwendet.

Das Kubo-Oktaeder

Es gibt viele Möglichkeiten, einen Boden fugenlos mit gleichseitigen Dreiecken und Quadraten zu fliesen. Drei Dreiecke und zwei Quadrate können auf genau zwei Arten um einen Punkt herum angeordnet werden (Abb. 37). In jeder beliebigen Verteilung, die sowohl Dreiecks- als auch Quadratfliesen verwendet, muß mindestens eine dieser Anweisungen auftreten. Es gibt nur ein Blatt in Eschers Skizzenbuch, das eine Dreiecks- und Quadratparkettierung mit demselben Fischmotiv zeigt. Bei dem Versuch, beide Flächenformen in einer Parkettierung zu verwenden, stellt man fest, daß bei beiden Anordnungen von Quadraten und Dreiecken die Fischmotive an einer Kante nicht zusammenpassen (Abb. 39). (Es liegt an der ungeraden Anzahl von Fliesen, die um einen Punkt gelegt werden müssen.) Das ebene Netz eines Kubo-Oktaeders läßt sich jedoch so aus der Parkettierung herauslösen, daß die störende Fliese an jedem Eckpunkt entfällt. Beim Zusammenfalten ergibt sich dann ein zusammenpassendes Muster auf der Körperoberfläche.

Kreislimit III (Abb. 23) stellt Eschers Lösung dar, eine Kombination dieser Fliesen dreidimensional abzubilden. Er hat sie auf dem Weg mathematischer Berechnungen verformt und damit erreicht, daß eine nichteuklidische Ebene mit einer geraden Anzahl von Fliesen an jedem Kreuzungspunkt ausgefüllt wurde; somit passen die Motive der einzelnen Fliesen aneinander.

Das periodische Fischmuster mit quadratischen Einzelflächen erfordert nur zwei Farben; für das Muster aus Dreiecken benötigt man drei Farben. Die Kombination beider Aufteilungen in *Kreislimit III* hat Escher vierfarbig koloriert. Die Regeln für landkartengerechte Farbverteilung hätten das hier nicht erfordert, doch ästhetische Gründe bewogen ihn, die „Verkehrsströme“ der Fische farbig zu betonen. Entlang der kreisförmigen Bahnen in dem Muster haben alle Fische die gleiche Farbe, die umgebenden Fische sind farblich unterschieden; darum waren vier Farben notwendig. Das Fischmuster auf dem Kubo-Oktaeder kann in vielen gefälligen Variationen koloriert werden, von denen jede die Regeln für Landkartenfarben erfüllt sowie alle Farben gleich häufig verwendet. Man braucht aber mindestens drei Farben. Eine mathematisch ausgewogene Version mit drei Farben ist in Abbildung 40 zu sehen. Bei dieser Farbverteilung zeigt jede Dreiecksfliese alle drei Farben; in den Quadraten treten immer nur zwei Farben auf. Jede Farbe wird bei genau acht von vierundzwanzig Fischen verwendet.

Folgt man Escher und verwendet vier Farben für dieses Muster, ergeben sich zwei interessante Farbverteilungen. Man kann sich entscheiden, die Betonung der „Verkehrsströme“ wie in *Kreislimit III* zu gestalten. Auf der Oberfläche des Kubo-Oktaeders gibt es vier natürliche sechseckige Wege, die über sechs benachbarte Kanten um den Körper herumführen. Nimmt man diese Wege und gibt allen Fischen auf einem Pfad dieselbe Farbe, so liegen die Farben für alle vierundzwanzig Fische fest; je sechs Fische haben eine gemeinsame Farbe. Auf den Quadraten findet man jedes mögliche Arrangement aus vier Farben, auf den Dreiecken ist jede mögliche Auswahl von drei Farben ringförmig um den Körper zu sehen.

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, eine gerade Farbverteilung zu wählen, bei der die quadratischen Außenflächen nur zwei und die dreieckigen drei Farben tragen - genau wie bei der Farbverteilung in *Kreislimit III*. Diese Möglichkeit haben wir für unser Modell ausgesucht. Optisch steht sie der Farbgebung des zweidimensionalen Drucks am nächsten.

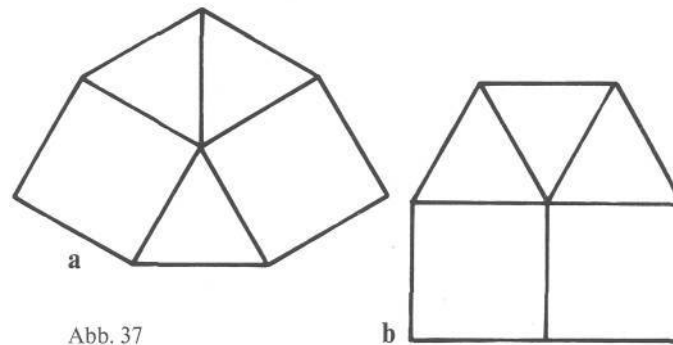


Abb. 37

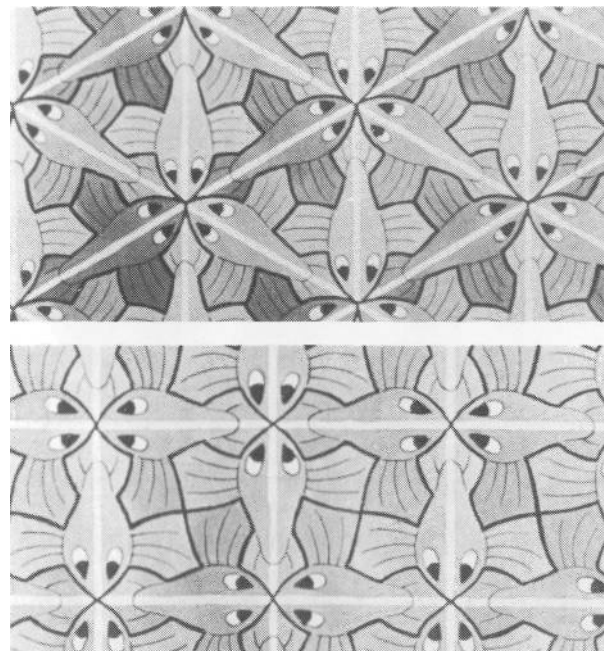


Abb. 38 Periodische Zeichnungen 122 (a) und 123 (b); IV 1964. Studien zu *Kreislimit III*.

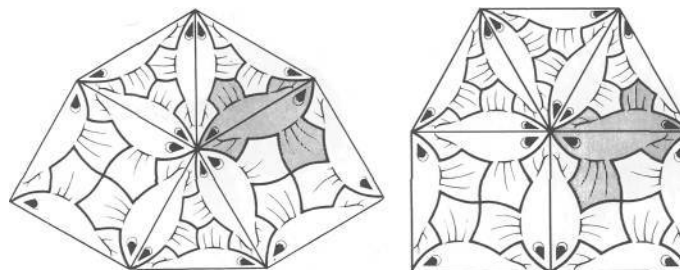


Abb. 39 Quadratische und dreieckige Fliesen können eine Ebene ausfüllen; doch Eschers Flächenstücke mit dem Fischmotiv passen nicht in eine solche Parkettierung.

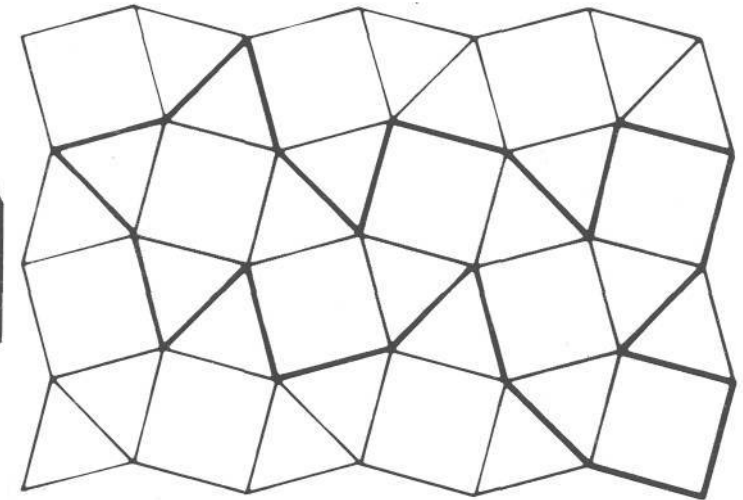


Abb. 40 Das Netz eines Kubo-Oktaeders läßt sich aus einer regelmäßigen Flächenaufteilung heraustrennen; man erhält auf dem dreidimensionalen Körper ein zusammenpassendes Design mit dem Fischmotiv. Eine mathematisch ausgewogene Flächenverteilung, bei der nur drei Farben notwendig sind.

SECHSECKIGE KALEIDOZYKLEN

Jedem Muster, das auf diese Kaleidozyklen paßt, liegt ein Gitter aus gleichseitigen Dreiecken zugrunde. In jedem Muster gibt es Zentren dreifacher Drehsymmetrien; manche haben zusätzlich noch zweifache (also insgesamt sechsfache) Rotationssymmetrien. Manche sind spiegelsymmetrisch. Versuchen Sie, diese Muster unter den fertigen Modellen herauszufinden.

Käfer

Dieser Entwurf (Abb. 41) sieht beinahe abstrakt aus und wirkt aus einem Abstand wie ein üppiges Stoffmuster. Erst eine nähere Betrachtung zeigt die verschränkten Käfer. Jedes Dreieck wie das eingezeichnete füllt eine dreieckige Außenfläche des Kaleidozyklus. Der Mittelpunkt jedes Dreiecks ist Zentrum einer dreifachen Drehsymmetrie; die Kanten sind Spiegelungsachsen des Musters. Wenn man den fertigen Kaleidozyklus dreht, stoßen die spiegelverkehrten Bilder der Käfer aneinander; dabei erkennt man, daß der Mittelpunkt des Tetraederrings auch ein Drehzentrum für eine dreifache Symmetrie ist.

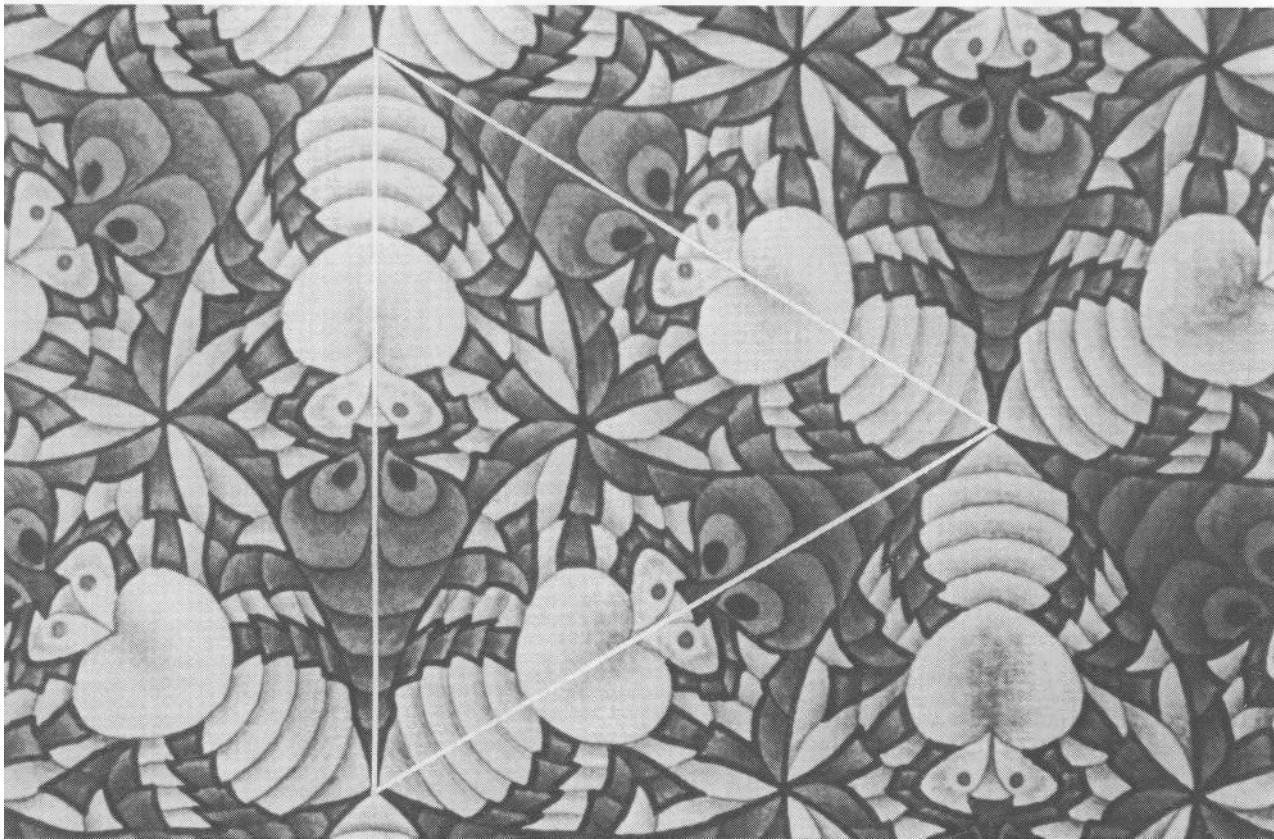


Abb. 41 Periodische Zeichnung 54; X 1942. Käfer.



