Л. С. ПОНТРЯГИН

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ

Л. С. ПОНТРЯГИН

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1980

22.16
П 56
УДК 517

Понтрягин Л. С.

П 56 Математический анализ для школьников. — М.: Наука, 1980. — 88 с. — 10 к.

Брошюра предназначается для первоначального ознакомления с математическим анализом. Она включает в себя материал, охватывающий все разделы математического анализа, изучаемые в средней школе. В брошюре рассматриваются производные многочленов, тригонометрических функций, показательной и логарифмической функций. Интеграл определяется как операция, обратная дифференцированию, как площадь графика и как предел конечных сумм. В конце книги даются упражнения к каждому параграфу. В книге делается упор не на строгость изложения, а на вычислительную технику.

Для учащихся старших классов средней школы.

П $\frac{20203-013}{053(02)-80}$ 82-80.1702050000 ББК 22.16 517.2

П $\frac{20203-013}{053(02)-80}$ 82-80.1702050000

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта небольшая книга, объемом около пяти листов, рассчитана на то, чтобы при удаче стать учебником математического анализа в средней школе. Она содержит все, что может войти в любой вариант учебной программы. Книга начинается не с определения предела и правил его вычисления. Предел трактуется в ней как нечто само собой понятное и разъясняется на определениях касательной и производной. С этого начинается книга. Далее вычисляются производные многочленов, тригонометрических функций и даются правила дифференцирования произведения и дроби, а также сложной функции. В промежутке доказываются теорема Ролля и формула Лагранжа. На основе этого изучаются функции, находятся участки возрастания и убывания, максимумы и минимумы. Интеграл определяется в трех вариантах: операция, обратная дифференцированию, площадь графика, предел конечных сумм. После этого очень тщательно изучается функция e^x как предел последовательности многочленов $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ при целом n, стремящемся к бесконечности. Вычисляются производные функций e^x, $\ln x$. В конце даются упражнения к каждому параграфу, немногочисленные, но иногда довольно трудные. В книге делается упор не на логическую строгость, но на вычислительную технику. Как популярная книга может служить для самого первоначального ознакомления с математическим анализом. Поскольку я сам никогда не преподавал в средней школе, при написании книжки я руководствовался здравым смыслом квалифицированного математика и своими личными воспоминаниями о восприятии анализа в мои школьные времена. Хотя тогда анализ не преподавали в средней школе, я еще до поступления в университет был довольно хорошо знаком с ним. Знал, что такое производная, интеграл и умел пользоваться этим аппаратом для решения задач. При этом я не имел ни малейшего представления о теории пределов. О существовании ее я узнал только в университете и был чрезвычайно этим удивлен. Я считаю, что начинать изложение анализа в средней школе с теории пределов не следует. Нужно помнить, что теория пределов исторически возникла как надстройка над уже существовавшим анализом. Тщательное изучение таких вещей, как пределы и непрерывные функции, может навести скуку и даже вызвать отвращение. Помню, как, будучи еще школьником, в каком-то курсе анализа я читал доказательство теоремы о том, что непрерывная функция принимает все промежуточные значения. Это чтение вызвало у меня тогда крайнее недоумение и раздражение. Здравомыслящий человек должен воспринимать график функции как хорошо отделанный край незазубренной металлической пластинки. При таком восприятии понятия графика касательная на выпуклой его части должна восприниматься как край линейки, плотно прижатой к выпуклой части края пластины, и потому ни существование касательной, ни существование производной не должны вызывать сомнение. Точно так же не должно вызывать сомнение, что существует площадь такой пластины, и потому нет сомнения в том, что существует интеграл. Мне хотелось бы, чтобы школьник при изучении геометрии воспринимал треугольник как сделанный из тонкой металлической пластинки, так чтобы его можно было брать в руки, перекладывать на другое место и перевертывать наизнанку. Это не значит, что таково должно быть определение треугольника, но восприятие его, мне кажется, должно быть именно таким. Исходя из таких методических соображений, я начинаю изложение анализа не с определения предела, а с определения касательной и производной.

Мне кажется, что в учебную программу средней школы должны быть включены лишь сведения, изложенные в параграфах с 1 по 7. Убедительное описание функции e^x, которому посвящены параграфы с 8 по 10, представляется мне чрезмерно сложным. Тем не менее, я даю его, исходя из требований программы. Точно так же, для выполнения требования учебной программы я привожу некоторые сведения о пределах и непрерывных функциях, но лишь в послесловии (§ 13).

В заключение я выражаю благодарность В. Р. Телеснину за большую помощь, оказанную мне при написании и редактировании книжки.

§ 1. ПРОИЗВОДНАЯ

При изучении функции важнейшую роль играет ее производная. Если задана некоторая функция

$$y = f(x), \tag{1}$$

то можно вычислить функцию $f'(x)$, которая называется *производной* функции $f(x)$. Величина $f'(x)$ характеризует скорость изменения величины y по отношению к изменению величины x. Это, конечно, не есть определение производной, а лишь некоторое ее интуитивное описание. Подкрепим это описание рассмотрением одного частного случая. Если зависимость (1) есть пропорциональная зависимость $y = kx$, то скорость изменения y в отношении x, естественно, есть k, т. е. в этом случае мы должны иметь $f'(x) = k$. В этом случае производная имеет ясный механический смысл. Если x понимать как время, а y как пройденный за это время путь, то k есть скорость движения точки. Здесь скорость $f'(x)$ изменения y в отношении x есть величина постоянная, но при более сложной зависимости (1) величины y от величины x производная $f'(x)$ сама является функцией переменного x.

Производная применяется при изучении физических процессов, где различные физические величины меняются со временем и скорость их изменения играет важнейшую роль. Мы, однако, начнем с геометрического применения производной и на этом примере уточним само понятие производной.

Производная и касательная. Построим график функции $f(x)$ (см. (1)) в некоторой системе прямоугольных декартовых координат. Для этого, как обычно, на плоскости нашего чертежа проведем горизонтально ось абсцисс, выберем на ней направление слева направо, и вертикально ось ординат и выберем направление на ней снизу вверх (рис. 1). График функции $f(x)$ в этой системе координат представляет собой линию, которую мы обозначим через L. Поставим перед собой задачу дать логическое определение касательной к линии L в

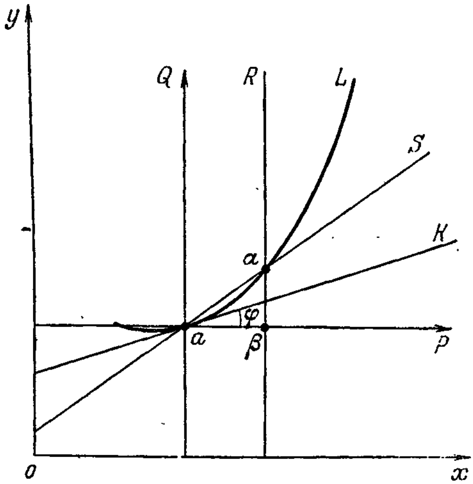

Рис. 1.

некоторой точке a этой линии и вычисления величин, определяющих эту касательную. Для логического определения касательной выберем вблизи точки a, которую мы пока будем считать неподвижной, другую, близкую к ней, но отличную от нее подвижную точку α. Через точки a и α проведем прямую линию S, которая называется *секущей* линии L, так как она пересекает ее в двух точках a и α. Точка α, принадлежащая линии L, может находиться как правее точки a, так и левее ее. Начнем теперь перемещать точку α по линии L, неограниченно приближая ее к точке a. При этом движении точки α секущая S, проходящая через неподвижную точку a и подвижную точку α, вращается, приближаясь неограниченно к некоторой прямой K, проходящей через точку a. Эта прямая K и называется *касательной* к линии L в точке a. Касательная K проходит через определенную точку a, и потому для ее точного описания достаточного вычислить *угол наклона* φ этой прямой к оси абсцисс, точнее, тангенс угла наклона $\operatorname{tg} \varphi$.

Для вычисления величины $\operatorname{tg} \varphi$ вычислим предварительно $\operatorname{tg} \psi$ угла наклона ψ секущей S к оси абсцисс. Абсциссу и ординату точки a обозначим соответственно через x и y:

$$a = (x, y), \tag{2}$$

где x и y связаны соотношением (1), так как точка a лежит на графике L функции $f(x)$. Аналогично обозначим через ξ и η абсциссу и ординату точки α:

$$\alpha = (\xi, \eta), \tag{3}$$

где ξ и η связаны соотношением

$$\eta = f(\xi), \tag{4}$$

так как точка α также лежит на графике L функции $f(x)$. Проведем теперь через точку a две прямые — горизонтальную P и вертикальную Q. Эти прямые параллельны соответственно оси абсцисс и оси ординат исходной системы координат. На них мы выберем направления, соответствующие направлениям, выбранным ранее на осях координат. Прямые P и Q, принятые за ось абсцисс и ось ординат, сами определяют в плоскости нашего чертежа некоторую новую систему координат с началом в точке a. Секущая S не может быть вертикальной, и потому понятно, что значит выбрать на ней направление слева направо. Так как новая ось абсцисс P параллельна старой оси абсцисс, то для вычисления угла ψ нам достаточно вычислить угол между положительным направлением на прямой P и положительным направлением на прямой S. Этот угол ψ меньше прямого, но он может быть как положительным, так и отрицательным. Новая система координат с осями P и Q разбивает плоскость на четыре квадранта. Угол ψ положителен, если секущая S идет из третьего квадранта в первый, и отрицателен, если секущая S идет из второго квадранта в четвертый. Абсцисса и ордината точки α в новой системе координат равны соответственно величинам

$$(\xi - x), \quad (\eta - y). \tag{5}$$

Для вычисления угла ψ проведем вертикальную прямую R через точку α и обозначим через β точку пересечения прямой R с прямой P. Рассмотрим прямоугольный треугольник $a\beta\alpha$, в котором β есть вершина прямого угла. Если не учитывать знака угла ψ, то он равен углу $\beta a\alpha$ нашего треугольника при вершине a. Тангенс этого угла равен длине $l(\beta\alpha)$ катета $\beta\alpha$, деленной на длину $l(a\beta)$ катета $a\beta$. Таким образом, мы имеем формулу

$$|\operatorname{tg}\psi| = \frac{l(\beta\alpha)}{l(a\beta)}. \tag{6}$$

Длина $l(\beta\alpha)$ есть абсолютная величина ординаты точки α в новой системе координат, т. е. равна $|\eta - y|$ (см. (5)). Точно так же длина $l(a\beta)$ равна абсолютной величине абсциссы точки α в новой системе координат, т. е. равна $|\xi - x|$. Таким образом, из формулы (6) вытекает

$$|\operatorname{tg}\psi| = \frac{|\eta - y|}{|\xi - x|}. \tag{7}$$

Докажем теперь, что

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\eta - y}{\xi - x}. \tag{8}$$

Для этого заметим, что если точка α лежит в первой или третьей четверти, то ее абсцисса и ордината имеют одинаковые знаки, и, следовательно, правая часть равенства (8) положительна. В этом случае и величина $\operatorname{tg}\psi$ также положительна, так как угол ψ положителен. Если точка α лежит во второй или четвертой четверти, то ее абсцисса и ордината (см. (5)) имеют разные знаки, и поэтому правая часть равенства (8) отрицательна. Но в этом случае и $\operatorname{tg}\psi$ отрицателен, так как угол ψ в этом случае отрицателен. Итак, формула (8) доказана. Заменим теперь в ней величины y, η по формулам (1) и (4). Тогда мы получим

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}. \tag{9}$$

Когда точка α неограниченно приближается к точке a, ее абсцисса ξ неограниченно приближается к абсциссе x точки a. Последнее записывают так:

$$\xi \to x. \tag{10}$$

Для того чтобы найти величину $\operatorname{tg}\varphi$, нам нужно вычислить, к чему стремится $\operatorname{tg}\psi$ при $\xi \to x$. В виде формулы это можно записать так:

$$\operatorname{tg}\psi \to \operatorname{tg}\varphi \quad \text{при} \quad \xi \to x. \tag{11}$$

В высшей математике последнее соотношение, состоящее из двух формул, записывают в виде одной формулы

$$\lim_{\xi \to x} \operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \varphi \tag{12}$$

или, заменяя в этой формуле $\operatorname{tg} \psi$ по формуле (9), переписывают последнее равенство в виде формулы

$$\operatorname{tg} \varphi = \lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \tag{13}$$

lim представляет собой сокращение латинского слова limit, русское значение которого есть предел.