Abb. 44 Ein Holzschnitt aus *Regelmäßige Flakvedelung* (Regelmäßige Flächenfüllung), 1958. Hier wird die Silhouette zu einem fliegenden Fisch. (Eschers periodische Zeichnung, die Studie zu diesem Druck, enthält die Bemerkung „Siehe Nr. 44“, der Hinweis bezieht sich auf die periodische Zeichnung der Vögel aus unserer Abbildung 17.

Fisch

Diese periodische Zeichnung (Abb. 42) hat dieselben Symmetrien wie die Zeichnung der Käfer (Abb. 41), wenn man von der Farbverteilung absieht. Wendet man die Regeln für Landkarten an, zeigt sich ihr Unterschied in der Farbverteilung: Das Käfer-Design mit zwei verschiedenen Motiven benötigt nur zwei Farben, während für das Fischmuster mit nur einem Motiv drei Farben erforderlich sind. Berücksichtigt man die Farben nicht, so läßt sich das Fischmuster aus den kleinen dreieckigen Einzelflächen der Abbildung 42a zusammensetzen. Um die dreifarbige Version auf die Oberfläche des Kaleidozyklus übertragen zu können, muß man auf die größeren Dreiecke (Abb. 42b) für die Tetraederaußenflächen zurückgreifen. In der Mitte jedes Dreiecks liegt dann das Zentrum einer dreifachen Drehsymmetrie; es ist der Schnittpunkt von drei Spiegelachsen des Musters.

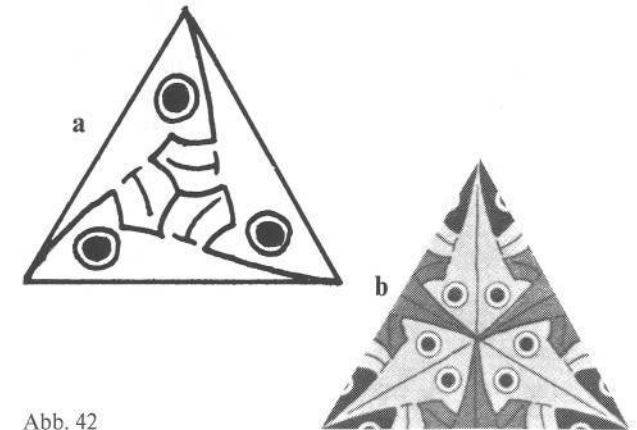


Abb. 42

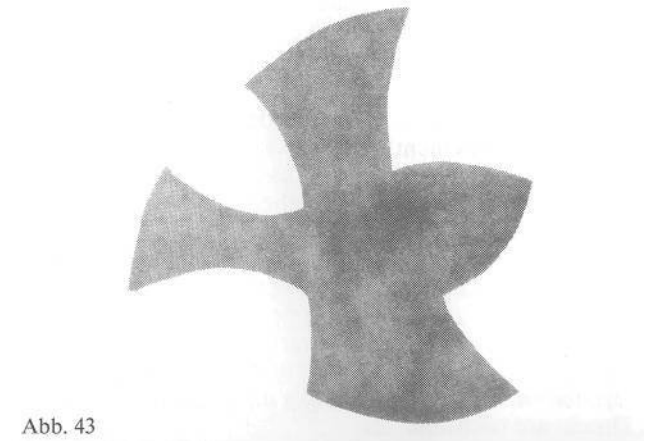


Abb. 43

Fisch-Vogel

Schauen Sie auf den Umriß in Abbildung 43. Was sehen Sie? Den Schatten eines fliegenden Vogels? Ja, doch schauen Sie noch einmal hin - mit der Phantasie eines Kindes. Es ist auch ein fliegender Fisch. Eine einzige Form, und doch können zwei Tiere diese Umrißlinie füllen. Die Fliesen dieser Form bedecken fugenlos eine Fläche, so daß das entstehende Muster abwechselnd beide Tiere zeigt (Abb. 44).

Ein Großteil der magischen Überraschungen in Eschers Werk beruht auf der Art, wie wir Umrißlinien wahrnehmen und deuten, auf der Tatsache also, daß eine Silhouette mehrere Deutungen ermöglicht. Wenn Sie den Kaleidozyklus drehen, werden Sie Zeuge einer scheinbaren, unendlich wiederkehrenden Verwandlung des Vogels in einen Fisch und des Fisches in einen Vogel. Doch würde man die Einzelheiten der Motive weglassen, bliebe nur ein durchgängiges Muster einer einzigen Fliesenform übrig.

Drei Elemente

In Eschers Zeichnung *Drei Elemente* (Abb. 18) gibt es drei verschiedene Zentren von dreifachen Drehsymmetrien. An dem einen Mittelpunkt treffen die Köpfe von drei Fischen zusammen, an dem zweiten die Köpfe von drei Echsen, am dritten die Köpfe von drei Fledermäusen (Abb. 45). Man kann dieser Zeichnung Leben verleihen, indem man die kleinen Dreiecke, die schon die Außenfläche des Oktaeders bilden (Abb. 31d) auf dem Kaleidozyklus anbringt. Wie bei einem Kaleidoskop ist bei jeder Drehung ein neues Bild zu sehen. Das Muster von drei Seiten unseres Modells läßt sich nicht auf der vierten Seite der Tetraeder fortsetzen; ein Prinzip der periodischen Muster ist mit einem Grundsatz der räumlichen Struktur nicht vereinbar: In der periodischen Zeichnung wiederholen sich die Dreiecke, die wir für die Gestaltung unseres Modells gewählt haben, in Sechserstreifen, während die Netze der Tetraeder im aufgebauten Modell die Dreiecke in Viererstreifen enthalten. Darum haben wir die vierte Seite so gestaltet, daß sie Eschers Namen zeigt.

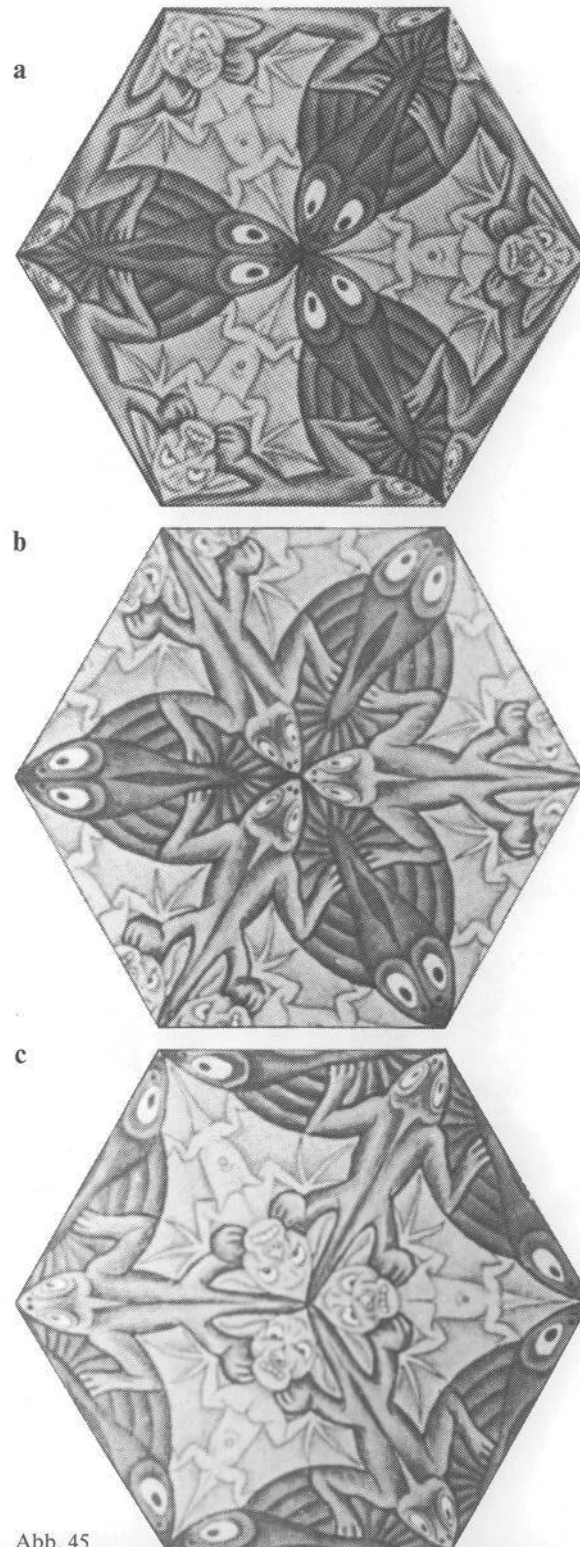


Abb. 45

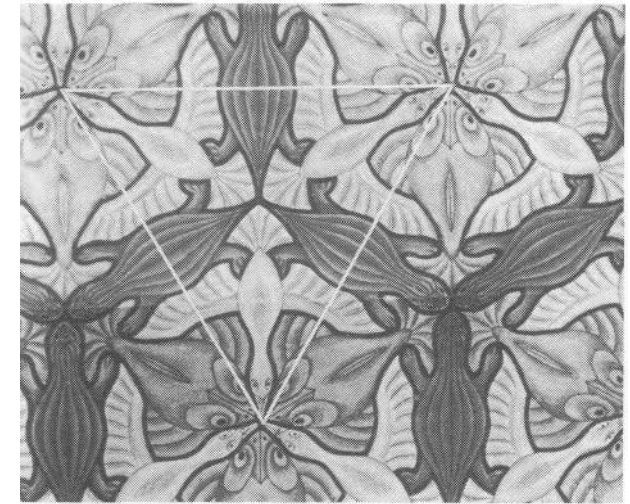


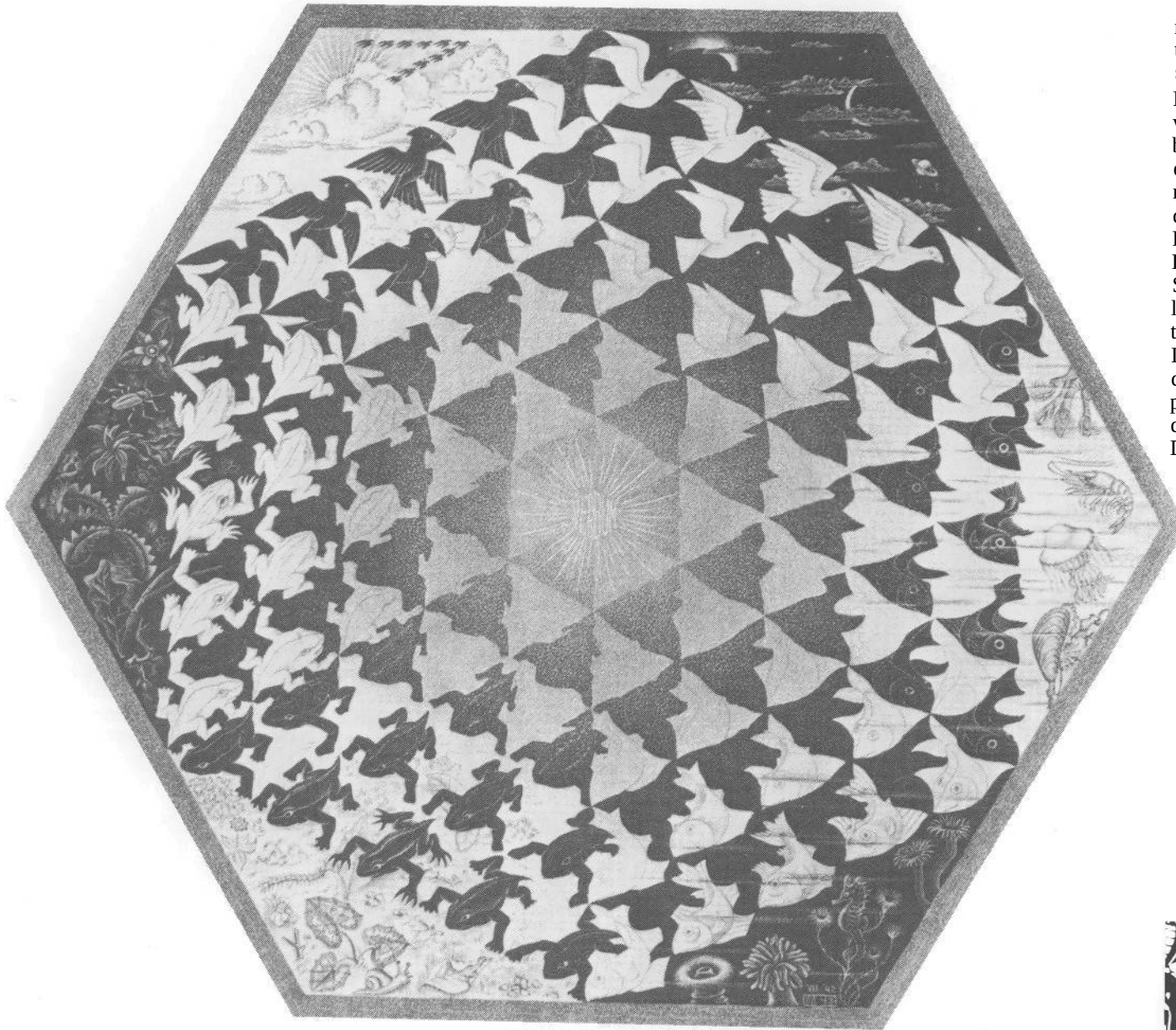
Abb. 46 Periodische Zeichnung 69; III1946. Fisch, Ente, Echse (erste Version von *Drei Elemente*).