Для того чтобы строго описать операцию (13), производимую над дробью

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}, \tag{14}$$

нам нужно было бы точно определить, что значит знак $\to$, т. е. объяснить, что значит стремление переменной величины к некоторой постоянной. Но мы полагаемся здесь на интуитивное понимание этого процесса. Заметим, что в формуле (14) нельзя просто положить $\xi = x$, так как тогда мы получим дробь, числитель и знаменатель которой равны нулю, так что необходимо рассматривать процесс приближения величины ξ к постоянной x и следить при этом за поведением величины (14).

Для того чтобы разъяснить понятие предельного перехода на простом примере, рассмотрим случай, когда функция $f(x)$ задается формулой

$$y = f(x) = x^2. \tag{15}$$

В этом случае дробь (14) записывается в виде

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = \frac{\xi^2 - x^2}{\xi - x} = \xi + x. \tag{16}$$

В правой части этого равенства уже можно заменить величину ξ величиной x, и мы не получим бессмысленного отношения 0/0. Поэтому в этом частном случае мы имеем

$$\lim_{\xi \to x} \frac{\xi^2 - x^2}{\xi - x} = \lim_{\xi \to x} (\xi + x) = 2x. \tag{17}$$

Таким образом, мы установили, что

$$\frac{\xi^2 - x^2}{\xi - x} \to 2x \quad \text{при} \quad \xi \to x, \tag{18}$$

или, что то же самое,

$$\lim_{\xi \to x} \frac{\xi^2 - x^2}{\xi - x} = 2x. \tag{19}$$

Величина

$$\lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \tag{20}$$

называется *производной* произвольной функции $f(x)$ в точке x и обозначается через $f'(x)$, так что по определению мы имеем

$$f'(x) = \lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}. \tag{21}$$

Таким образом, формула (19) показывает, что для функции (15)

$$f'(x) = 2x. \tag{22}$$

Следует обратить внимание на то, что в формуле (21) мы не рассматриваем отдельно двух случаев, когда α приближается к a с правой стороны и когда α приближается к a с левой стороны. В первом случае ξ приближается к x убывая, а во втором случае ξ приближается к x возрастая. При обоих этих способах приближения ξ к x результат вычисления производной должен быть одним и тем же. Только тогда и считается, что производная в точке x существует. Можно, однако, легко указать такую функцию, для которой приближения слева и справа дают различные результаты. Рассмотрим в качестве примера функцию $f(x)$, задаваемую уравнением

$$y = f(x) = |x| + x^2. \tag{23}$$

Производную этой функции $f(x)$ мы будем вычислять при $x = 0$. Таким образом, в этом случае имеем

$$\frac{f(\xi) - f(0)}{\xi - 0} = \frac{|\xi| + \xi^2}{\xi} = \frac{|\xi|}{\xi} + \xi. \tag{24}$$

При ξ положительном $|\xi| = \xi$, при ξ отрицательном $|\xi| = -\xi$. Таким образом, имеем

$$\frac{|\xi|}{\xi} = +1 \quad \text{при} \quad \xi > 0 \tag{25}$$

и

$$\frac{|\xi|}{\xi} = -1 \quad \text{при} \quad \xi < 0. \tag{26}$$

Итак,

$$\text{при } \xi > 0 \text{ имеем } \lim_{\xi \to 0} \frac{|\xi| + \xi^2}{\xi} = +1 \tag{27}$$

$$\text{при } \xi < 0 \text{ имеем } \lim_{\xi \to 0} \frac{|\xi| + \xi^2}{\xi} = -1. \tag{28}$$

Следовательно, предел величины (24) зависит от того, с какой стороны приближается ξ к 0: справа или слева. В этом случае считается, что в точке $x=0$ данная функция $f(x)$ (см. 23)) не имеет производной, а соответствующий график не имеет касательной. Бывают и более сложные случаи, когда формула (21) не определяет величины $f'(x)$. Но *в дальнейшем мы будем иметь дело только с такими функциями, для которых формула* (21) *определяет величину $f'(x)$, т. е. производная функции $f(x)$ существует.*

Операция нахождения производной функции $f(x)$ (см. (21)) называется часто *дифференцированием* функции $f(x)$, так что функция, имеющая производную, называется *дифференцируемой.* Все рассматриваемые нами в дальнейшем функции — дифференцируемые.

§ 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ МНОГОЧЛЕНА

Здесь мы вычислим производную функции

$$y = f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \tag{1}$$

т. е. производную произвольного многочлена по x с постоянными коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$. При этом нам удобно иногда будет пользоваться несколько измененным обозначением для производной $f'(x)$ функции $f(x)$. Именно, мы будем обозначать иногда эту производную через $(f(x))'$, т. е. положим

$$f'(x) = (f(x))'. \tag{2}$$

Пользуясь этим обозначением, мы можем теперь записать две формулы (15) и (22) § 1 в виде одной формулы

$$(x^2)' = 2x.$$

В первую очередь мы вычислим производную простейшего многочлена степени n, сводящегося к одночлену.

Именно,

$$y = f(x) = x^n. \tag{3}$$

Для вычисления производной функции (3) мы воспользуемся одной очень простой, но и очень важной формулой из алгебры, доказательство которой будет здесь приведено.

Для записи и доказательства этой алгебраической формулы мы введем в рассмотрение многочлен $\varphi_k(u, v)$ двух переменных u и v, который задается формулой

$$\varphi_k(u, v) = u^k + u^{k-1}v + \ldots + uv^{k-1} + v^k. \tag{4}$$

Таким образом, многочлен $\varphi_k(u, v)$ представляет собой сумму всех одночленов вида $u^i v^j$, где i и j — неотрицательные целые числа, связанные условием $i + j = k$.

Умножим многочлен $\varphi_k(u, v)$ на величину u, т. е. составим многочлен

$$\varphi_k(u, v) \cdot u. \tag{5}$$

Этот многочлен представляет собой сумму всех одночленов вида $u^{i+1}v^j$, где i и j — целые неотрицательные числа, связанные соотношением $i + j = k$. Таким образом, многочлен (5) представляет сумму всех одночленов вида $u^p v^q$, где p и q — целые неотрицательные числа, связанные соотношениями

$$p \geqslant 1, \quad p + q = k + 1.$$

Таким образом, многочлен (5) содержит все слагаемые, входящие в многочлен $\varphi_{k+1}(u, v)$, за исключением одного члена v^{k+1}, и потому мы имеем равенство

$$\varphi_k(u, v) \cdot u = \varphi_{k+1}(u, v) - v^{k+1}. \tag{6}$$

Точно так же, умножая многочлен $\varphi_k(u, v)$ на v, мы получим формулу

$$\varphi_k(u, v) \cdot v = \varphi_{k+1}(u, v) - u^{k+1}. \tag{7}$$

Вычитая из равенства (6) равенство (7), получаем

$$\varphi_k(u, v)(u - v) = u^{k+1} - v^{k+1}. \tag{8}$$

Заменяя в этом равенстве $k + 1$ через n и деля полученное соотношение на $u - v$, мы получим важную для нас формулу

$$\frac{u^n - v^n}{u - v} = \varphi_{n-1}(u, v), \tag{9}$$

где $\varphi_{n-1}(u, v)$ определяется формулой

$$\varphi_{n-1}(u, v) = u^{n-1} + u^{n-2}v + \ldots + uv^{n-2} + v^{n-1}. \quad (10)$$

Следует подчеркнуть, что здесь $n \geqslant 1$, так как $n = k + 1$, где $k \geqslant 0$. Заметим, что многочлен $\varphi_{n-1}(u, v)$ содержит ровно n членов.

Пользуясь формулой (9), мы без труда сосчитаем производную функции x^n. Для этого, согласно правилам, изложенным в § 1 (см. (21), § 1), мы должны составить предварительное отношение

$$\frac{\xi^n - x^n}{\xi - x} \quad (11)$$

и найти предел этого отношения при $\xi \to x$. В силу алгебраической формулы (9) имеем

$$\frac{\xi^n - x^n}{\xi - x} = \xi^{n-1} + \xi^{n-2}x + \ldots + \xi x^{n-2} + x^{n-1}, \quad (12)$$

где в правой части стоит ровно n членов. При переходе к пределу при $\xi \to x$, мы должны в правой части равенства (12) заменить ξ через x. При этом каждый член $\xi^i x^j$, где $i + j = n - 1$, превратится в член x^{n-1}. Таким образом, получаем

$$(x^n)' = \lim_{\xi \to x} \frac{\xi^n - x^n}{\xi - x} = nx^{n-1}$$

и окончательно имеем

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \quad (13)$$

При доказательстве формулы (13) мы не можем рассматривать случай $n = 0$, так как формула (9) верна только при $n \geqslant 1$. Таким образом, производная функции $x^0 = 1$ нами не вычислена. Проще вычислить производную функции $f(x) = c$, где c — константа. Для нее мы имеем

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = \frac{c - c}{\xi - x} = 0.$$

Таким образом, имеем

$$c' = 0, \quad (14)$$

т. е. производная константы равна нулю.

Для перехода от простейшего многочлена x^n к общему многочлену (1) мы должны вывести два общих правила нахождения производной. Именно, нахождение производной суммы двух функций и нахождение производной произведения константы на функцию. Правила эти следующие. Если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — две функции, то мы имеем

$$(f_1(x)+f_2(x))'=f_1'(x)+f_2'(x). \qquad (15)$$

Словами: *производная суммы двух функций равна сумме производных слагаемых.* Далее, если c есть константа, а $f(x)$ — некоторая функция, то имеем

$$(cf(x))'=cf'(x). \qquad (16)$$

Словами: *производная произведения константы на функцию равна произведению константы на производную функции.*

Докажем сперва правило (15). Мы имеем

$$(f_1(x)+f_2(x))'=\lim_{\xi\to x}\frac{f_1(\xi)+f_2(\xi)-(f_1(x)+f_2(x))}{\xi-x}=$$
$$=\lim_{\xi\to x}\left[\frac{f_1(\xi)-f_1(x)}{\xi-x}+\frac{f_2(\xi)-f_2(x)}{\xi-x}\right]=$$
$$=\lim_{\xi\to x}\frac{f_1(\xi)-f_1(x)}{\xi-x}+\lim_{\xi\to x}\frac{f_2(\xi)-f_2(x)}{\xi-x}=$$
$$=f_1'(x)+f_2'(x).$$

Таким образом, правило (15) доказано. Аналогично доказывается и правило (16). Мы имеем

$$(cf(x))'=\lim_{\xi\to x}\frac{cf(\xi)-cf(x)}{\xi-x}=\lim_{\xi\to x}c\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}=$$
$$=c\lim_{\xi\to x}\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}=cf'(x).$$

Таким образом, и правило (16) доказано.