Fisch, Ente, Echse

Für dieses Muster (Abb. 46) gilt aus mathematischer Sicht das gleiche wie für *Drei Elemente* (Abb. 18). (Die Figuren symbolisieren ebenfalls Luft, Erde und Wasser.) Man hätte dieses Muster auch in der gleichen Weise auf einem Kaleidozyklus anbringen können, doch bei diesem Entwurf haben wir uns entschieden, eine wirklich durchgängige Bedeckung der Oberfläche zu erhalten. Um das zu erreichen, haben wir ein größeres Dreieck als bei *Drei Elemente* (Abb. 31d) für die einzelnen Außenflächen des Kaleidozyklus gewählt. Die Verbindungslinien der Punkte, an denen drei Fischköpfe zusammentreffen, ergeben ein Dreieck, mit dem sich das Vorhaben erfolgreich ausführen läßt.

Verbum

Escher hat Ausschnitte aus seinen periodischen Zeichnungen sehr häufig verwendet, um Metamorphosen zu veranschaulichen. Die Lithographie *Verbum* ist eine handwerklich sehr anspruchsvoll ausgeführte Arbeit dieser Art (Abb. 47). Die ineinander übergehenden Figuren wurden erst als einfache flächenfüllende Muster skizziert (Abb. 48, 15). Dabei bilden die parallelen Reihen der Figuren ein Gitter aus gekreuzten Streifen. Als Escher diese Skizzen für *Verbum* bearbeitete, verwandte er ein subtiles mathe-



matisches Hilfsmittel, um die Themen Explosion, Evolution, wechselseitige Abhängigkeit und Kreislauf darzustellen.

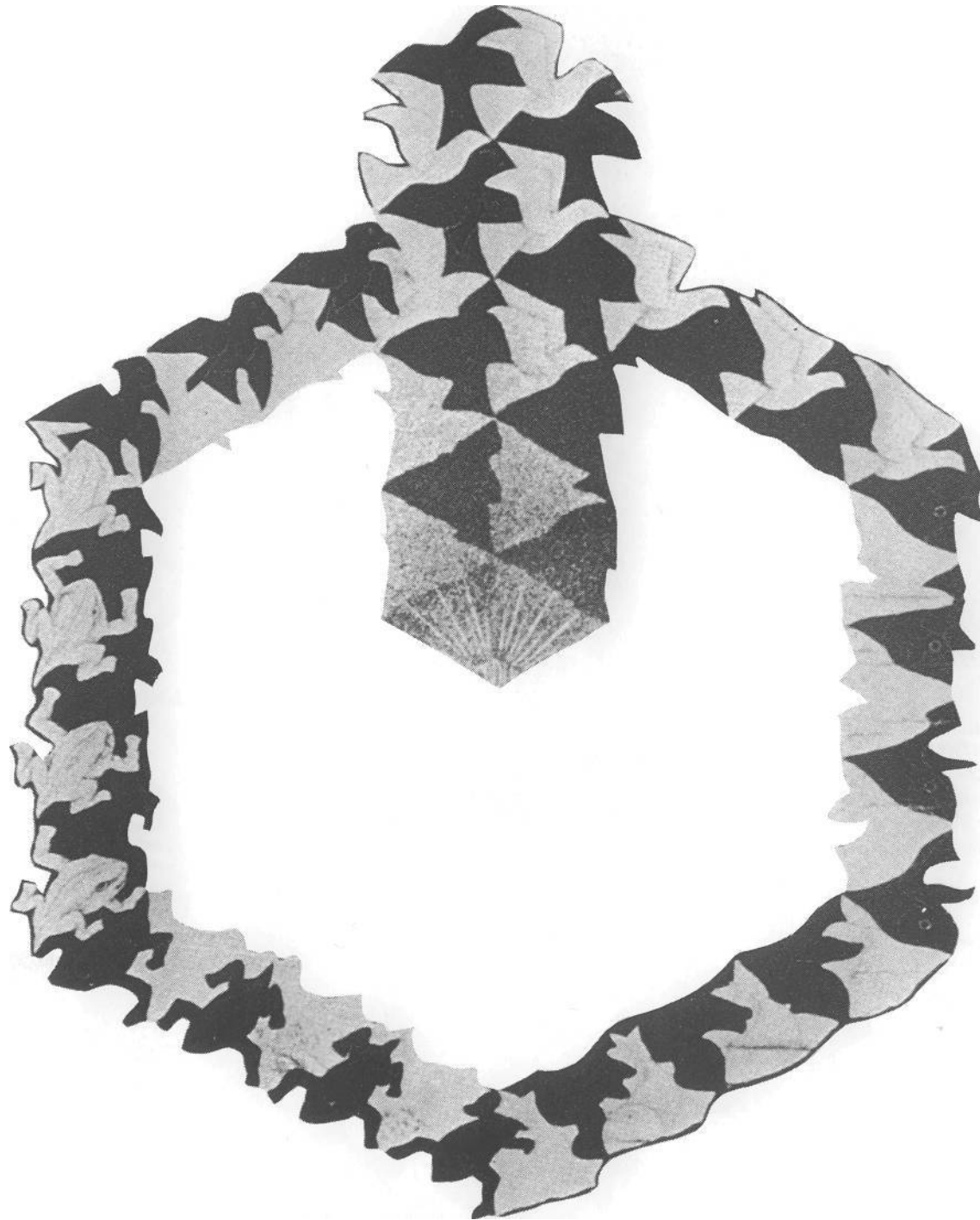
In *Verbum* sind zwei unterschiedliche Richtungen der Entwicklung erkennbar. Vom Mittelpunkt nach außen ergeben vage und ungestaltete Formen immer klarer umrissene, erkennbare Geschöpfe, die in ihre natürlichen Lebenselemente streben. In einer ringförmigen Bewegung rund um das Sechseck verwandeln sich die Geschöpfe - Vogel zu Fisch zu Frosch zu Vogel - im ökologischen Kreislauf von Luft, Wasser, Land. Dieses zweiperspektivisch angelegte System von Entwicklungen, bestehend aus radialen Strahlen und konzentrischen Kreisen, ist Mathematikern vertraut durch das System der Polarkoordinaten.

Das Bild wurde auf einem Kaleidozyklus so angebracht, daß bei jeder Drehung zum Ringmittelpunkt, mit der Explosion beginnend, eine Vervielfachung und Evolution der Geschöpfe zu sehen ist, die in der Gesamtansicht des Druckes gipfelt.



Abb. 48 Das periodische Muster des Deckblattes von *Regelmäßige Vlakteverdeling* wird in *Verbum* am oberen Rand bei der Verschränkung der Vogelmotive verwendet. Der Umschlagentwurf ist hier seitenverkehrt abgedruckt, damit die Vögel die gleiche Orientierung wie in *Verbum* haben. Siehe Abbildung 15 wegen des periodischen Frosch-Fisch-Musters.

Abb. 47 *Verbum*, Lithographie, 1942, National Gallery of Art, Washington, D. C., Schenkung von Mr. C. V. S. Roosevelt.



Zu Abb. 47 Sechseckiger Randausschnitt aus *Verbum*; ökologischer Kreislauf von Luft, Wasser und Land.

QUADRATISCHE KALEIDOZYKLEN

Jedes Muster, das für die quadratischen Kaleidozyklen verwendet wurde, beruht auf einem Netzwerk aus Quadraten, ähnlich wie bei normalem Rechenpapier. Jede Zeichnung enthält zweifache Drehsymmetrien; bei manchen treten Spiegelsymmetrien auf. Der Mittelpunkt der fertigen Kaleidozyklen ist Zentrum einer vierfachen Drehsymmetrie.

Bei jeder Drehung der Kaleidozyklen wird sich das gezeigte Bild verändern.

Muscheln und Seesterne

Wir haben über diese Zeichnung schon bei der Gestaltung des Dodekaeders gesprochen (Abb. 36a). Diesmal verbinden wir die Punkte, an denen vier gleichartige Muscheln zusammenstoßen; das ergibt ein quadratisches Gitter. Jedes Einzelquadrat läßt sich in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen, wie in Abb. 49 gezeigt. Diese Dreiecke werden als Außenflächen des Kaleidozyklus verwendet. Achten Sie auf die Veränderung der Muscheln am Mittelpunkt, wenn Sie den fertigen Kaleidozyklus drehen.

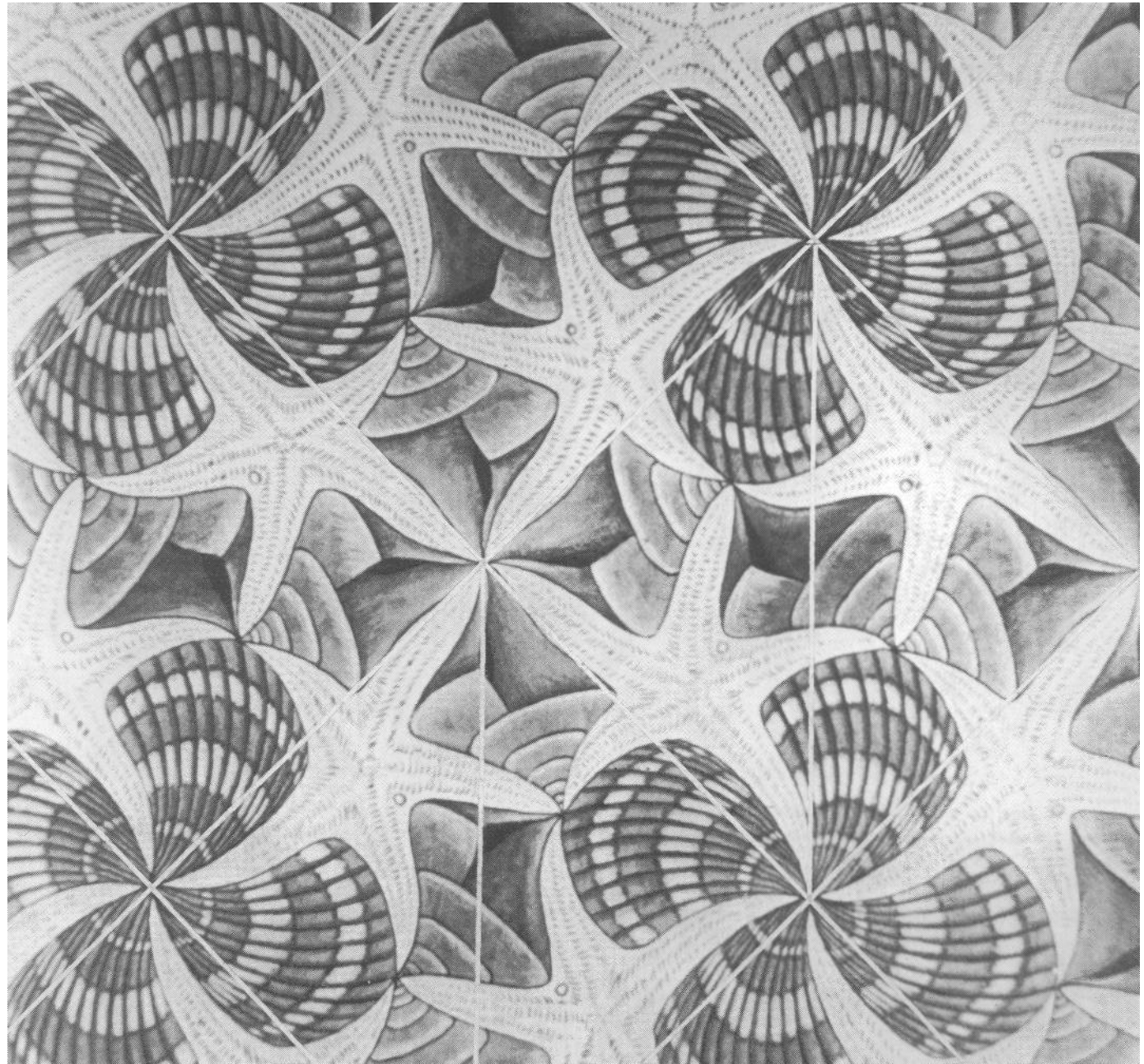


Abb. 49 Periodische Zeichnung 42; VIII1941. *Muscheln und Seesterne*.