Из правил (15) и (16) выведем одно обобщающее правило. Допустим, что нам заданы функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_m(x)$ и константы $c_1, c_2, \ldots, c_m$. Тогда мы имеем следующее правило:

$$(c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\ldots+c_mf_m(x))'=$$
$$=c_1f_1'(x)+c_2f_2'(x)+\ldots+c_mf_m'(x). \qquad (17)$$

Доказательство этого правила ведется индуктивно. Для $m=1$ оно совпадает с правилом (16). Далее, в силу правила (15) имеем

$$(c_1f_1(x)+\ldots+c_mf_m(x))'=$$
$$=(c_1f_1(x)+\ldots+c_{m-1}f_{m-1}(x))'+(c_mf_m(x))'=$$
$$=c_1f_1'(x)+\ldots+c_{m-1}f_{m-1}'(x)+c_mf_m'(x).$$

Здесь мы использовали метод индукции, именно, предположили, что для функций числом $m-1$ правило верно. Таким образом, правило (17) доказано.

Пользуясь правилами (17), (13) и (14), мы можем найти производную многочлена (1). Мы имеем

$$(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n)'=$$
$$=a_0(x^n)'+a_1(x^{n-1})'+\ldots+a_{n-1}(x)'+a_n'=$$
$$=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}.$$

Таким образом, правило нахождения производной многочлена (1) окончательно записывается в виде

$$(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n)'=$$
$$=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}. \quad (18)$$

§ 3. МАКСИМУМ И МИНИМУМ. ТЕОРЕМА РОЛЛЯ И ФОРМУЛА ЛАГРАНЖА

Уже само определение производной наводит на мысль, что она может быть хорошим средством исследования функции. Так, например, если известно, что производная $f'(x)$ функции $f(x)$ в точке x положительна, то интуитивно ясно, что вблизи этой точки функция $f(x)$ возрастает. Это видно, в частности, из геометрического смысла производной. Касательная в соответствующей точке к графику функции $f(x)$ направлена вверх. Точно так же обстоит дело и с отрицательностью производной. В этом случае интуитивно ясно, что вблизи точки x функция $f(x)$ убывает. Касательная к графику функции $f(x)$ в соответствующей точке направлена вниз. Уточним эти свойства производной.

Положительность и отрицательность производной. Согласно определению (см. § 1) производная $f'(x)$ функции $f(x)$ является пределом отношения

$$\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}=k \quad (1)$$

при $\xi \to x$. Отсюда следует, что если $f'(x) \neq 0$, то при ξ достаточно близком к x отношение (1), т. е. число k имеет тот же знак, что и $f'(x)$. Более точно, существует настолько малое положительное число ε, что при

$$|\xi - x| < \varepsilon \tag{2}$$

знак числа k совпадает со знаком $f'(x)$. Умножая равенство (1) на число $\xi - x$, получаем равенство

$$f(\xi) - f(x) = k(\xi - x). \tag{3}$$

Знак правой части этого равенства зависит от знаков его множителей, т. е. знаков чисел k и $\xi - x$. Чтобы охватить по возможности кратко все четыре возникающие здесь случая, выберем произвольно два значения ξ_1 и ξ_2 числа ξ, удовлетворяющих условию (2). Число ξ_1 возьмем слева от x, ξ_2 — справа от x. Таким образом, числа ξ_1 и ξ_2 удовлетворяют условиям

$$x - \varepsilon < \xi_1 < x < \xi_2 < x + \varepsilon. \tag{4}$$

Помня о том, что знак числа k совпадает со знаком производной $f'(x)$ и учитывая знаки правой части соотношения (3), мы можем записать следующие два результата:

$$\text{при } f'(x) > 0 \text{ имеем } f(\xi_1) < f(x) < f(\xi_2), \tag{5}$$

$$\text{при } f'(x) < 0 \text{ имеем } f(\xi_1) > f(x) > f(\xi_2). \tag{6}$$

Словесно результаты (5) и (6) можно описать следующим образом.

При $f'(x) > 0$ функция слева от точки x меньше, чем в точке x, а справа от точки x больше, чем в точке x. Иначе говоря, она *возрастает в точке* x.

При $f'(x) < 0$ функция слева от точки x больше, чем в точке x, а справа от точки x меньше, чем в точке x. Иначе говоря, она *убывает в точке* x.

Заметим, что если функция возрастает в точке x, т. е. для нее выполнены неравенства (5), то отношение $\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}$ положительно, но при $\xi \to x$ оно, оставаясь положительным, может стремиться к нулю, так что производная в точке возрастания не обязательно положительна: она только неотрицательна

$$f'(x) \geqslant 0. \tag{7}$$

Точно так же в точке x убывания (см. (6)) производная не обязательно отрицательна, но может быть и нулем, так что в точке убывания выполнено неравенство

$$f'(x) \leqslant 0. \tag{8}$$

Максимум и минимум. Говорят, что функция имеет локальный максимум в точке x, если во всех точках, достаточно близких к точке x, ее значения не превосходят значения функции в точке x. Или, более точно, существует настолько малое положительное число ε, что

$$\text{при } |\xi - x| < \varepsilon \text{ имеем } f(\xi) \leqslant f(x). \tag{9}$$

Точно так же говорят, что функция имеет локальный минимум в точке x, если при всех значениях аргумента, близких к точке x, функция имеет значения, не меньшие, чем в точке x. Более точно существует такое положительное число ε, что

$$\text{при } |\xi - x| < \varepsilon \text{ имеем } f(\xi) \geqslant f(x). \tag{10}$$

Обычно слово «локальный» опускают и говорят просто о максимумах и минимумах функции.

Оказывается, что *в точках максимума и минимума производная функции $f(x)$ обращается в нуль*:

$$f'(x) = 0. \tag{11}$$

Действительно, в точке максимума функция $f(x)$ не может иметь положительную производную, так как в случае положительной производной справа от x функция больше, чем в точке x (см. (5)), и, следовательно, точка x не является максимумом. Точно так же в случае максимума функция $f(x)$ не может иметь отрицательную производную, так как в этом случае слева от точки x она имеет значения, превосходящие значение в точке x (см. (6)). Остается лишь одна возможность $f'(x) = 0$, т. е. имеет место равенство (11).

Аналогично в точке минимума функция $f(x)$ не может иметь положительную производную, так как тогда слева от точки x ее значения меньше, чем в точке x (см. (5)). Точно также она не может иметь и отрицательную производную, так как тогда справа от точки x она имеет меньшее значение, чем в точке x (см. (6)). Итак, остается лишь одна возможность $f'(x) = 0$, т. е. имеет место равенство (11).

Таким образом, для отыскания значений аргумента, при которых функция имеет максимум или минимум, следует рассмотреть все значения x, для которых выполнено равенство (11), а затем уже детальнее выяснять вопрос.

Теорема Ролля. *Если функция $f(x)$ имеет равные значения для двух различных значений своего аргумента x_1 и x_2, т. е. имеет место равенство*

$$f(x_1) = f(x_2), \tag{12}$$

причем функция $f(x)$ определена на всем отрезке $[x_1, x_2]$, то внутри этого отрезка найдется такое значение θ, что

$$f'(\theta) = 0. \tag{13}$$

Термин «внутреннее значение» означает, что θ не совпадает с концами отрезка x_1 и x_2, т. е. не совпадает ни с числом x_1, ни с числом x_2, а лежит между ними.

Докажем это утверждение. Если функция $f(x)$ постоянна на всем отрезке $[x_1, x_2]$, то в произвольной внутренней точке отрезка имеет место соотношение $f'(\theta) = 0$ (см. § 2 (14)). Если функция $f(x)$ непостоянна на отрезке $[x_1, x_2]$, то имеет место по меньшей мере один из двух случаев.

Случай 1. В некоторых точках отрезка $[x_1, x_2]$ функция $f(x)$ больше, чем в его концах.

Случай 2. В некоторых точках отрезка $[x_1, x_2]$ функция $f(x)$ меньше, чем в его концах.

В первом случае функция $f(x)$ имеет максимум в некоторой внутренней точке θ отрезка $[x_1, x_2]$, и тогда в этой точке имеет место равенство (13) (см. (11)). Во втором случае функция $f(x)$ достигает своего минимума в одной из внутренних точек θ отрезка $[x_1, x_2]$, и тогда в этой точке имеет место равенство (13) (см. (11)). Таким образом, теорема Ролля доказана.

Нижеследующая формула Лагранжа является прямым следствием теоремы Ролля.

Формула Лагранжа конечного приращения функции. *Если x_1 и x_2 — два различных значения аргумента функции $f(x)$*, причем функция $f(x)$ определена на всем отрезке $[x_1, x_2]$, *то существует такое значение аргумента θ, лежащее внутри отрезка $[x_1, x_2]$, что имеет место равенство*

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\theta)(x_2 - x_1). \tag{14}$$

Для доказательства этого утверждения составим линейную функцию

$$g(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}x \tag{15}$$

и докажем, что функция

$$f(x) - g(x) \tag{16}$$

имеет одинаковые значения в точках x_1 и x_2, т. е. удовлетворяет условиям теоремы Ролля. В самом деле, мы имеем

$$g(x_2) - g(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}x_2 - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}x_1 = \\ = f(x_2) - f(x_1). \tag{17}$$

Далее мы имеем

$$(f(x_2) - g(x_2)) - (f(x_1) - g(x_1)) = \\ = (f(x_2) - f(x_1)) - (g(x_2) - g(x_1)) = 0 \tag{18}$$

(см. (17)). Таким образом, имеем

$$f(x_2) - g(x_2) = f(x_1) - g(x_1), \tag{19}$$

т. е. функция (16) имеет одинаковые значения в концах отрезка $[x_1, x_2]$, и потому в силу теоремы Ролля существует такое значение θ внутри отрезка $[x_1, x_2]$, что

$$(f(x) - g(x))' = 0 \quad \text{при} \quad x = \theta. \tag{20}$$

Далее мы имеем

$$g'(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \tag{21}$$

Из формул (20) и (21) получаем

$$0 = f'(\theta) - g'(\theta) = f'(\theta) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Умножая последнее соотношение на $x_2 - x_1$, мы получаем доказываемое соотношение (14). Итак, формула Лагранжа доказана.

Формула Лагранжа является сильным средством для изучения функции, или, что то же самое, ее графика. Сделаем из нее два важных вывода.

Если на отрезке $[x_1, x_2]$, где $x_1 < x_2$, функция $f(x)$ имеет положительную производную во всех точках, кроме, быть может, его концов, то на всем отрезке $[x_1, x_2]$ функция $f(x)$ возрастает. Более точно, если a_1 и a_2 — два значения аргумента, лежащие на отрезке

$[x_1, x_2]$, причем $a_1 < a_2$, то имеем

$$f(a_1) < f(a_2). \tag{22}$$

Действительно, в силу формулы (14) мы имеем

$$f(a_2) - f(a_1) = f'(\theta)(a_2 - a_1), \tag{23}$$

причем θ является внутренней точкой отрезка $[a_1, a_2]$, следовательно, и внутренней точкой отрезка $[x_1, x_2]$. Таким образом, правая часть равенства (23) положительна. Наше утверждение (22) доказано.