Blumen

Die geometrische Aufteilung in Fünfecke ist deutlich sichtbar (Abb. 50). Es handelt sich um die gleichen Fünfecke wie in *Muscheln und Seesterne*, die dort allerdings nicht sichtbar sind (vergleiche Abb. 36a). Escher verwandte diesen Entwurf in der überarbeiteten und erweiterten Version der Drucke *Metamorphose* (Abb. 51, siehe *The Graphic Work of M. C. Escher*, dort ist eine Reproduktion des sieben Meter langen Originals abgebildet). Bei der Übertragung auf einen Kaleidozyklus findet eine erstaunliche Verwandlung des Entwurfs statt. Die ebene Zeichnung setzt sich aus einem roten Netz von Sechsecken zusammen, das sich rechtwinklig mit einem blauen Gitter aus Sechsecken kreuzt. Diese Überlagerung ergibt Fünfecke, die rote und blaue Kanten haben. Auf dem dreidimensionalen Kaleidozyklus jedoch hat jedes Fünfeck gleichfarbige Kanten! Mit jeder Drehung des Kaleidozyklus wechseln die Farben, und die Drehrichtung um den Mittelpunkt ändert sich.

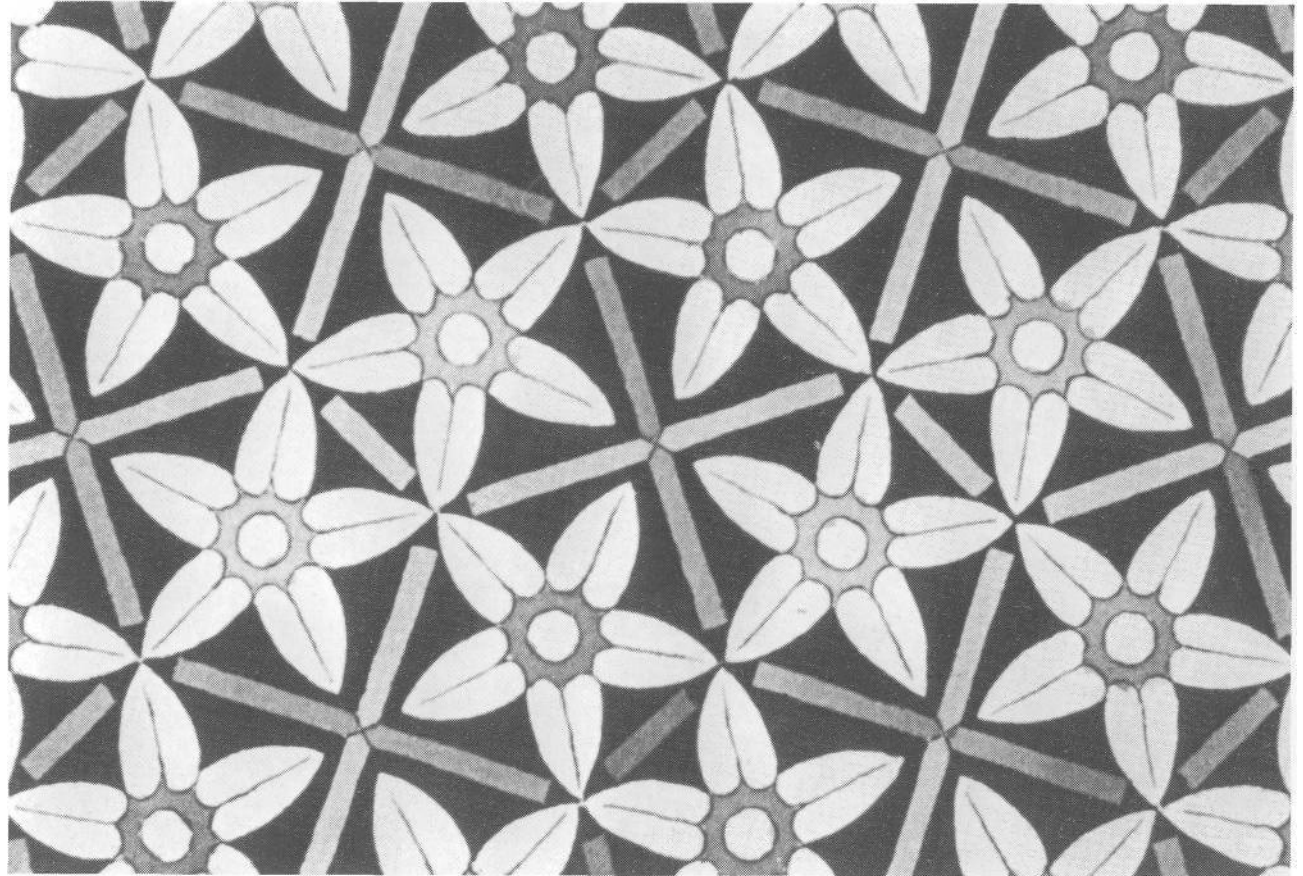
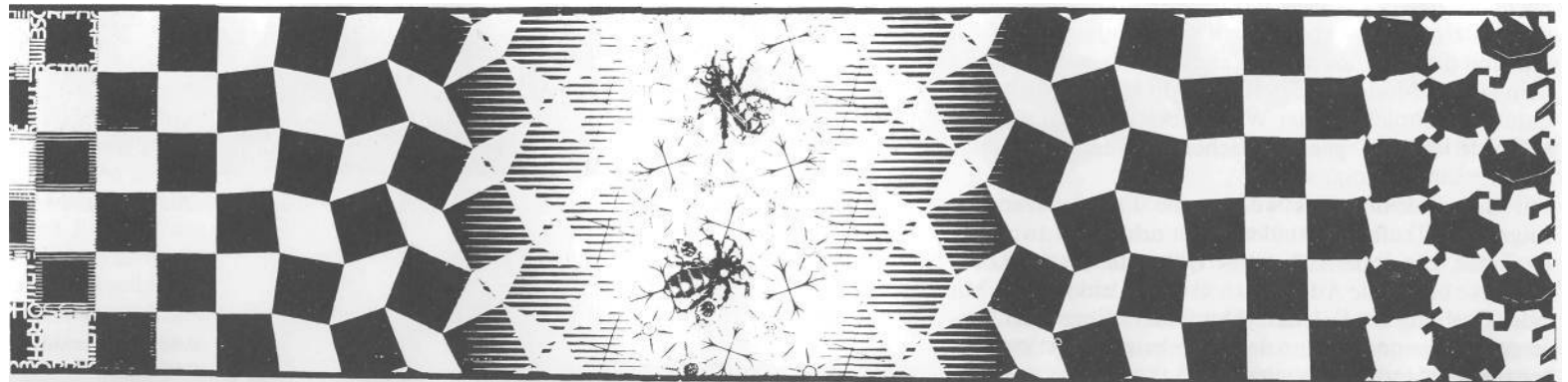


Abb. 50 Periodische Zeichnung 132; XII/1967. Blumen.

Abb. 51 Ausschnitt aus *Metamorphose*, Holzschnitt, 1939-40 und 1967-68.



Himmel und Hölle

Häufig hat Escher die Verschränkung gegensätzlicher Motive in einer Zeichnung verwendet, um zu veranschaulichen, daß es unmöglich ist, eine Sache ohne ihr Gegenteil zu verstehen. *Himmel und Hölle* ist eine solche Zeichnung. (Der Druck *Begegnung* (Abb. 14) zeigt sowohl einen Pessimisten als auch einen Optimisten.) Die periodische Zeichnung der Engel und Teufel ist nie in dieser Form als Druck erschienen. In dem hyperbolischen Mosaik *Kreisli-mit IV* findet sich eine Abwandlung des Themas; es bildet ebenfalls die Grundlage für eine Holzkugel mit dem geschnitzten Motiv von Engeln und Teufeln. (Verfährt man mit dieser periodischen Zeichnung so, wie wir es mit dem vierten Modell (Würfel) gemacht haben, erhält man durch eine Projektion der Würfeloberfläche auf die umhüllende Kugel genau Eschers *Himmel-und-Hölle*-Kugel.)

Für den Kaleidozyklus werden die Flügelspitzen der Engel und Teufel verbunden; man erhält rechtwinklige Dreiecke, die innerhalb eines Quadrats liegen. Diese Dreiecke bilden die Außenflächen des Kaleidozyklus. Mit jeder Drehung des Kaleidozyklus ändern Engel und Teufel den Drehsinn rund um den Mittelpunkt - erst im Uhrzeigersinn, dann andersherum.

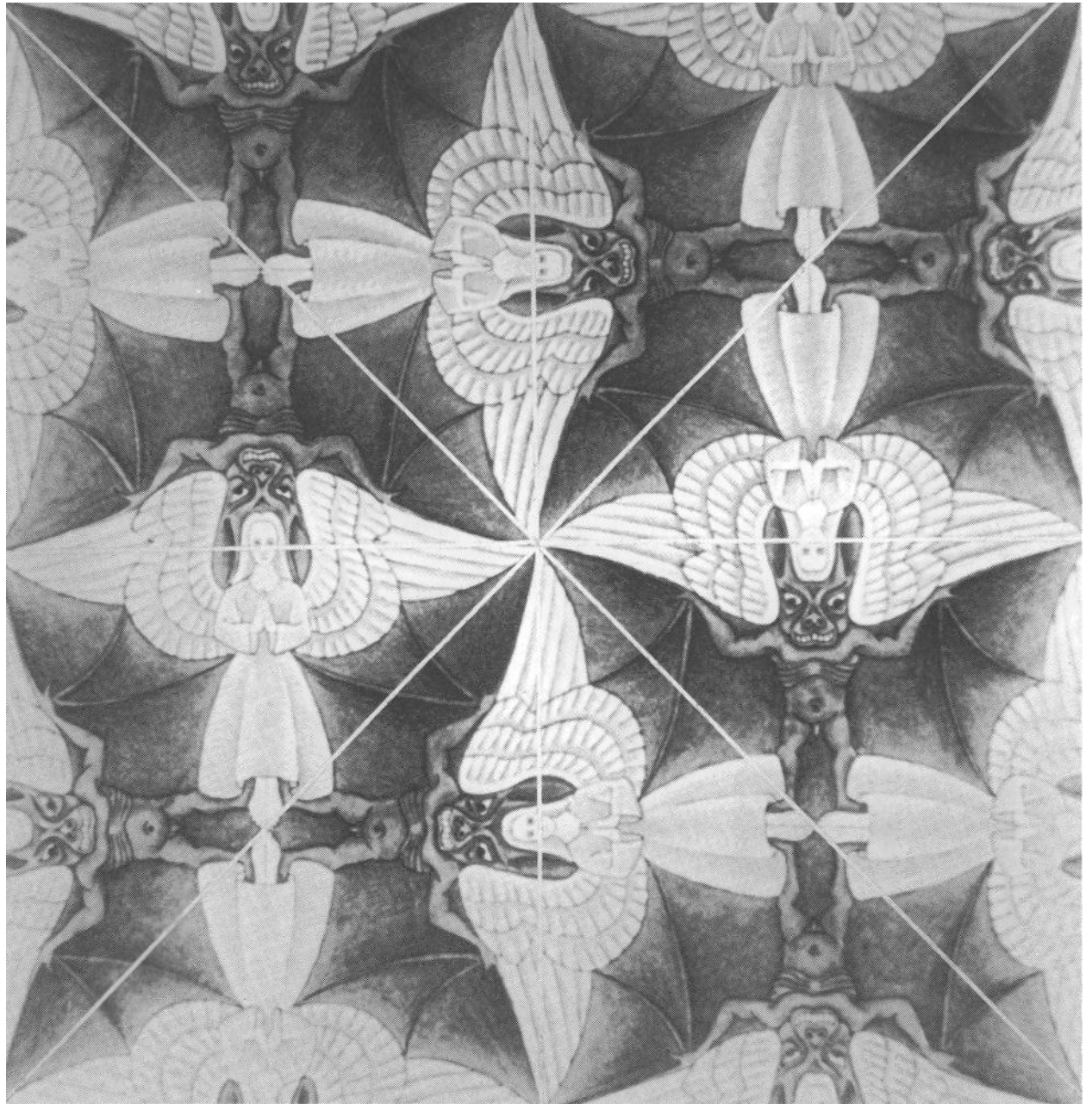


Abb. 52 Periodische Zeichnung 45; Weihnachten 1941. *Himmel und Hölle*.

Echsen

Auf den ersten Blick erscheint der Druck *Kleiner und kleiner* wie eine periodische Zeichnung mit Echsen. Eine genauere Untersuchung zeigt jedoch viele Feinheiten (nämlich immer kleiner werdende Echsen) und keine echte Wiederholung des Motivs. Dieser farbige Druck ist die Abwandlung einer Zeichnung (Abb. 16), die wirklich periodisch ist; Escher hat auch eine vierfarbige Version dieser Zeichnung entworfen (Abb. 54).

Bei der Bearbeitung für den Kaleidozyklus wählt man als quadratisches Netz der ebenen Zeichnung die Verbindungslinien der Drehzentren der vierfachen Symmetrie (wo die Köpfe von vier Echsen zusammentreffen). Diese Quadrate lassen sich in gleichschenklige Dreiecke zerlegen. Das Quadrat in Abbildung 55 enthält acht solcher Dreiecke und zeigt das fertige Modell von oben. Aus einiger Entfernung wirkt Eschers vierfarbiger Entwurf wie eine Verkettung verschiedenfarbiger Kreise. Für unser Modell haben wir eine andere Farbverteilung gewählt, die nach den Regeln für Landkarten benachbarte Motive unterscheidet und bei jeder Drehung ein neues Farbarrangement zeigt.

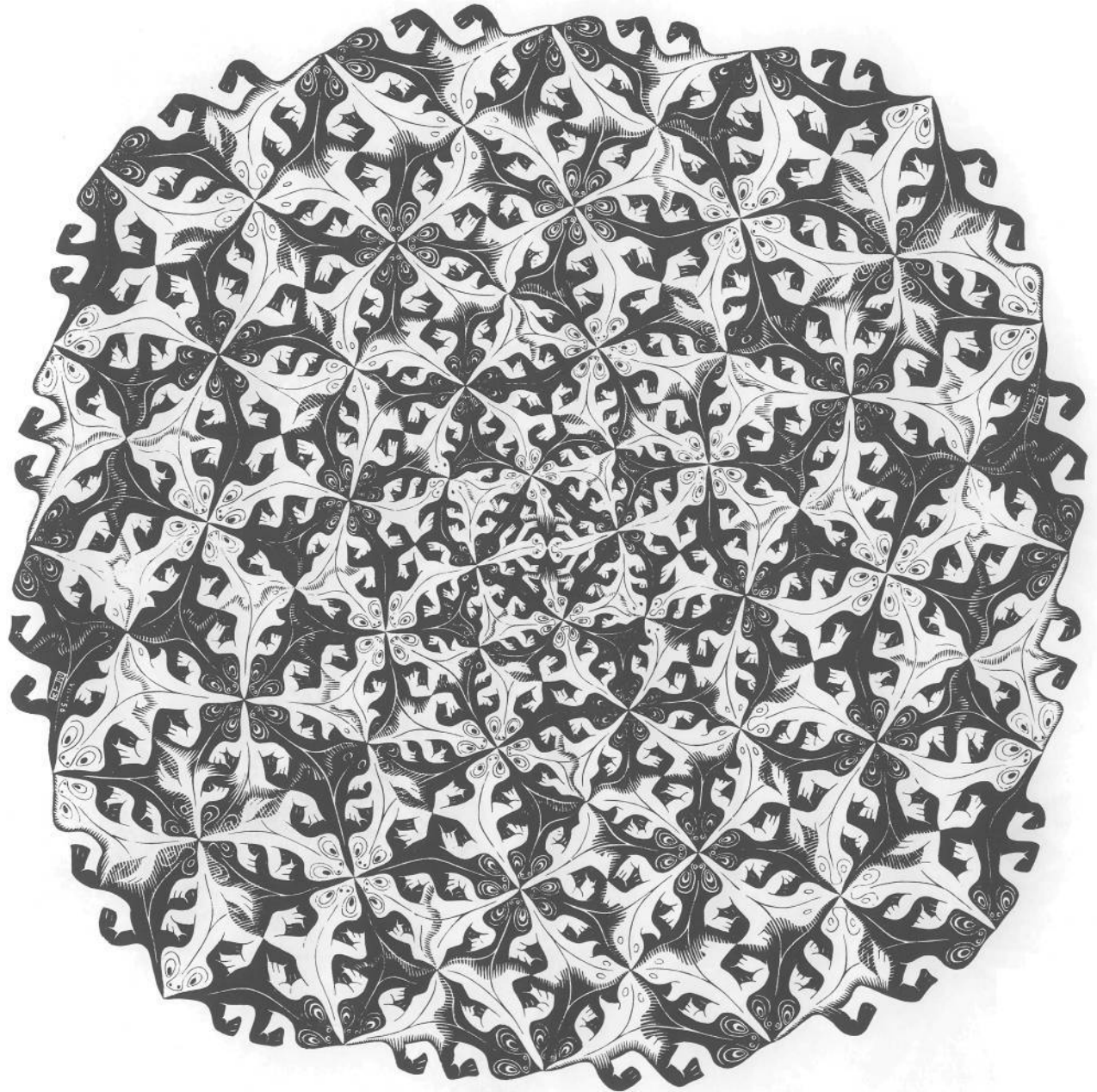


Abb. 53 *Kleiner und kleiner*, Holzschnitt, 1956, National Gallery of Art, Washington, D. C., Schenkung von Mr. C. V. S. Roosevelt.



Abb. 54 Periodische Zeichnung 118; IV1963. Echsen (vierfarbige Variation des Entwurfs aus Abbildung 16).

VERDRILLTE KALEIDOZYKLEN

Begegnung

Der Entwurf sich überlagernder Motive (Abb. 19), aus dem der Druck *Begegnung* (Abb. 14) mit den Pessimisten und den Optimisten hervorging, lässt sich nicht auf einen symmetrischen Kaleidozyklus übertragen.

Diese periodische Zeichnung beruht auf einem Gitterwerk aus Rechtecken. (Sie können das überprüfen, indem Sie alle Wiederholungen eines gegebenen Punktes verbinden, zum Beispiel die Wiederholungen der Nasenspitze des nach rechts schauenden Pessimisten.) Bei der Bearbeitung für den verdrillten Kaleidozyklus haben wir ein gekipptes Netz aus Dreiecken auf die periodische Zeichnung abgebildet, damit die Ober- und Unterkanten sowie die Kanten rechts und links zusammenpassen. Die Rechtecke im ursprünglichen Muster legten die Kantenlänge und den Neigungswinkel für die Dreiecke fest.

Wenn Sie diesen verdrillten Ring drehen, sehen Sie die Figuren in einer unendlichen zyklischen Prozession taumeln.

WEITERFÜHRENDE LITERATUR

Beard, Col. R. S., *Patterns in Space*, Creative Publications, Palo Alto, Kalifornien 1973. Viele zwei- und dreidimensionale mathematische Entwürfe und Konstruktionen werden vorgestellt. Beschreibung zweier drehbarer Tetraederringe.

Bool, F. H., Kist, J. R., Locher, J. L. und Wierda, F., *M. C. Escher, His Life and Complete Graphic Work*, Harry N. Abrams, New York 1982. Die umfassendste Darstellung von Eschers Werk; der gesamte Text und alle Bilder aus Eschers Buch *Regelmätige Vlakverdeling* (Regelmäßige Flächenfüllung), 1958. Ausführliche Zitate aus Eschers Briefen und Tagebüchern geben der exzellenten Biographie eine persönliche Note.

Coxeter, H. S. M., *Introduction to Geometry*, Zweite Auflage, John Wiley & Sons, New York 1969. Behandelt weite Teile der Geometrie auf Hochschulniveau. (Durch die Korrespondenz mit Coxeter machte Escher Bekanntschaft mit den mathematischen Gesetzen, die bei hyperbolischen Mosaiken gelten; Kreislimit III ist dafür ein Beispiel.)

Coxeter, H. S. M., Emmer, M., Penrose, R. und Teuber, M. (Hg.), *M. C. Escher: Art and Science*, North Holland, Amsterdam 1987. Eine Aufsatzsammlung verschiedener Autoren zu vielen Aspekten des Werks von M. C. Escher.

Cundy, H. N. und Rollet, A. P., *Mathematical Models*, zweite Auflage, Oxford University Press, Oxford 1961. Detaillierte Information zu den Platonischen und Archimedischen Körpern, ebenso zu vielen anderen interessanten geometrischen Modellen.

Ernst, Bruno, *The Magic Mirror of M. C. Escher*, Random House, New York 1976; dt. Ausgabe: *Der Zauberspiegel des M. C. Escher*, Taco, Berlin 1986. Behandelt alle Aspekte von Eschers Werk einschließlich seiner Verwendung von Mathematik, um seine überraschenden Effekte zu realisieren.

Escher, M. C., *The Graphic Work of M. C. Escher*, Ballantine Books, New York 1971. Eine Sammlung von Eschers Arbeiten auf graphischem Gebiet mit Anmerkungen des Künstlers.

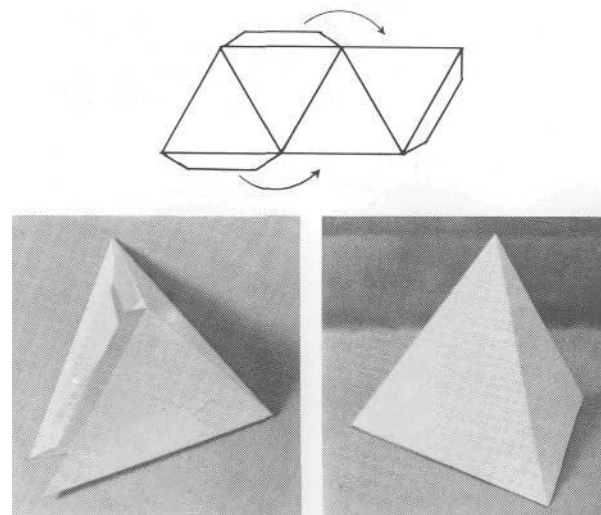
Grünbaum, B. and Shephard, G. C., *Tillings and Patterns*, W. H. Freeman & Co., New York 1986. Eingehende Studie über die mathematischen Aspekte von Fliesen mit Einfluß von Eschers Werk.

Locher, J. L. (Hg.), *The World of M. C. Escher*, Harry N. Abrams, Inc., New York 1971. Eine Auswahl von Eschers Arbeiten mit Aufsätzen über verschiedene Aspekte seines Werkes.

MacGillary, Caroline, *Fantasy and Symmetry*. The Periodic Drawings of M. C. Escher, Harry N. Abrams, Inc., New York 1976. Enthält 41 von Eschers periodischen Zeichnungen. Der ursprüngliche Zweck des Buches bestand darin, Studenten der Kristallographie in frühen Semestern auf interessante Weise an die Gesetze heranzuführen, die für sich wiederholende Muster und ihre Kolorierung gelten. O'Daffer, P. G. und Clemens, S. R., *Geometry: An Investigative Approach*, Addison-Wesley, Menlo-Park, Kalifornien 1976. Enthält umfassende elementare Informationen über die Platonischen Körper, Transformations-Geometrie und regelmäßige Muster; Eschers Werk wird häufig zur Veranschaulichung verwendet.

Senechal, M. und Fleck, G. (Hg.), *Shaping Space*, Birkhäuser, Boston 1987. Aufsätze, informative Ideen, Probleme - alle bezogen auf Polyeder (Vielfache). Unter den Autoren sind Mathematiker, Künstler, Naturwissenschaftler und Lehrer.

Wenninger, Magnus J., *Polyhedron Models*, Cambridge University Press, Cambridge 1971. Konstruktionsangaben zu Platonischen, Archimedischen und anderen symmetrischen geometrischen Körpern.