Если на отрезке $[x_1, x_2]$, где $x_1 < x_2$, функция $f(x)$ всюду имеет отрицательную производную, за исключением, быть может, концов отрезка $[x_1, x_2]$, то на всем отрезке $[x_1, x_2]$ она убывает. Более точно: если a_1 и a_2 — два значения аргумента, расположенные на отрезке $[x_1, x_2]$, причем $a_1 < a_2$, то имеем

$$f(a_2) < f(a_1). \tag{24}$$

Действительно, в силу формулы (14) мы имеем

$$f(a_2) - f(a_1) = f'(\theta)(a_2 - a_1), \tag{25}$$

где θ — внутренняя точка отрезка $[a_1, a_2]$, т. е. внутренняя точка и отрезка $[x_1, x_2]$. Таким образом, правая часть соотношения (25) отрицательна, и, следовательно, утверждение (24) доказано.

Вторая производная. Производная $f'(x)$ функции $f(x)$ сама есть функция, и потому можно взять ее производную $(f'(x))'$. Она называется *второй производной* функции $f(x)$ и обозначается через $f''(x)$. Таким образом,

$$f''(x) = (f'(x))'. \tag{26}$$

$f'(x)$ и $f''(x)$ называются первой и второй производными функции $f(x)$. Аналогично можно определить производные любого порядка функции $f(x)$, но мы будем пользоваться только первой и второй производными.

Различение максимума и минимума. Для того чтобы функция $f(x)$ имела максимум или минимум при $x = x_0$, необходимо, чтобы было

$$f'(x_0) = 0 \tag{27}$$

(см. (11)). Но это равенство не является достаточным условием, для того чтобы функция $f(x)$ имела максимум или минимум в точке $x = x_0$, и, кроме того, оно не дает возможности сделать различие между максимумом и минимумом. Оказывается, что достаточное условие дается второй производной, именно, если

$$f''(x_0) \neq 0, \tag{28}$$

то при выполнении условия (27) функция $f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ либо максимум, либо минимум, а знак величины $f''(x_0)$ дает возможность различить максимум и минимум, именно, если

$$f''(x_0) < 0, \tag{29}$$

то имеем максимум, а если

$$f''(x_0) > 0, \tag{30}$$

то имеем минимум.

Докажем это утверждение. Если имеет место неравенство (29), то первая производная $(f'(x))'$ функции $f'(x)$ отрицательна. Кроме того, функция $f'(x)$ обращается в нуль при $x = x_0$ (см. (27)). Таким образом,

$$\text{при } x < x_0 \text{ имеем } f'(x) > 0, \tag{31}$$

$$\text{при } x > x_0 \text{ имеем } f'(x) < 0. \tag{32}$$

Итак, при подходе к точке x_0 слева функция $f(x)$ возрастает, а при отходе от точки x_0 вправо она убывает, и, следовательно, мы имеем максимум. Аналогично, если имеет место неравенство (30), то первая производная $(f'(x))'$ функции $f'(x)$ положительна и при $x = x_0$ функция $f'(x)$ обращается в нуль. Таким образом,

$$\text{при } x < x_0 \text{ имеем } f'(x) < 0, \tag{33}$$

$$\text{при } x > x_0 \text{ имеем } f'(x) > 0. \tag{34}$$

Итак, при подходе к точке x_0 слева функция $f(x)$ убывает, а при отходе от точки x_0 вправо она возрастает, и, следовательно, мы имеем минимум.

§ 4. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ

Напомним определение второй производной $f''(x)$ функции $f(x)$. Мы имеем

$$f''(x) = (f'(x))' \tag{1}$$

(см. § 3, (26)). Функции $f'(x)$ и $f''(x)$ называются соответственно первой и второй производными функции $f(x)$.

Применим результаты § 3 к исследованию некоторых функций, задаваемых многочленами. Рассмотрим прежде всего функцию

$$y = f(x) = x^3 - px, \tag{2}$$

где p — постоянная. График L этой функции называется *кубической параболой*.

Отметим прежде всего совершенно специальные, но очень заметные свойства кубической параболы. Кубическая парабола центрально симметрична относительно начала координат. В самом деле, если точка (x, y) принадлежит кубической параболе, т. е. величины x и y удовлетворяют уравнению (2), то точка $(-x, -y)$ также удовлетворяет этому уравнению. Именно, имеем

$$(-y) = (-x)^3 - p(-x). \tag{3}$$

Таким образом, наряду с точкой (x, y) к линии L принадлежит и симметричная к ней относительно начала координат точка $(-x, -y)$.

Найдем далее точки пересечения линии L с осью абсцисс, т. е. корни уравнения

$$x^3 - px = 0. \tag{4}$$

Уравнение это имеет три корня

$$x = 0, \quad x = \pm\sqrt{p}. \tag{5}$$

Последние два корня при $p < 0$ мнимые и потому не имеют геометрического смысла. При $p > 0$ все три корня (5) различны, и, следовательно, имеются три точки пересечения линии L с осью абсцисс. При $p = 0$ три корня сливаются в один трехкратный корень $x = 0$.

Производная функции (2) задается формулой

$$f'(x) = 3x^2 - p. \tag{6}$$

Изучая знак этой функции при различных значениях x, мы можем разбить линию L на участки возрастания и убывания функции $f(x)$ и найти точки максимума и минимума. Для той и другой цели нам следует найти корни уравнения

$$f'(x) = 3x^2 - p = 0. \tag{7}$$

При отрицательном p функция $f'(x)$ (см. (6)) положительна при любом значении x и, следовательно, функция $f(x)$ возрастает на всем протяжении изменения x: $-\infty \leq x \leq +\infty$.

При $p=0$ функция $f'(x)$ (см. (6)) положительна при всех значениях $x \neq 0$. Таким образом, она возрастает при $-\infty < x < 0$, $0 < x < +\infty$. А так как на первом из этих участков функция x^3 отрицательна, на втором положительна, то она возрастает на всем протяжении изменения x от $-\infty$ до $+\infty$.

В точке $x=0$, где $f'(x)=0$, функция $f(x)$ также возрастает. Таким образом, при $x=0$, где $f'(x)=0$, функция x^3 не имеет ни максимума ни минимума. Отсюда видно, что условие (11) § 3, необходимое для того, чтобы функция $f(x)$ в точке x имела максимум или минимум, не является достаточным.

В случае положительного p уравнение (7) имеет два корня

$$x_1 = -\sqrt{p/3}, \quad x_2 = \sqrt{p/3}. \tag{8}$$

Следует проверить, не имеет ли функция $f(x)$ в точках x_1 и x_2 локальных максимумов или минимумов. Те же точки x_1 и x_2 разбивают все протяжение изменения x на участки

$$-\infty < x \leqslant x_1, \quad x_1 \leqslant x \leqslant x_2,$$
$$x_2 \leqslant x < +\infty. \tag{9}$$

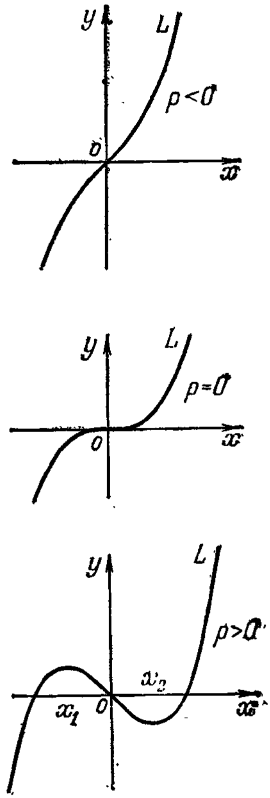

Рис. 2.

На первом из этих участков функция $f'(x)$ положительна, на втором — отрицательна, на третьем — вновь положительна. Таким образом, функция $f(x)$ возрастает на первом участке, убывает на втором и возрастает на третьем. Отсюда же видно, что точка x_1 есть точка максимума, а точка x_2 — точка минимума. Таким образом, кубическая парабола имеет три существенно различные формы в зависимости от значения p: первая $p<0$, вторая $p=0$, третья $p>0$. На рис. 2 кубическая парабола изображена во всех трех случаях.

Рассмотрим уравнение

$$x^3 - px = c. \tag{10}$$

Геометрически ясно, что при $p < 0$ это уравнение имеет лишь один действительный корень. При $p = 0$ это уравнение имеет также лишь один действительный корень, за исключением случая $c = 0$, когда имеется тройной корень $x = 0$. Если $p > 0$, уравнение (10) имеет три корня при

$$f(x_2) \leqslant c \leqslant f(x_1), \tag{11}$$

причем в крайних положениях значения c на отрезке (11) имеется один простой и один двойной корень. Вне отрезка (11) имеется лишь один действительный корень уравнения (10).

Кубическая парабола (2) всегда проходит через начало координат. Тангенс угла наклона ее в начале координат определяется формулой

$$f'(0) = -p. \tag{12}$$

Таким образом, сама касательная имеет уравнение

$$y = g(x) = -px. \tag{13}$$

Эта касательная разбивает всю плоскость на две части: верхнюю, лежащую над ней, и нижнюю, лежащую под ней. Произвольная точка (x^*, y^*) плоскости лежит над прямой (13), если

$$y^* > -px^*. \tag{14}$$

Точка (x^*, y^*) лежит под прямой (13), если

$$y^* < -px^*. \tag{15}$$

Выясним, в какой из рассмотренных двух полуплоскостей лежит точка (x, y) кубической параболы, т. е. точка, удовлетворяющая уравнению (2). Для выяснения этого вопроса мы должны сравнить величину

$$x^3 - px \tag{16}$$

с величиной

$$-px. \tag{17}$$

Ясно, что при $x < 0$ величина (16) меньше величины (17), а при $x > 0$ величина (16) больше величины (17).

При $x < 0$ точка (x, y) кубической параболы удовлетворяет условию (15), т. е. лежит под касательной, а при $x > 0$ эта точка удовлетворяет условию (14), т. е. лежит над касательной. Следовательно, в начале координат кубическая парабола переходит с одной стороны касательной на другую ее сторону.

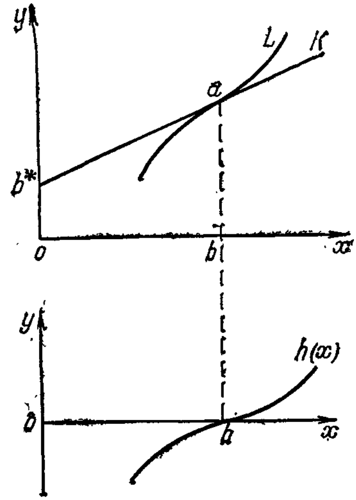

Рис. 3.

Явление перехода линии с одной стороны касательной на другую вблизи точки касания имеет общий интерес. Займемся им.

Точка перегиба. Пусть L — некоторая линия, a — точка этой линии и K — касательная к линии L в точке a (рис. 3). Точка a называется *точкой перегиба* линии L, если вблизи ее линия L переходит с одной стороны касательной на другую. Оказывается, что если L является графиком некоторой функции

$$y = f(x), \tag{18}$$

то в точке перегиба a линии L абсцисса b точки a удовлетворяет условию

$$f''(b) = 0. \tag{19}$$

Докажем это утверждение. Уравнение касательной K мы можем записать в виде

$$y = g(x) = f'(b) \cdot x + b^*. \tag{20}$$

Здесь $f'(b)$ есть тангенс угла наклона касательной к оси абсцисс, а b^* — некоторая константа, которая определяется условием

$$f(b) - g(b) = 0. \tag{21}$$

Это условие выражает тот факт, что касательная в точке a к линии L проходит через точку a. Рассмотрим функцию

$$h(x) = f(x) - g(x). \tag{22}$$

Эта функция удовлетворяет двум условиям

$$h(b)=0, \quad h'(b)=0. \tag{23}$$

Таким образом, график функции

$$y=h(x) \tag{24}$$

касается оси абсцисс в точке $x=b$ (см. рис. 3). Касательная K разбивает плоскость чертежа на верхнюю полуплоскость и нижнюю полуплоскость. Если линия L переходит в точке a из верхней полуплоскости в нижнюю полуплоскость, то график функции (24) пересекает ось абсцисс сверху вниз. При этом функция $h(x)$ убывает. Если, наоборот, линия L пересекает касательную, переходя из нижней полуплоскости в верхнюю полуплоскость, то график функции (24) пересекает ось абсцисс снизу вверх. При этом функция $h(x)$ возрастает. Если имеет место первый случай, т. е. $h(x)$ убывает вблизи точки $x=b$, то производная ее вблизи точки b не может быть положительной, т. е. вблизи точки $x=b$ она удовлетворяет условию

$$h'(x) \leqslant 0. \tag{25}$$

Таким образом, функция $h'(x)$ имеет в точке $x=b$ максимум, и, следовательно, ее производная равна нулю

$$(h'(x))'=h''(x)=0 \quad \text{при} \quad x=b,$$

т. е.

$$h''(b)=0. \tag{26}$$

Если имеет место второй случай, т. е. функция $h(x)$ вблизи точки $x=b$ возрастает, то производная ее не может быть отрицательной, т. е. вблизи точки $x=b$ мы имеем неравенство

$$h'(x) \geqslant 0. \tag{27}$$

Таким образом, функция $h'(x)$ имеет минимум в точке $x=b$, потому ее производная в этой точке равна нулю, т. е. мы имеем

$$(h'(x))'=h''(x)=0 \quad \text{при} \quad x=b.$$

Таким образом, в обоих случаях получаем

$$h''(b)=0. \tag{28}$$

Заметим далее, что для функции $g(x)$, линейной относительно x, имеет место равенство

$$g''(x)=0. \tag{29}$$

Таким образом, из формул (28) и (29) мы получаем

$$0=(f(x)-g(x))''=f''(x)-0 \quad \text{при} \quad x=b,$$

и, следовательно,

$$f''(b)=0. \tag{30}$$

Таким образом, доказано, что в точке перегиба графика функции $f(x)$ имеет место равенство (19). Не следует, однако, думать, что это равенство является достаточным условием для того, чтобы точка с абсциссой b была точкой перегиба графика функции (18).

Вернемся теперь к кубической параболе. Вычислим вторую производную функции (2). Мы имеем

$$f''(x)=(x^3-px)''=6x. \tag{31}$$

Мы уже установили, что начало координат является точкой перегиба кубической параболы (2). Выражение (31) для второй производной функции (2) показывает, что начало координат является единственной точкой перегиба кубической параболы, так как вторая производная (31) обращается в нуль лишь при $x=0$.

Ниже приводятся три задачи для самостоятельного решения. Первая из них — легкая, вторая и третья представляют собой вполне серьезные математические проблемы, требующие больших усилий для самостоятельного решения.

Задача 1. Изменить масштабы длины на осях системы координат, в которой задано уравнение (2), т. е. ввести вместо старых координат x и y новые координаты x_1 и y_1, положив

$$x=kx_1, \quad y=ly_1, \tag{32}$$

где k и l — действительные положительные числа. Сделать это так, чтобы после преобразования координат (32) уравнение (2) имело один из трех следующих видов:

$$y_1=x_1^3-x_1, \quad y_1=x_1^3, \quad y_1=x_1^3+x_1. \tag{33}$$

Задача 2. Исследовать функцию

$$y=f(x)=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3. \tag{34}$$

Для этого вычислить производную $f'(x)$ и при помощи нее разбить весь интервал изменения x: $-\infty<x<+\infty$ на участки, на которых функция (34) возрастает и убывает. Далее вместо старых координат x и

y ввести новые координаты x_1 и y_1, связанные со старыми соотношениями

$$x = x_1 + \alpha, \quad y = y_1 + \beta. \tag{35}$$

Такое преобразование координат означает параллельное смещение старой системы координат. Сделать это таким образом, чтобы в новой системе координат уравнение кривой имело вид (2). Сделать это можно двумя способами. Непосредственно подобрать величины α и β так, чтобы полученное уравнение имело вид (2), или же найти точку перегиба графика L функции (34) и перенести в эту точку перегиба путем параллельного сдвига начало координат. Найти формулу

$$p = p(a_1, a_2, a_3), \tag{36}$$

выражающую коэффициент p в новой системе координат через старые коэффициенты. Поскольку уравнение

$$f(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0 \tag{37}$$

при $p(a_1, a_2, a_3) < 0$ (см. (36)) может иметь только один действительный корень, при $p = 0$ может иметь либо только один действительный корень, либо один тройной действительный корень и при $p > 0$ может иметь три действительных корня, выяснить, при каких условиях в последнем случае имеются три действительных корня.

Задача 3. Изучить функцию

$$f(x) = x^4 + b_1x^3 + b_2x^2 + b_3x + b_4 \tag{38}$$

и ее график. Для этого вычислить производную $f'(x)$ функции (38) и, пользуясь результатами, полученными в задаче 2, качественно выяснить возможности поведения графика функции (38), в первую очередь число возможных максимумов и минимумов, и выяснить зависимость этого числа от коэффициентов b_1, b_2, b_3, b_4 функции (38). Найти точки перегиба и вычислить их координаты через коэффициенты b_1, b_2, b_3, b_4.

§ 5. ПРОИЗВОДНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И НЕКОТОРЫЕ ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Здесь мы в первую очередь вычислим производные тригонометрических функций $\sin x$ и $\cos x$, где угол x измеряется не в градусах, а в радианах. При этом вычислении будет использован один факт, приводимый без доказательства. Он доказывается громоздко и неинтересно, а поверить в него легко. Факт этот следующий.

Пусть K — некоторая окружность, а a и b — две ее точки, не находящиеся в диаметрально противоположном положении. Длину меньшей из дуг (ab) окружности K мы обозначим через $s(ab)$, а длину хорды ab через $l(ab)$. Очевидно, что

$$s(ab) > l(ab). \qquad (1)$$

Мы принимаем без доказательства, что отношение $\frac{l(ab)}{s(ab)}$ стремится к единице, когда точки a и b неограниченно сближаются, т. е. когда $s(ab) \to 0$. В виде формулы это можно записать так

$$\lim_{s(ab)\to 0} \frac{l(ab)}{s(ab)} = 1. \qquad (2)$$

Из этого не доказанного утверждения мы уже совершенно строго выведем другое, которым и будем пользоваться. Для этого в координатной плоскости выберем окружность K радиуса 1 с центром в начале координат o (рис. 4). Через o' обозначим самую правую точку окружности K, т. е. точку пересечения ее с положительной полуосью абсцисс. От точки o' отложим вверх по окружности дугу длины $h < \pi/2$ и конец ее обозначим через b. Точно также от точки o' отложим вниз дугу длины h и обозначим конец ее через a. Тогда мы имеем

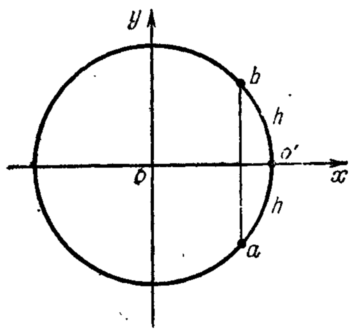

Рис. 4.

$$l(ab) = 2\sin h, \quad s(ab) = 2h. \qquad (3)$$

Таким образом, из соотношения (2) получаем

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = \lim_{2h\to 0} \frac{2\sin h}{2h} = 1.$$

Таким образом, окончательно получаем нужное нам соотношение

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1. \qquad (4)$$

Формула эта доказана для положительного h, но она верна также и для отрицательного h, так как при изменении знака h знак $\sin h$ меняется.

Докажем теперь уже совершенно строго еще одно нужное нам в дальнейшем утверждение

$$\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h} = 0. \qquad (5)$$

Мы докажем это соотношение, заменив его более сильным. Именно, мы заменим стоящую в знаменателе величину h меньшей величиной $\sin h$. Мы имеем

$$\frac{1-\cos h}{\sin h} = \frac{(1-\cos h)(1+\cos h)}{\sin h\,(1+\cos h)} = \frac{1-\cos^2 h}{\sin h\,(1+\cos h)} =$$
$$= \frac{\sin^2 h}{\sin h\,(1+\cos h)} = \frac{\sin h}{1+\cos h}.$$

Из этого непосредственно следует, что

$$\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{\sin h} = 0,$$

а это утверждение, как было уже замечено, сильнее, чем доказываемое нами утверждение (5).

При вычислении производных $\sin' x$ и $\cos' x$ мы воспользуемся определением производной (см. § 1 (21)), но при этом несколько изменим обозначения. Именно, положим $\xi - x = h$, т. е. $\xi = x + h$. Ясно, что

при $\xi \to x$ имеем $h \to 0$.

Величина h называется *приращением аргумента*. Пользуясь этими обозначениями, мы можем переписать определение (21) § 1 производной в виде

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \qquad (6)$$

Величина $f(x+h)-f(x)$ называется *приращением функции*, соответствующим приращению h аргумента. Таким образом, для вычисления производной $\sin' x$ нам нужно вычислить величину

$$\sin(x+h) - \sin x = \sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x =$$
$$= \sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h.$$

Таким образом, мы получаем

$$\sin' x = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\sin h \cos x}{h} = \cos x.$$

(см. (5) и (4)). Итак, окончательно мы получаем

$$\sin' x = \cos x. \tag{7}$$

Совершенно так же будем вычислять производную $\cos' x$. Для ее нахождения нам нужно вычислить разность

$$\cos(x+h) - \cos x = \cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x =$$
$$= \cos x (\cos h - 1) - \sin h \sin x.$$

Мы получаем

$$\cos' x = \lim_{h \to 0} \frac{\cos x (\cos h - 1)}{h} - \lim_{h \to 0} \frac{\sin h \sin x}{h} = -\sin x$$

(см. (5) и (4)). Таким образом, окончательно получаем

$$\cos' x = -\sin x. \tag{8}$$

Производная произведения и дроби. Мы уже умеем находить производную суммы двух функций (см. § 2, (15)). Очевидно, что очень важно уметь находить производную произведения двух функций и производную отношения двух функций. Обозначим через $u(x)$ и $v(x)$ две функции переменного x и будем искать производные двух функций $u(x) v(x)$, $\frac{u(x)}{v(x)}$.