BAUANLEITUNG FÜR DIE MODELLE

Für alle Modelle

1. Entfernen Sie sorgfältig das überflüssige Papier rund um die ebenen Netze. Die Kanten der Zeichnung müssen sauber ausgeschnitten werden.
2. Befolgen Sie die unten genannten Anweisungen, um die Muster entlang der eingezeichneten Linien zu falzen. Achten Sie darauf, daß Sie das Papier nur an diesen Linien knicken.
3. Falten Sie vor dem Kleben jedes Modell probeweise zusammen.
4. Verwenden Sie einen schnell trocknenden Papierkleber, aber keinen Sofort-Kleber, denn Sie müssen die geklebten Kanten noch leicht verschieben können, um die Muster passend aneinanderzubringen. Dickflüssige Kleber sind ungeeignet.
5. Tragen Sie nur wenig Klebemittel auf die überstehenden Falze, und kleben Sie jeweils nur eine Kante. Streichen Sie die frisch geklebten Stellen mit dem Finger glatt, damit keine Luftpolster entstehen. Überschüssigen Leim sollten Sie abwischen, damit er nicht auf die Außenfläche quillt.
6. Kleben Sie die entsprechenden Falze bei jedem Modell nach innen; so ergeben sich perfekte durchgehende Oberflächen.
7. Lassen Sie die Modelle sorgfältig trocknen, bevor Sie mit ihnen hantieren.

Zusammenbau der geometrischen Körper

Falzen Sie zuerst die Muster entlang aller eingezeichneten Linien, einschließlich derer, an denen sich die Klebefalze befinden. Falten Sie jedes Modell wie in den Zeichnungen angegeben, kleben Sie dann die Falze von innen an die zugehörige Seite. Achten Sie dabei auf die genaue Passung des Musters. Streichen Sie die Klebestelle glatt, um ihr sicheren Halt zu verleihen.

Das Tetraeder

Falten Sie das Tetraeder zusammen und kleben Sie die Falze innen an die Kanten - wie in Abbildung 55 gezeigt. Kleben Sie die übrigbleibende Kante fest.

Das Oktaeder

Verbinden Sie die beiden Hälften der Vorlage, indem Sie Falz A so an die passende Kante kleben, daß sich das flache Netz aus Abbildung 56 ergibt. Falten Sie das Modell zusammen und kleben Sie die Falze, wie gezeigt, innen an die zugehörigen Kanten; Sie erhalten dann zwei zusammenhängende Pyramiden. Setzen Sie die Pyramiden an den passenden Stellen zu einem Oktaeder zusammen.

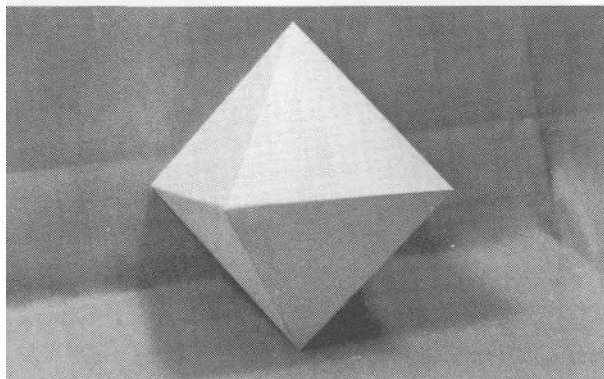
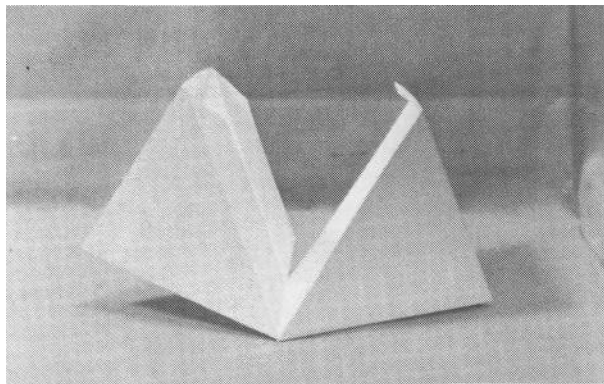
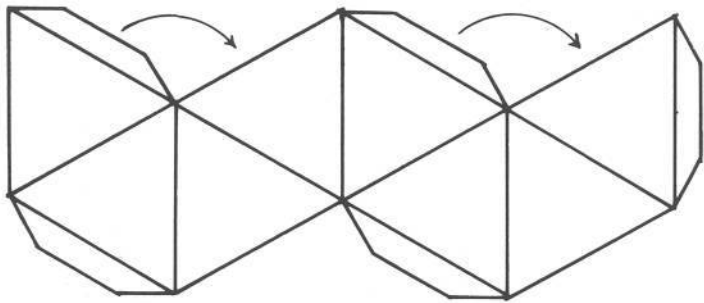


Abb. 56 Der Zusammenbau des Oktaeders.

Das Ikosaeder

Verbinden Sie die beiden Hälften der Vorlage, indem Sie Falz A so an die passende Kante kleben, daß sich das flache Netz aus Abbildung 57 ergibt. Falten Sie das Modell zusammen und kleben Sie die Falze, wie gezeigt, innen an die zugehörigen Kanten; Sie erhalten dann zwei zusammenhängende Halbschalen. Setzen Sie die Halbschalen an den passenden Stellen zu einem Ikosaeder zusammen.

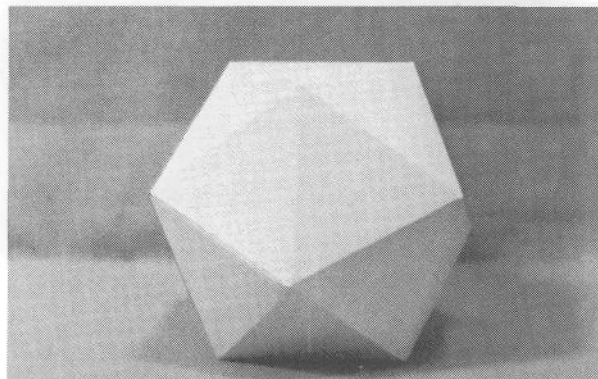
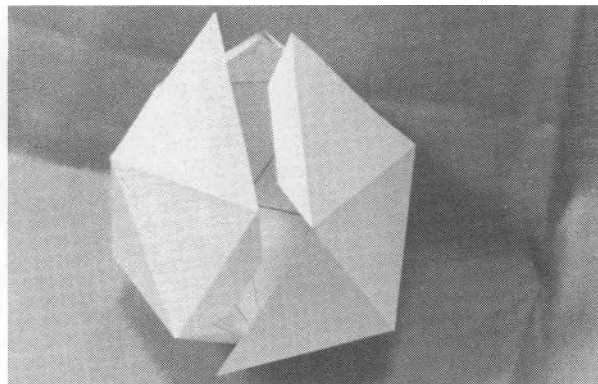
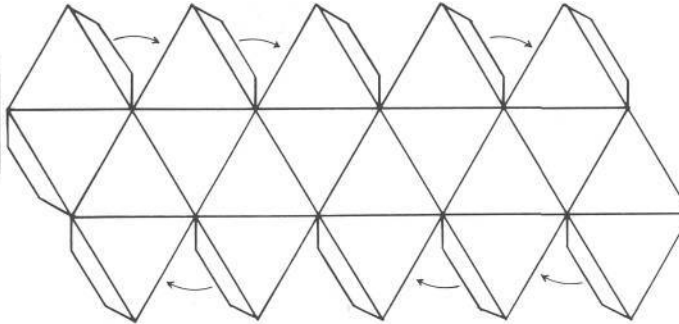
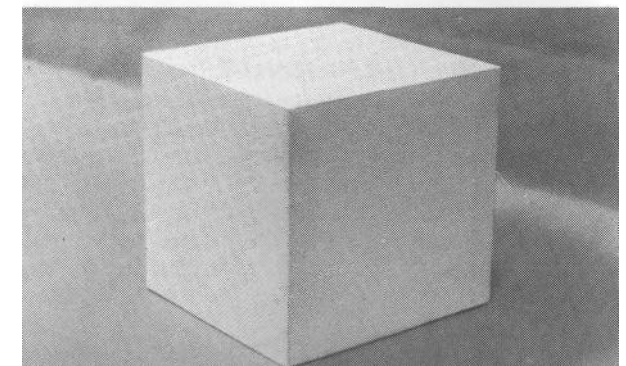
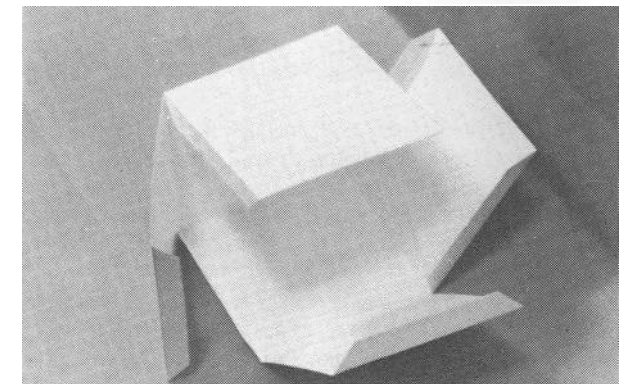
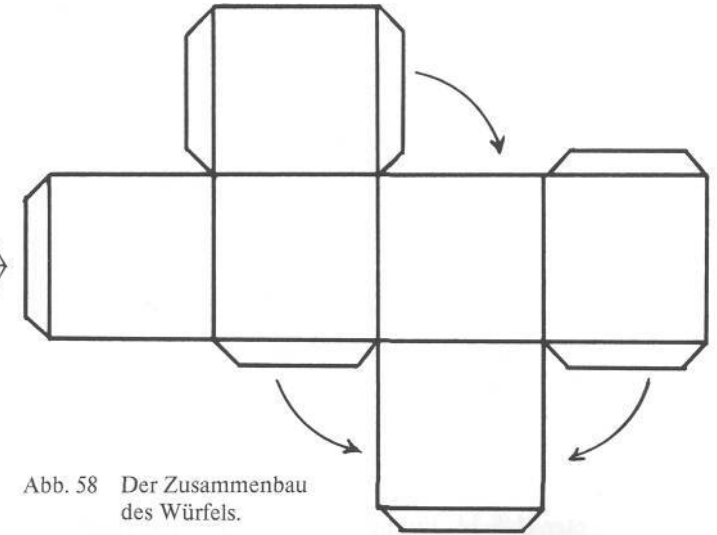


Abb. 57 Der Zusammenbau des Ikosaeders.

Der Würfel

Verbinden Sie die beiden Hälften der Vorlage, indem Sie Falz A so an die passende Kante kleben, daß sich das flache Netz aus Abbildung 58 ergibt. Falten Sie das Modell zusammen und kleben Sie die Falze, wie gezeigt, innen an die zugehörigen Kanten. Verkleben Sie zum Schluß die Kanten des Würfels.



Das Dodekaeder

Verbinden Sie die beiden Hälften der Vorlage, indem Sie Falz A so an die passende Kante kleben, daß sich das flache Netz aus Abbildung 59 ergibt. Falten Sie das Modell zusammen und kleben Sie die Falze, wie gezeigt, innen an die „Blütenblätter“; Sie erhalten dann zwei zusammenhängende Halbschalen. Verbinden Sie die Halbschalen an den passenden Stellen zu einem Dodekaeder.

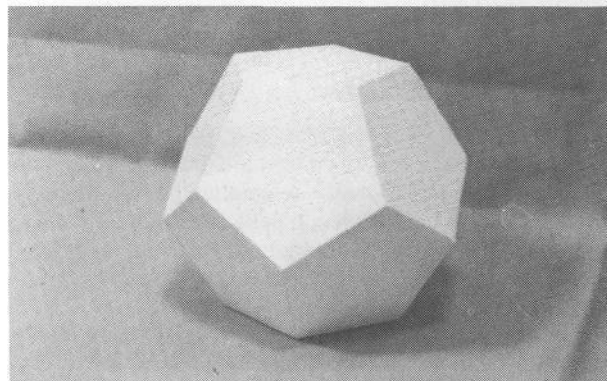
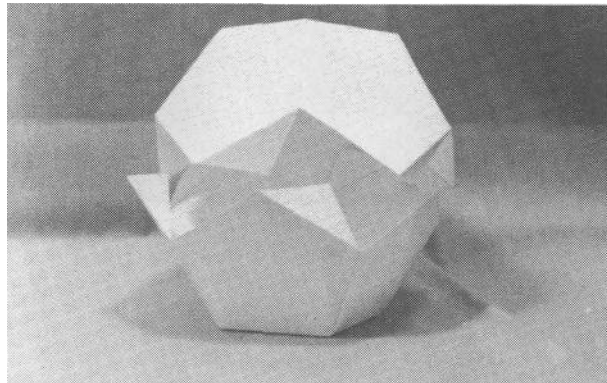
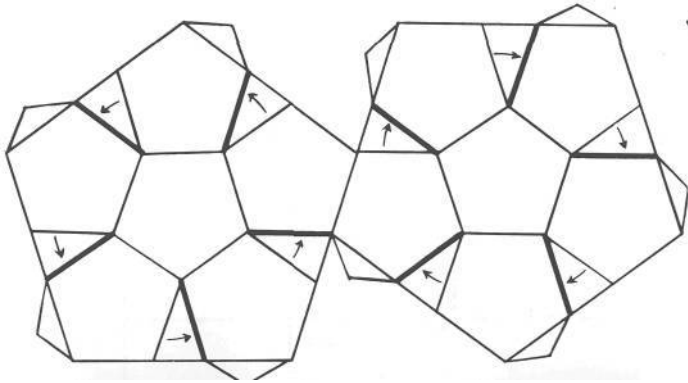


Abb. 59 Der Zusammenbau des Dodekaeders.