При нахождении этих производных мы будем пользоваться определением производной (см. § 1, (21)). Таким образом, для нахождения производной произведения нам нужно прежде всего вычислить выражение

$$u(\xi) v(\xi) - u(x) v(x) =$$
$$= u(\xi) v(\xi) - u(x) v(\xi) + u(x) v(\xi) - u(x) v(x) =$$
$$= (u(\xi) - u(x)) v(\xi) + u(x)(v(\xi) - v(x)).$$

Таким образом, получаем

$$(u(x) v(x))' = \lim_{\xi \to x} \frac{u(\xi) v(\xi) - u(x) v(x)}{\xi - x} =$$
$$= \lim_{\xi \to x} \frac{(u(\xi) - u(x)) v(\xi)}{\xi - x} + \lim_{\xi \to x} \frac{u(x)(v(\xi) - v(x))}{\xi - x} =$$
$$= u'(x) v(x) + u(x) v'(x).$$

Таким образом, окончательно получаем важнейшую формулу

$$(u(x) v(x))' = u'(x) v(x) + u(x) v'(x). \tag{9}$$

Совершенно так же будем искать производную дроби $\frac{u(x)}{v(x)}$. Для этого нам прежде всего нужно посчитать выражение

$$\frac{u(\xi)}{v(\xi)}-\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{u(\xi)v(x)-v(\xi)u(x)}{v(\xi)v(x)}=$$
$$=\frac{u(\xi)v(x)-u(x)v(x)+u(x)v(x)-v(\xi)u(x)}{v(\xi)v(x)}=$$
$$=\frac{(u(\xi)-u(x))v(x)-(v(\xi)-v(x))u(x)}{v(\xi)v(x)}.$$

Таким образом, мы получаем

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\lim_{\xi\to x}\frac{\frac{u(\xi)}{v(\xi)}-\frac{u(x)}{v(x)}}{\xi-x}=$$
$$=\lim_{\xi\to x}\frac{\frac{u(\xi)-u(x)}{\xi-x}v(x)}{v(\xi)v(x)}-\lim_{\xi\to x}\frac{\frac{v(\xi)-v(x)}{\xi-x}u(x)}{v(\xi)v(x)}=$$
$$=\frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{(v(x))^2}.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{(v(x))^2}. \tag{10}$$

Производная сложной функции. Будем исходить из двух заданных функций $\varphi(x)$ переменного x и $\psi(y)$ переменного y. Положим

$$y=\varphi(x). \tag{11}$$

Подставим это выражение для y в функцию $\psi(y)$. Тогда мы получим функцию

$$f(x)=\psi(y)=\psi(\varphi(x)). \tag{12}$$

Эта новая функция $f(x)$, образованная из двух функций $\psi(y)$ и $\varphi(x)$, называется *сложной функцией*. Наша задача заключается в том, чтобы найти производную $f'(x)$ сложной функции $f(x)$. При вычислении мы будем пользоваться определением производной (см. § 1 (21)). Положим

$$\eta=\varphi(\xi). \tag{13}$$

Тогда

$$\text{при } \xi\to x \text{ имеем } \eta\to y. \tag{14}$$

Согласно определению производной

$$\psi'(y) = \lim_{\eta \to y} \frac{\psi(\eta) - \psi(y)}{\eta - y}. \tag{15}$$

Теперь мы имеем

$$f'(x) = \lim_{\xi \to x} \frac{\psi(\eta) - \psi(y)}{\xi - x} = \lim_{\xi \to x} \frac{\psi(\eta) - \psi(y)}{\eta - y} \cdot \frac{\varphi(\xi) - \varphi(x)}{\xi - x}.$$

Таким образом, имеем

$$f'(x) = \lim_{\eta \to y} \frac{\psi(\eta) - \psi(y)}{\eta - y} \cdot \lim_{\xi \to x} \frac{\varphi(\xi) - \varphi(x)}{\xi - x} = \psi'(y) \cdot \varphi'(x),$$

причем вместо y в полученный результат следует подставить его значение $y = \varphi(x)$.

Таким образом, окончательно получаем

$$(\psi(\varphi(x)))' = \psi'(\varphi(x))\,\varphi'(x). \tag{16}$$

Объясним написанную формулу словами: для того чтобы получить производную сложной функции $f(x) = \psi(\varphi(x))$, мы прежде всего должны сосчитать производную функции $\psi(y)$ по переменному y, т. е. найти функцию $\psi'(y)$, а затем подставить в полученное выражение вместо y величину $\varphi(x)$. После этого полученное выражение мы должны умножить на $\varphi'(x)$.

Производная рациональной степени x. Пользуясь полученными общими результатами, вычислим производную функции

$$f(x) = x^r, \tag{17}$$

где r — рациональное число. Рассмотрим сперва случай, когда r есть отрицательное целое число

$$r = -n, \tag{18}$$

где n — положительное целое число. В этом случае мы имеем

$$x^r = \frac{1}{x^n}. \tag{19}$$

и для вычисления производной от x^r мы можем воспользоваться правилом (10). В силу этого правила и правила (13) § 2 имеем

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{1' \cdot x^n - 1 \cdot nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1} = rx^{r-1}$$

(см. (18) и (19)).

Таким образом, для целого отрицательного r получаем

$$(x^r)' = rx^{r-1}. \qquad (20)$$

Пусть теперь

$$r = \frac{p}{q}, \qquad (21)$$

где p и q — целые числа и $q \neq 0$. Для нахождения производной функции x^r воспользуемся правилом (16). Мы положим при этом

$$y = \varphi(x) = x^{p/q}, \quad \psi(y) = y^q. \qquad (22)$$

Тогда имеем $\psi(\varphi(x)) = x^p$. Беря производную по x от этого равенства, и применяя к левой части правило (16), получаем

$$qy^{q-1} \cdot \varphi'(x) = px^{p-1}.$$

Подставляя в это равенство $y = \varphi(x)$, получаем

$$qx^{\frac{p}{q}(q-1)} \cdot \varphi'(x) = px^{p-1}.$$

Решая это уравнение относительно величины $\varphi'(x)$, получаем

$$\varphi'(x) = \frac{p}{q} x^{p-1-\frac{p}{q}(q-1)} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1} = rx^{r-1}.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$(x^r)' = rx^{r-1}. \qquad (23)$$

Итак, при произвольном рациональном числе r получаем то же правило нахождения производной, что и для целого числа n (см. § 2 (13)).

Производная функции $\operatorname{tg} x$. Для нахождения производной этой функции воспользуемся правилом (10). Именно, положим

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Тогда в силу правила (10) мы имеем, учитывая (7) и (8),

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{\sin' x \cos x - \cos' x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x. \qquad (24)$$

§ 6. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Всякий раз, когда в математике рассматривается какая-либо операция, возникает вопрос об операции, к ней обратной. Так, наряду с операцией сложения рассматривается обратная к ней операция вычитания. Наряду с операцией умножения рассматривается обратная к ней операция деления, наряду с операцией возведения в степень рассматривается обратная к ней операция извлечения корня. При рассмотрении обратной операции возникают два основных вопроса: ее осуществимость и ее единственность. Так, если рассматривать только действительные числа, то извлечение квадратного корня не всегда возможно. Нельзя извлечь квадратный корень из отрицательного числа. Точно так же извлечение квадратного корня не является операцией однозначной, так как при извлечении квадратного корня из положительного числа мы получаем два его значения: положительное и отрицательное. Теперь, когда мы ввели операцию дифференцирования, возникает вопрос об операции, обратной к ней, которая называется операцией *интегрирования*. Для операции интегрирования мы должны будем решить два основных вопроса: вопрос об осуществимости операции интегрирования и вопрос об единственности операции интегрирования. Перейдем к точным математическим формулировкам. Если задана функция $f(x)$, то функция $h(x)$, заданная для тех же значений аргумента, что и $f(x)$, и удовлетворяющая условию

$$h'(x) = f(x), \tag{1}$$

называется *интегралом* функции $f(x)$ или *первообразной* для функции $f(x)$. Переход от заданной функции $f(x)$ к функции $h(x)$, удовлетворяющей уравнению (1), является операцией, обратной к операции дифференцирования, и называется *операцией интегрирования*. Сразу же видно, что операция интегрирования неоднозначна. Именно, если функция $h(x)$ удовлетворяет уравнению (1), то функция $h(x)+c$, где c — константа, удовлетворяет тому же уравнению. Действительно, мы имеем

$$(h(x)+c)' = h'(x)+c' = h'(x)+0 = f(x) \tag{2}$$

(см. § 2 (14)). Оказывается, однако, что вся неоднозначность операции интегрирования сводится к прибавлению константы. Докажем это.

Докажем прежде всего, что если функция $h(x)$ удовлетворяет уравнению

$$h'(x) = 0, \tag{3}$$

то функция $h(x)$ есть константа

$$h(x) = c. \tag{4}$$

Это утверждение верно, однако, лишь в том случае, когда множество допустимых значений аргумента x функции $h(x)$ связно. *Связность* означает, что наряду с любыми двумя допустимыми значениями аргумента x_1 и x_2 функции $h(x)$ допустимым значением аргумента является и любое число, промежуточное между x_1 и x_2. Об этом никогда не следует забывать. Докажем теперь, что из соотношения (3) следует соотношение (4). Пусть x_1 и x_2 — два произвольных значения аргумента функции $h(x)$. Так как множество значений аргумента функции $h(x)$ связно, то она определена на всем отрезке $[x_1, x_2]$, и потому в силу формулы Лагранжа (см. § 3, (14)) имеем

$$h(x_2) - h(x_1) = h'(\theta)(x_2 - x_1). \tag{5}$$

Так как $h'(\theta) = 0$ (см. (3)), то из соотношения (5) мы получаем соотношение (4). Пусть теперь $h_1(x)$ и $h_2(x)$ — две функции, удовлетворяющие уравнениям

$$h_1'(x) = f(x), \quad h_2'(x) = f(x), \tag{6}$$

так что функции $h_1(x)$ и $h_2(x)$ являются первообразными одной и той же функции $f(x)$. Докажем, что тогда имеет место соотношение

$$h_2(x) = h_1(x) + c, \tag{7}$$

где c — константа. Действительно, положим $h(x) = h_2(x) - h_1(x)$. Тогда имеем

$$h'(x) = (h_2(x) - h_1(x))' = h_2'(x) - h_1'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

и, следовательно, функция $h(x)$ является константой. А отсюда следует, что имеет место равенство (7). При доказательстве мы использовали тот факт, что функции $h_1(x)$, $h_2(x)$, а следовательно, и $f(x)$ заданы на связном множестве. Решение $h(x)$ уравнения (1) записывается в виде

$$h(x) = \int f(x)\,dx. \tag{8}$$

Знак $\int$ в формуле (8) читается: *интеграл.* Так как эта формула определяет функцию $h(x)$ неоднозначно, а лишь с точностью до постоянного слагаемого, то выписанный в правой части формулы интеграл называется *неопределенным.*

Вопрос о нахождении решения $h(x)$ уравнения (1) при заданной функции $f(x)$ мы в настоящее время можем положительно решить при некоторых конкретных функциях $f(x)$, причем метод решения сводится практически к угадыванию решения на основе тех формул, которые были даны в §§ 2—5. Так, если функция $f(x)$ есть многочлен

$$f(x)=c_0x^n+c_1x^{n-1}+\ldots+c_{n-1}x+c_n, \tag{9}$$

то, пользуясь формулой (18) § 2, мы можем найти функцию $h(x)$. Именно, имеем

$$h(x)=\int(c_0x^n+c_1x^{n-1}+\ldots+c_{n-1}x+c_n)\,dx=$$
$$=\frac{c_0}{n+1}x^{n+1}+\frac{c_1}{n}x^n+\ldots+\frac{c_{n-1}}{2}x^2+c_nx+c, \tag{10}$$

где c — произвольная константа.

Точно так же из формул (8) и (7) § 5 следует

$$\int\sin x\,dx=-\cos x+c,\quad \int\cos x\,dx=\sin x+c, \tag{11}$$

где c — произвольные константы.

Из формулы (24) § 5 следует

$$\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x+c. \tag{12}$$

Существует много различных способов нахождения неопределенных интегралов, но все они практически сводятся к угадыванию. Здесь мы не будем их излагать. Дадим лишь одно общее правило. Если для функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_m(x)$ известны их первообразные $h_1(x)$, $h_2(x)$, ..., $h_m(x)$, так что выполнены соотношения $h_i'(x)=f_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, m)$, то для функции

$$f(x)=c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\ldots+c_mf_m(x), \tag{13}$$

где c_1, c_2, ..., c_m суть константы, мы можем выписать неопределенный интеграл

$$\int f(x)\,dx=c_1h_1(x)+c_2h_2(x)+\ldots+c_mh_m(x)+c, \tag{14}$$

где c — произвольная константа.

Дадим простое, но очень важное применение полученных результатов к одной задаче механики.

Рассмотрим движение точки по прямой линии. Для математического описания этого движения примем нашу прямую за ось абсцисс, а положение точки в момент времени t обозначим через $x(t)$, подразумевая под $x(t)$ как саму точку, так и ее абсциссу. Функция $x(t)$ времени t полностью описывает движение точки в зависимости от времени. Если t и τ — два момента времени, причем $t < \tau$, то за отрезок времени $\tau - t$ точка проходит путь $x(\tau) - x(t)$, и средняя скорость движения точки $x(t)$ на отрезке времени $[t, \tau]$ определяется, естественно, формулой

$$\frac{x(\tau) - x(t)}{\tau - t}. \tag{15}$$

Чем ближе значение τ к значению t, тем точнее дробь (15) определяет скорость движения в момент времени t. Таким образом, эта скорость $v(t)$ определяется формулой

$$v(t) = \lim_{\tau \to t} \frac{x(\tau) - x(t)}{\tau - t}. \tag{16}$$

Правая часть этого равенства представляет собой не что иное, как производную функции $x(t)$ по t, так что скорость $v(t)$ в момент времени t движения точки $x(t)$ определяется формулой

$$v(t) = x'(t). \tag{17}$$

Если скорость $v(t)$ движения точки не зависит от t, т. е. точка движется с постоянной скоростью $v(t) = v$, где v — постоянная величина, то положение точки $x(t)$ следует искать из уравнения

$$x'(t) = v. \tag{18}$$

Решение этого уравнения, согласно формуле (10), записывается в виде

$$x = vt + c, \tag{19}$$

где c — постоянная величина. Для нахождения этой постоянной величины обозначим через x_0 положение точки $x(t)$ в момент времени $t = 0$. Подставляя $x_0 = x(0)$ в соотношение (19), получаем

$$x(0) = x_0 = c. \tag{20}$$

Таким образом, решение уравнения (18) записывается в виде

$$x(t) = x_0 + vt, \tag{21}$$

где x_0 — есть положение точки в начальный момент времени $t = 0$, а v — постоянная скорость движения точки. Уравнение (21) описывает движение точки с постоянной скоростью v.

Если скорость движения точки непостоянна, то наряду со скоростью рассматривается другая важная величина — ускорение, которое характеризует изменение скорости. Аналогично тому, как мы определили среднюю скорость, мы определим среднее ускорение на отрезке времени от t до τ. Оно определяется формулой

$$\frac{v(\tau) - v(t)}{\tau - t}. \tag{22}$$

Чем ближе момент времени τ к моменту времени t, тем точнее формула (22) дает ускорение движения точки в момент времени t. Таким образом, точное значение $u(t)$ ускорения точки в момент времени t определяется формулой

$$u(t) = \lim_{\tau \to t} \frac{v(\tau) - v(t)}{\tau - t}. \tag{23}$$

Стоящая в правой части этого равенства величина есть не что иное, как производная $v'(t)$ функции $v(t)$ по независимой переменной t, так что имеем

$$u(t) = v'(t). \tag{24}$$

Принимая во внимание формулу (17), мы можем переписать равенство (24) следующим образом:

$$u(t) = x''(t) \tag{25}$$

(см. § 4 (1)). Таким образом, скорость движения точки $x(t)$ в момент времени t есть производная $x'(t)$, а ускорение движения точки $x(t)$ в момент времени t есть вторая производная $x''(t)$.

Большой интерес представляет собой равномерно ускоренное движение, т. е. такое движение, при котором ускорение $u(t)$ является постоянной величиной

$$u(t) = u, \tag{26}$$

где u — постоянная величина. В этом случае скорость $v(t)$ движения точки следует получить из уравнения

$$v'(t) = u. \tag{27}$$

В силу формулы (10) решение этого уравнения записывается в виде

$$v(t) = ut + c, \qquad (28)$$

где c — постоянная величина. Для нахождения этой постоянной величины обозначим через v_0 скорость движения точки $x(t)$ в момент времени $t = 0$. Подставляя в уравнение (28) $t = 0$, получаем $v(0) = v_0 = c$. Таким образом, решение $v(t)$ уравнения (27) записывается в виде

$$v(t) = v_0 + ut.$$

Подставляя вместо $v(t)$ величину $x'(t)$, мы получаем для функции $x(t)$ уравнение

$$x'(t) = v_0 + ut. \qquad (29)$$

Согласно ранее полученным результатам (см. (10)) решением этого уравнения является функция

$$x(t) = v_0 t + \frac{u}{2} t^2 + c, \qquad (30)$$

где c — постоянная величина. Для нахождения этой постоянной величины c обозначим через x_0 положение точки $x(t)$ в момент времени $t = 0$. Подставим $t = 0$ в уравнение (30). Тогда мы получим $x(0) = x_0 = c$.

Таким образом, равномерно ускореннное движение описывается уравнением

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{ut^2}{2}. \qquad (31)$$

§ 7. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Интегрирование возникает в математике не только как операция, обратная к дифференцированию, но также и при решении многих других задач, в частности при вычислении площади в геометрии. Вычисление площади фигур на плоскости, ограниченных кривыми линиями, приводит нас к интегрированию. При этом интеграл перестает быть неопределенным, так как площадь фигуры имеет вполне определенное значение. Мы рассмотрим здесь простейшую задачу вычисления площади, приводящую к определенному интегралу.

Будем исходить из заданной функции

$$y = f(x) \qquad (1)$$

и графика L этой функции, построенного в обычной прямоугольной декартовой системе координат. Предположим пока, что весь график L проходит над осью абсцисс. Пусть u, v — два каких-нибудь значения аргумента x функции $f(x)$, причем $u < v$. Точки графика L с абсциссами u и v мы обозначим соответственно через a, b. Теперь естественно выделяется кусок плоскости, ограниченный снизу отрезком $[u, v]$ оси абсцисс, слева — ординатой ua, справа — ординатой vb и сверху отрезком $[a, b]$ графика L. Этот кусок плоскости мы обозначим через $Q(u, v)$. Здравый смысл и потребности применения говорят нам, что кусок $Q(u, v)$ плоскости имеет определенную площадь. Эту площадь мы обозначим через $h(u, v)$. Выберем теперь два значения аргумента x_0 и x функции $f(x)$ и положим

$$h(x_0, x) = h(x). \tag{2}$$

Обозначая соответствующую площадь через $h(x)$, мы тем самым подчеркиваем, что рассматриваем ее как функцию переменной величины x. Вычислим теперь производную $h'(x)$ так определенной функции $h(x)$. Выберем для этого некоторое значение ξ аргумента нашей функции (1), близкое к x. Для определенности будем считать, что $\xi > x$. Для вычисления производной $h(x)$ мы прежде всего должны вычислить разность $h(\xi) - h(x)$, т. е. разность площадей фигур $Q(x_0, \xi)$ и $Q(x_0, x)$. Эта разность равна площади фигуры $Q(x, \xi)$. Имеем

$$h(\xi) - h(x) = h(x, \xi). \tag{3}$$

Мы не будем точно вычислять площадь $h(x, \xi)$ фигуры $Q(x, \xi)$, а дадим только ее оценку. Для этого введем новые обозначения. При двух произвольных значениях u, v аргумента функции $f(x)$ мы обозначим через $\mu(u, v)$ минимум функции $f(x)$ на отрезке $[u, v]$, а через $\nu(u, v)$ максимум функции $f(x)$ на том же отрезке $[u, v]$. Прямоугольник с основанием $[u, v]$ и высотою $\mu(u, v)$ обозначим через $M(u, v)$, а прямоугольник с основанием $[u, v]$ и высотою $\nu(u, v)$ обозначим через $N(u, v)$. Применяя наше обозначение к случаю, когда $u = x$, а $v = \xi$, мы видим, что прямоугольник $M(x, \xi)$ содержится в фигуре $Q(x, \xi)$, а сама фигура $Q(x, \xi)$ содержится в прямоугольнике $N(x, \xi)$. Так как площади прямоугольников $M(x, \xi)$ и $N(x, \xi)$ равны соответственно

$$(\xi - x)\mu(x, \xi), \quad (\xi - x)\nu(x, \xi), \tag{4}$$

то мы получаем следующее двойное неравенство:

$$(\xi - x)\mu(x, \xi) \leqslant h(x, \xi) \leqslant (\xi - x)\nu(x, \xi) \tag{5}$$

или иначе

$$(\xi - x)\mu(x, \xi) \leqslant h(\xi) - h(x) \leqslant (\xi - x)\nu(x, \xi). \tag{6}$$

Ясно, что при $\xi \to x$ мы имеем

$$\mu(x, \xi) \to f(x), \quad \nu(x, \xi) \to f(x). \tag{7}$$

Таким образом, деля двойное неравенство (6) на положительную величину $(\xi - x)$ и переходя к пределу при $\xi \to x$, получаем

$$f(x) \leqslant \lim_{\xi \to x} \frac{h(\xi) - h(x)}{\xi - x} \leqslant f(x). \tag{8}$$

Так как, согласно определению,

$$h'(x) = \lim_{\xi \to x} \frac{h(\xi) - h(x)}{\xi - x},$$

то из формулы (8) следует

$$h'(x) = f(x). \tag{9}$$

Таким образом, мы нашли производную функции $h(x)$ и убедились, что $h(x)$ является первообразной для функции $f(x)$. Следует отметить еще одно свойство функции $h(x)$. При $x = x_0$ кусок плоскости $Q(x_0, x)$ превращается в отрезок и потому имеет площадь, равную нулю. Таким образом,

$$h(x_0) = 0. \tag{10}$$

Все сделанное до сих пор исходило из предположения, что $x_0 \leqslant x$ и что график L функции $f(x)$ на отрезке $[x_0, x]$ целиком проходит над осью абсцисс. Эти предположения необходимо снять и определить функцию $h(x)$ так, чтобы она удовлетворяла условиям (9) и (10).

Если график функции $f(x)$ на отрезке $[x_0, x]$ частично проходит над осью абсцисс и частично под осью абсцисс, то мы разобьем его на две части: L_+, лежащую над осью абсцисс, и L_-, лежащую под осью абсцисс. Каждая из кривых L_+ и L_- может состоять из нескольких кусков. Площадь, заключенную между кривой L_+ и осью абсцисс, обозначим через $h_+(x)$, а площадь, заключенную между осью абсцисс и кривой L_-, обозначим через $h_-(x)$. Сохраняя предположение, что $x_0 < x$, мы положим теперь

$$h(x) = h_+(x) - h_-(x). \tag{11}$$

Если теперь $x_0 > x$, то площади $h_+(x)$ и $h_-(x)$ определяются точно так же, как и в случае $x_0 < x$, но функция $h(x)$ определяется формулой

$$h(x) = -(h_+(x) - h_-(x)). \tag{12}$$

Площадь по самой своей сущности — величина положительная. Определяя ее формулами (11) и (12), мы тем самым алгебраизируем площадь, т. е. приписываем ей знак плюс или минус в зависимости от обстоятельств. Быть может, несколько кропотливо, но без каких-либо существенных трудностей можно доказать, что при новом определении функции $h(x)$ ее свойства (9) и (10) сохраняются. Таким образом, для любой функции $f(x)$ найдена ее первообразная $h(x)$, удовлетворяющая дополнительному условию (10).