Das Kubo-Oктаeder

Falten Sie das Modell zusammen und kleben Sie die Falze, wie in Abbildung 60 gezeigt, innen an die zugehörigen Kanten; Sie erhalten dann zwei zusammenhängende Halbschalen. Verbinden Sie die Halbschalen an den passenden Stellen, indem Sie jeweils ein Dreieck an ein Quadrat kleben.

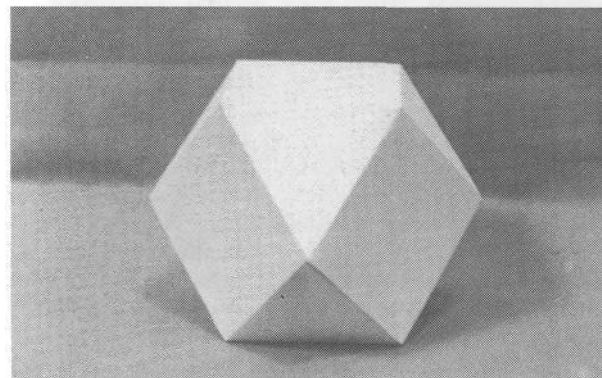
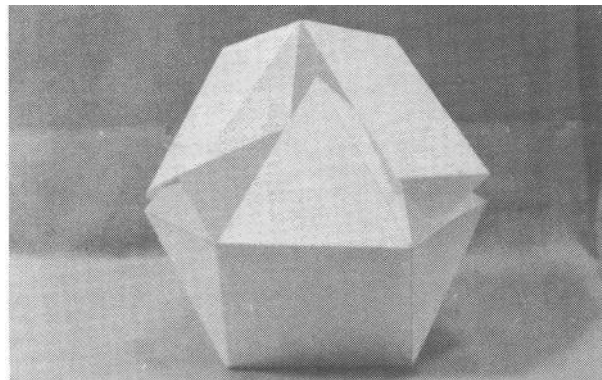
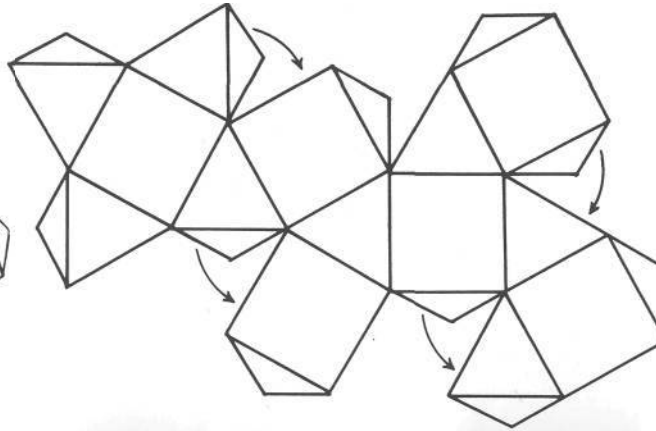


Abb. 60 Der Zusammenbau des Kubo-Oktäeders.

Zusammenbau der Kaleidozyklen

Die Netze aller drei Kaleidozyklusarten sind in Abbildung 61 zu sehen. Die zwei Hälften für den verdrehten Kaleidozyklus können Sie zusammensetzen, indem Sie Falz A an die passende Kante kleben. In der Abbildung sind die senkrechten Linien fett eingezeichnet, alle anderen Linien verlaufen diagonal. Alle Muster werden entlang der eingezeichneten Linien folgendermaßen gefaltet: Falten Sie entlang der senkrechten Linien (einschließlich derer mit den Falzen) so, daß die bedruckten Seiten aufeinanderliegen. Legen Sie entlang aller diagonalen Linien das Muster nach hinten um. Das gefaltete Muster wird sich von selbst ungefähr in die gewünschte Form bringen. Nehmen Sie das Modell vorsichtig in die Hände, und bringen Sie die Deck-Dreiecke an die oberen freien, weißen Falze. Strei-

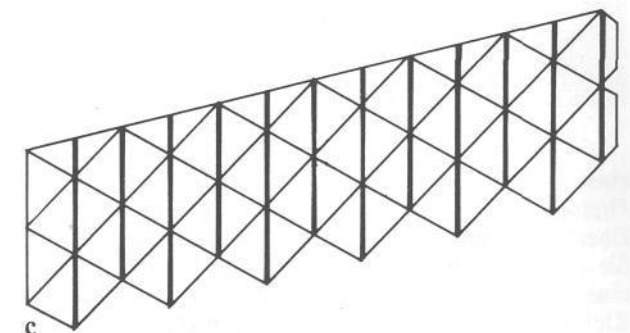
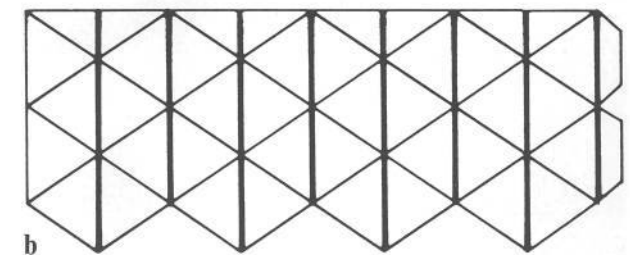
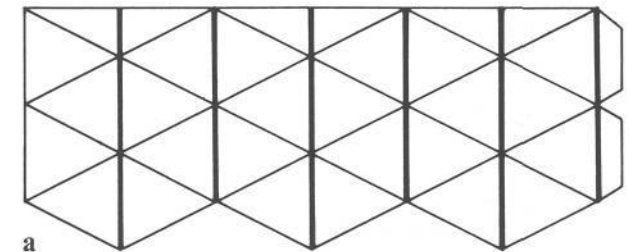


Abb. 61 (a) Das Netz für den sechseckigen Kaleidozyklus.
(b) Das Netz für den quadratischen Kaleidozyklus.
(c) Das Netz für den verdrehten Kaleidozyklus.

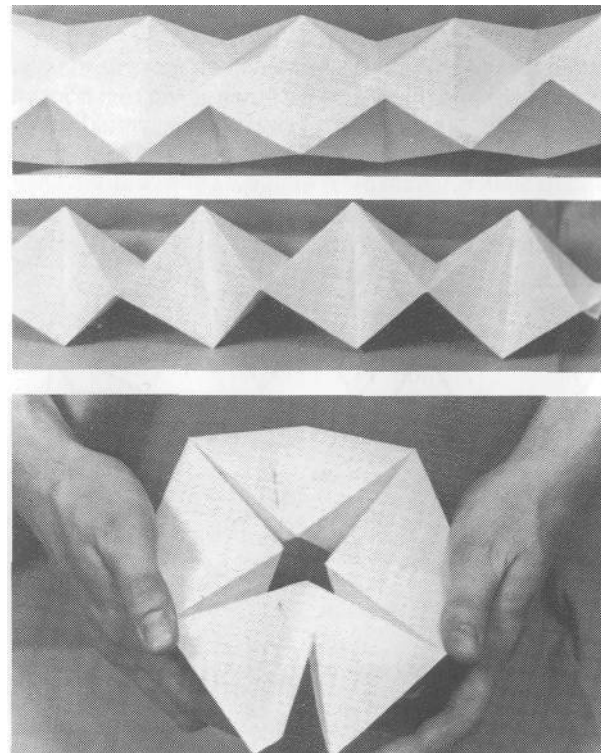
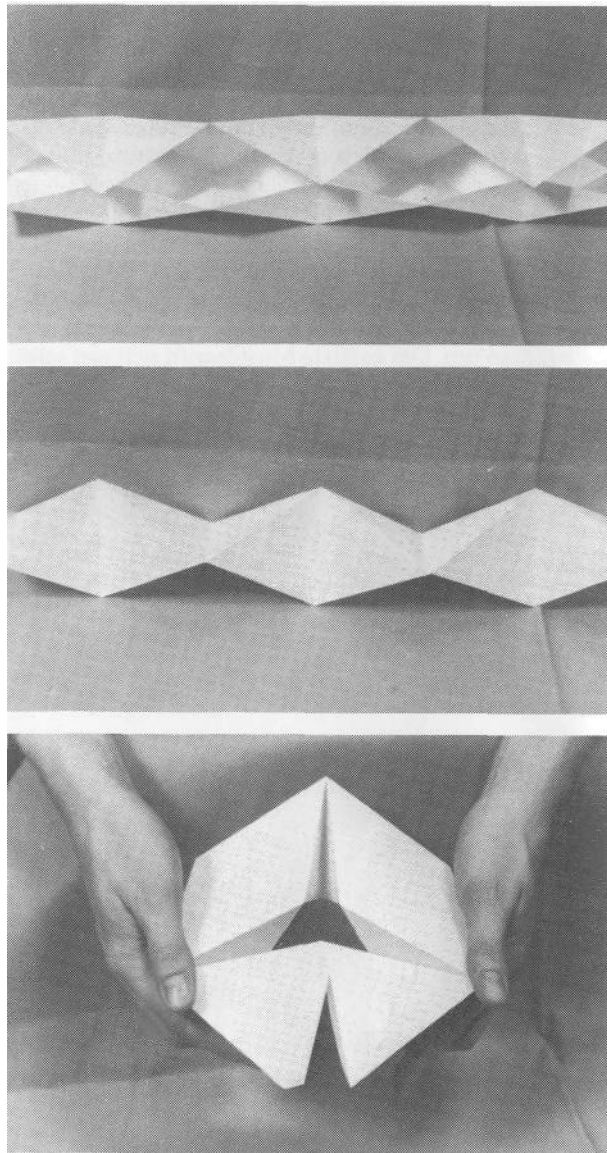
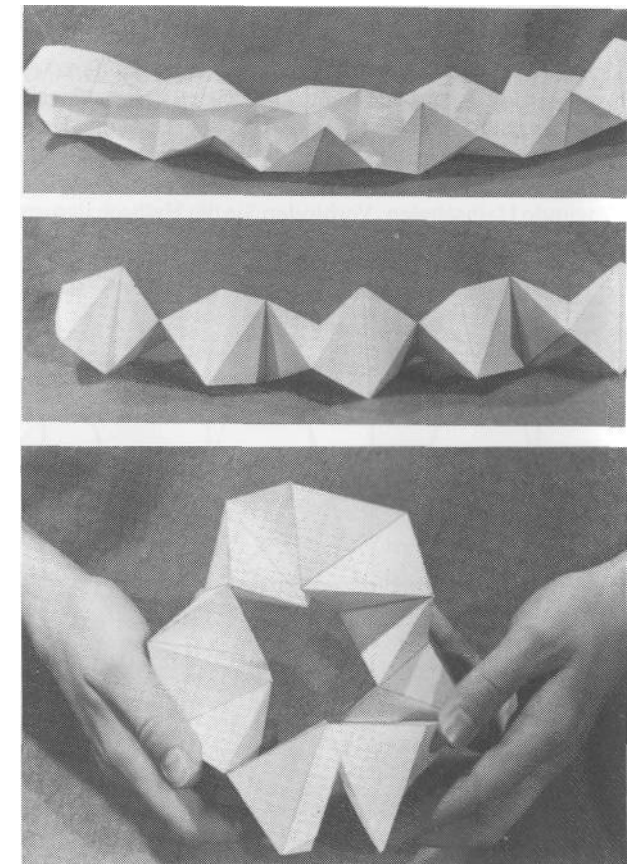


Abb. 62 (a) Der Zusammenbau des sechseckigen Kaleidozyklus.
(b) Der Zusammenbau des quadratischen Kaleidozyklus.
(c) Der Zusammenbau des verdrehten Kaleidozyklus.



chen Sie Klebstoff auf die Falze und kleben Sie die Dreiecke fest. Verschieben Sie die Klebestellen, bis die Oberflächenzeichnungen genau übereinstimmen; achten Sie auf den festen Halt aller Klebestellen. Sie haben jetzt eine Kette aus verbundenen Tetraedern. Lassen Sie den Klebstoff vor der Weiterverarbeitung trocknen. Nehmen Sie die Tetraederkette in beide Hände und biegen Sie sie behutsam zu einem geschlossenen Ring; vielleicht müssen Sie den Ring dafür verdrehen. Der doppelte Falz an dem einen Ende gehört in den Schlitz am anderen

Ende des Ringes. (Für das verdrehte Modell müssen Sie jetzt den Ring verdrehen.) Bestreichen Sie den doppelten Falz auf beiden Seiten mit Klebstoff und führen Sie ihn in den Schlitz ein. Achten Sie dabei auf eine exakte Passung der Zeichnung. Drehen Sie den Ring so, daß Sie mit dem Finger die Klebestellen feststreichen können. Wischen Sie überschüssigen Klebstoff ab, und lassen Sie die Klebestelle einige Sekunden antrocknen; dabei sollten Sie das Modell nicht bewegen, damit die Naht nicht wieder auseinandergeht. Wenden Sie das Modell und drehen Sie es

leicht durch sein Zentrum, damit Sie die andere Seite der Klebestelle sehen können. Verschieben Sie die Klebeflächen vorsichtig, bis das Muster paßt, streichen Sie die Klebestelle fest und lassen Sie sie dann antrocknen. Nun müssen Sie das Modell sorgfältig trocknen lassen (am besten über Nacht). Wenn es trocken ist, kann es in einem kontinuierlichen Zyklus der Bewegung durch seine Mitte gedreht werden; drücken Sie dabei die Spitzen der Tetraeder zur Mitte hin.

Bemerkungen zu den Bildunterschriften:

M. C. Escher hat seine farbigen Zeichnungen der periodischen Muster nicht mit Titeln versehen; er hat sie jedoch fortlaufend nummeriert und datiert. In einigen Fällen („Drei Elemente“, „Muscheln und Seesterne“ und „Himmel und Hölle“) haben sich Namen für die Zeichnungen eingebürgert. Im Text bezeichnen wir jedes periodische Muster mit Eschers Nummer und dem Datum (Monat, Jahr) und verwenden einen beschreibenden Namen.

Die Autoren

Doris Schattschneider ist Mathematikprofessorin am Moravian College in Bethlehem, Pennsylvania. Ihr doppeltes Interesse an Geometrie und an Kunst führte sie natürlicherweise zur Beschäftigung mit dem Werk von M. C. Escher. Sie arbeitet als Lehrerin, Lektorin, Herausgeberin und Autorin und hat mehrere Artikel über Flächenaufteilung und Eschers Rolle als Pionier für mathematische Forschungsvorhaben verfaßt. Zwei neuere Untersuchungen erscheinen in den Büchern *Symmetry: Unifying Human Understanding*, herausgegeben von Istvan Hargittai, Pergamon 1986, und *M.C.Escher: Art and Science*, North-Holland 1987.

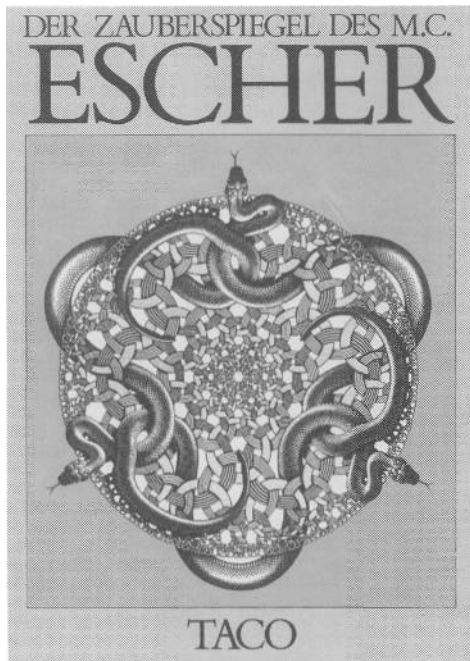
Wallace G. Walker ist freischaffender Künstler mit Wohnsitz in New York. Seine Ausbildung erhielt er an der Cranbrook Academy of Art, Bloomfield Hills, Michigan; er ist der Erfinder von IsoAxis. Er hat für I. M. Pei and Partners, Architects gearbeitet und war Lehrer für Design an der Parsons School of Design. Vor kurzem hatte er Ausstellungen (Skulpturen und Zeichnungen) bei Waterford Friends of the Art, Pontiac, Michigan und am Interlochen Center for the Arts, Interlochen, Michigan.

DANKSAGUNG

Wallace Walker überwachte die Vorbereitung der Zeichnungen und die Herstellung der Druckvorlagen für die hier vorgestellten Modelle. Robin McGrath, Robert McKee, Victoria Vebell und Wallace Walker bearbeiteten Eschers periodische Muster für die durchgängige Oberflächengestaltung der geometrischen Körper und Kaleidozyklen.

Die Autoren bedanken sich bei dem Haags Gemeentemuseum, Den Haag, Niederlande, der National Gallery of Art, Washington, und Mr. C. V. S. Roosevelt für die Zusammenarbeit und die Bereitstellung von Illustrationen für dieses Buch.

Weitere Publikationen zu *M.C. Escher* aus unserem Programm:

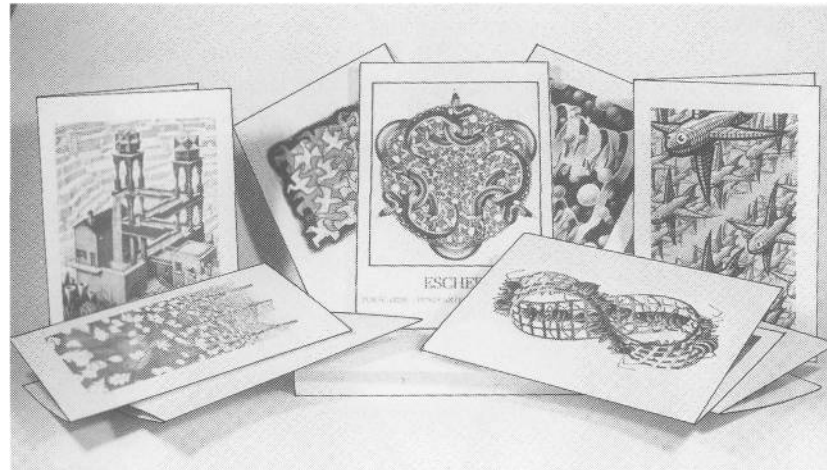


DER ZAUBERSPIEGEL DES

M.C. ESCHER von Bruno Ernst

Escher ist ein Konstrukteur unmöglicher Welten, der das real Unmögliche in seinen Bildern streng und gesetzmäßig darstellt. Das Ergebnis ist ein intelligentes Verwirrspiel mit Dimensionen und Perspektiven, das dem Betrachter die Gewohnheiten seiner Sinne vor Augen führt. Vielseitig sind die Mittel, durch die Escher zu verblüffen weiß: In seinen Metamorphosebildern verwandeln sich geometrische Gebilde allmählich in Tier gestalten; Figuren, die in die Zweidimensionalität gebannt scheinen, bewegen sich ins Körperhaft-Dreidimensionale. Ewige Wiederholungen und sinnlos erscheinende Verwandlungen sind weitere Kennzeichen seiner Welt im „Zauberspiegel“. 112 Seiten, 215x305 mm, über 150 s/w- und Farbabb., Softcover.

nur DM 9,95

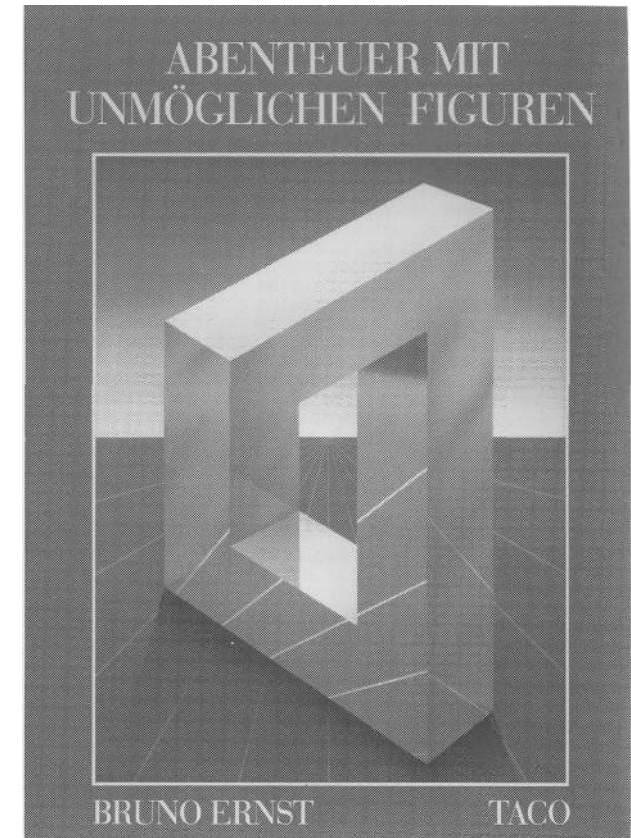


ESCHER-KARTENSET

Diese Kunstdruckkarten mit ausgewählten Motiven aus dem Werk M.C. Eschers sind vielseitig verwendbar als Brief-, Einladungs-, Gruß- und Geschenkkarten. Wunderschön gestaltet - z.T. farbig, doppelseitig und von erlesener Papierqualität - gehören sie zur Welt der schönen kleinen Dinge, die Ihre ästhetische Sensibilität ansprechen.

Der feine Karton enthält acht Kunstdruckkarten und acht weiße Briefumschläge und ist auf dem Deckel mit einer ausgewählten Illustration seines Inhalts versehen. Auf seiner Rückseite finden Sie noch einmal alle acht Kartenmotive abgebildet. Kartenformat: 24x17,2 cm (aufgeklappt).

nur DM 9,95



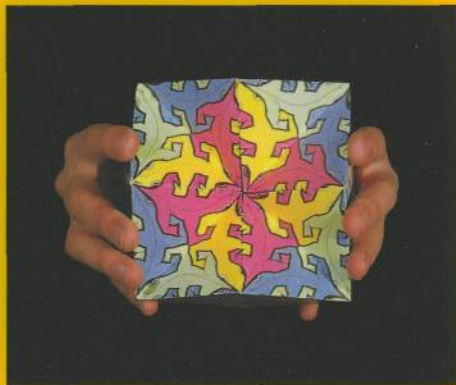
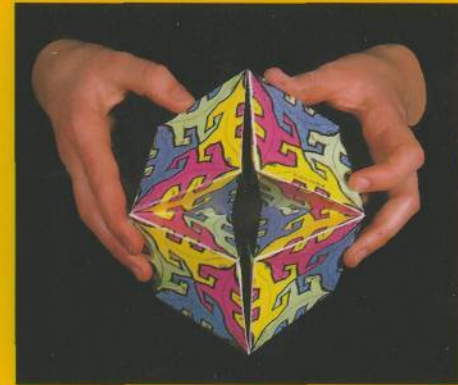
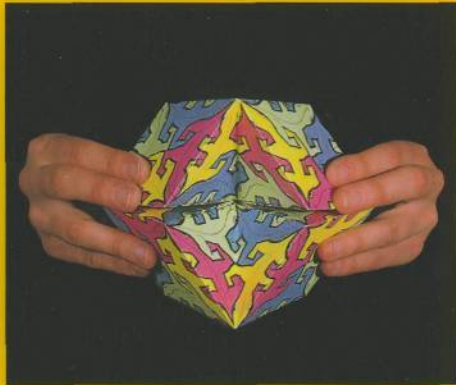
ABENTEUER MIT UNMÖGLICHEN FIGUREN

von Bruno Ernst

Bruno Ernst befaßt sich hier mit den erstaunlichen Erscheinungsformen unmöglicher Figuren. Mit diesen hängt der Reiz der Bilder Eschers wesentlich zusammen. Der verblüffte Leser erfährt an zahlreichen Beispielen, daß die Dinge nicht immer sind, als was sie erscheinen, und erhält auf diese Weise Einblick in das komplizierte Geschehen, das man SEHEN nennt. Wie schon im „Zauberspiegel“ beweist B. Ernst auch hier, daß es ein Abenteuer sein kann, auf optische Entdeckungsreisen zu gehen. 80 Seiten, viele farbige Abb., Softcover.

nur DM 9,95

ARBEITEN SIE ZUSAMMEN MIT EINEM DER ORIGINELLSTEN
KÜNSTLER UNSERER ZEIT!



JEDER LIEBT ÜBERRASCHUNGEN. IN DIESEM BUCH WIRD DER ZAUBER
VON ESCHERS WERK DREIDIMENSIONAL ZUR WIRKUNG GEBRACHT.
SIE SELBST KÖNNEN AUS VORGESTANZTEN BÖGEN WUNDERSCHÖN DEKORIERTE
GEOMETRISCHE FIGUREN BASTELN.
ENTDECKEN SIE DIE SCHÖNHEIT VON REGELMÄSSIGKEIT UND SYMMETRIE,
DIE AUS DER KOMBINATION VON GEOMETRIE UND
ESCHERS BILDKUNST HERVORGEHT.