Этот способ построения функции $h(x)$, являющейся первообразной для функции $f(x)$, хотя и убеждает нас в том, что функция $h(x)$ существует, так как по здравому смыслу площадь фигуры существует, но он не дает нам возможности вычислить эту площадь хотя бы, например, при помощи электронно-вычислительной машины. Способ вычисления функции $h(x)$ будет дан несколько позже, а сейчас мы покажем, что и достигнутый уже результат дает нам некоторые плоды. Он позволяет сосчитать площадь $h(x)$ куска плоскости $Q(x_0, x)$ в том случае, когда мы можем угадать некоторую первообразную $h_1(x)$ функции $f(x)$. Итак, допустим, что мы как-то нашли функцию $h_1(x)$, удовлетворяющую условию

$$h_1'(x) = f(x). \tag{13}$$

Подставляя в формулу (7) § 6 вместо функции $h_2(x)$ функцию $h(x)$, получаем равенство

$$h(x) = h_1(x) + c, \tag{14}$$

где c есть постоянная величина. Для того чтобы найти ее, подставим вместо x в это равенство величину x_0. Тогда мы получим, в силу формулы (10)

$$0 = h(x_0) = h_1(x_0) + c.$$

Отсюда следует, что $c = -h_1(x_0)$, и, следовательно,

$$h(x) = h_1(x) - h_1(x_0). \tag{15}$$

Формула эта представляет собою важный результат. Она выражает площадь $h(x)$ фигуры $Q(x_0, x)$ через произвольную первообразную $h_1(x)$ функции $f(x)$. Сама функция $h(x)$ называется *определенным интегралом* функции $f(x)$ и записывается в виде

$$h(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt. \tag{16}$$

Здесь x_0 называется *нижним пределом интегрирования, x — верхним пределом интегрирования*, а t — *переменной интегрирования*. Функция $h(x)$ зависит от заданной функции $f(x)$ и пределов интегрирования x_0 и x, но вовсе не зависит от переменной интегрирования, точнее, от ее обозначения, так что ее можно обозначить любой буквой. Например, мы можем написать

$$h(x) = \int_{x_0}^{x} f(\tau)\,d\tau.$$

Определенный интеграл как предел последовательности конечных сумм. Перейдем теперь к способу приближенного вычисления площади $h(x)$ куска плоскости $Q(x_0, x)$. Здесь мы вновь будем считать, что $x_0 < x$ и что на отрезке $[x_0, x]$ график функции $f(x)$ проходит над осью абсцисс. Разобьем отрезок $[x_0, x]$ точками

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = x. \tag{17}$$

Мы будем говорить, что подразделение (17) отрезка $[x_0, x]$ имеет *мелкость* δ, если длина каждого отрезка подразделения меньше чем δ, т. е. если выполнено условие

$$x_i - x_{i-1} < \delta \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{18}$$

Употребим введенные ранее обозначения для отрезка $[u, v]$, применяя их теперь к отрезку $[x_{i-1}, x_i]$, и составим две суммы

$$M = (x_1 - x_0)\,\mu(x_0, x_1) + (x_2 - x_1)\,\mu(x_1, x_2) + \ldots$$
$$\ldots + (x_n - x_{n-1})\,\mu(x_{n-1}, x_n), \tag{19}$$

$$N = (x_1 - x_0)\,\nu(x_0, x_1) + (x_2 - x_1)\,\nu(x_1, x_2) + \ldots$$
$$\ldots + (x_n - x_{n-1})\,\nu(x_{n-1}, x_n). \tag{20}$$

Сумма (19) представляет собою сумму площадей всех прямоугольников

$$M(x_{i-1}, x_i) \quad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{21}$$

Сумма (20) представляет собой сумму всех прямоугольников

$$N(x_{i-1}, x_i) \quad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{22}$$

Объединение всех прямоугольников (21) входит в кусок плоскости $Q(x_0, x)$. Объединение всех прямоугольников (22) содержит внутри себя $Q(x_0, x)$. Таким образом, мы имеем двойное неравенство

$$M \leqslant h(x) \leqslant N. \tag{23}$$

Величины M и N зависят от последовательности точек (17), т. е. от способа подразделения отрезка $[x_0, x]$. Сравнительно просто, но довольно канительно доказывается, что при неограниченном измельчении подразделения (17), т. е. при $\delta \to 0$ величина $N - M$ также стремится к нулю. Это показывает, что величины M и N представляют собою приближенные значения площади $h(x)$. Некоторое неудобство представляет собою тот факт, что при вычислении величин M и N мы должны находить максимумы и минимумы функции $f(x)$ на всех отрезках подразделений. Это можно упростить следующим образом. На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольную точку ξ_i и составим сумму

$$P = (x_1 - x_0) f(\xi_1) + \\ + (x_2 - x_1) f(\xi_2) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) f(\xi_n). \tag{24}$$

Так как имеет место очевидное неравенство

$$\mu(x_{i-1}, x_i) \leqslant f(\xi_i) \leqslant \nu(x_{i-1}, x_i), \tag{25}$$

то мы имеем неравенство

$$M \leqslant P \leqslant N. \tag{26}$$

Так как величины M и N неограниченно сближаются при $\delta \to 0$, то величины $h(x)$ и P неограниченно сближаются при безграничном измельчении подразделений (17). Таким образом, можно приближенно вычислять площадь $h(x)$ при помощи суммы (24). Это и есть способ вычисления площади куска $Q(x_0, x)$. Он же может рассматриваться и как логическое определение понятия площади.

§ 8. ПОСТУЛАТ СХОДИМОСТИ

Дадим теперь очень простой пример вычисления площади при помощи формулы (16) § 7 и введем в связи с этим рассмотрением очень важный признак существования предела. Зададим функцию формулой

$$f(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2} \tag{1}$$

и будем рассматривать ее только для положительных значений x. В силу формулы (23) § 5 первообразной для функции x^{-2} является функция $-x^{-1}$. Действительно, $-(x^{-1})'=x^{-2}=1/x^2$. Таким образом, в силу формулы (16) § 7 площадь куска $Q(x_0, x)$, заданная функцией (1), определяется формулой

$$h(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{t^2}=-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right)=\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x}.$$

Таким образом,

$$h(x)=\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x}. \tag{2}$$

Так как $x>x_0$, то $h(x)>0$. Здесь важно отметить одно очень интересное обстоятельство. Если x будет неограниченно возрастать, то правая часть соотношения (2) стремится к пределу $1/x_0$. Это следует понимать так, что между ординатой x_0a_0, осью абсцисс и кривой

$$y=1/x^2$$

имеется ограниченная площадь, хотя полоса, заключенная между осью абсцисс и нашей кривой, простирается в бесконечность. В виде формулы это записывают так:

$$\int_{x_0}^{\infty}\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{x_0}. \tag{3}$$

С этим несколько странным явлением связано другое явление, играющее весьма важную роль. На нем мы сейчас и остановимся.

Будем считать, что k — натуральное число и составим последовательность целых чисел

$$x_0=k,\ x_1=k+1,\ \ldots,\ x_i=k+i,\ \ldots,\ x_n=k+n=x. \tag{4}$$

Эта последовательность целых чисел разбивает отрезок интегрирования $[x_0, x]$ на отрезки длины 1. Составим для этого подразделения отрезка $[x_0, x]$ на отрезки длины 1 сумму M (см. § 7 (19)) для функции (1). При этом мы должны принять во внимание, что минимум функции $f(x)$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ достигается в правом конце отрезка и равен $1/x_i^2$

$$\mu(x_{i-1}, x_i) = \frac{1}{x_i^2} = \frac{1}{(k+i)^2}. \tag{5}$$

Число M в нашем случае зависит от еще не зафиксированных натуральных чисел k и n, поэтому мы его обозначим через $M(k, n)$. В силу формулы (19) § 7 получаем для него выражение

$$M = M(k, n) = \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(k+n)^2}. \tag{6}$$

Из первой части двойного неравенства (23) § 7 мы получаем в нашем случае

$$M(k, n) \leqslant \int\limits_k^{k+n} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+n}. \tag{7}$$

Положим теперь

$$k = 1, \quad p = n + 1, \quad s_p = 1 + M(1, p). \tag{8}$$

Тогда мы получим следующее выражение для s_p:

$$s_p = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{p^2} \leqslant 1 + 1 - \frac{1}{p} = 2 - \frac{1}{p}. \tag{9}$$

Отсюда следует, что величина s_p всегда удовлетворяет неравенству

$$s_p \leqslant 2. \tag{10}$$

Из формулы (9) видно, что величина s_p возрастает вместе с возрастанием p, но остается ограниченной в процессе этого возрастания, все время оставаясь меньше 2. Здравый смысл говорит нам, что величина s_p при неограниченном возрастании p, оставаясь ограниченной, должна стремиться к некоторому определенному числу s. Это утверждение мы можем записать в виде

$$\lim_{p\to\infty} s_p = s. \tag{11}$$

Постулат сходимости. Примем без доказательства следующее утверждение.

Допустим, что имеется некоторая функция $\sigma(p)$ натурального числа p, удовлетворяющая двум условиям: $\sigma(p)$ растет вместе с ростом p, т. е. выполнено условие

$$\sigma(p+1) > \sigma(p) \quad (p=1, 2, \ldots) \tag{12}$$

и $\sigma(p)$ остается ограниченной при всех значениях p, т. е. выполнено условие

$$\sigma(p) < c, \tag{13}$$

где c — постоянная величина, не зависящая от p. Тогда величина $\sigma(p)$ при неограниченном возрастании p неограниченно приближается к некоторому числу σ. Это утверждение записывается в виде

$$\lim_{p\to\infty} \sigma(p) = \sigma. \tag{14}$$

Соотношение (9) мы можем теперь формулировать следующим образом. Рассмотрим бесконечную сумму

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{i^2}+\ldots \tag{15}$$

Так как конечная сумма s_p (см. (9)) слагаемых этого ряда удовлетворяет условию нашего постулата, то будем считать, что бесконечная сумма (15) существует и задается формулой

$$s = \lim_{p\to\infty} s_p. \tag{16}$$

Говорят, что бесконечный ряд (15) сходится и имеет своей суммой величину s.

Если

$$p < q \tag{17}$$

— два натуральных числа, то из формул (6), (7) и (9) вытекает

$$s_q = s_p + M(p, q-p), \tag{18}$$

причем

$$M(p, q-p) \leqslant 1/p. \tag{19}$$

Таким образом, имеем

$$s_q - s_p \leqslant 1/p. \tag{20}$$

Переходя в этом соотношении к пределу при $q\to\infty$, получаем

$$s - s_p \leqslant 1/p. \tag{21}$$

Из этого мы видим, что величина s задается величиной s_p с точностью до $1/p$, и потому, рассматривая величину s_p как приближенное значение величины s, мы знаем величину погрешности, которую мы допускаем при этом приближении.

В алгебре уже рассматривалась сумма бесконечного ряда, именно, сумма бесконечной геометрической прогрессии

$$s = w + wv + wv^2 + \ldots + wv^i + \ldots$$

В случае, когда $|v| < 1$, эта прогрессия имеет сумму, равную

$$\frac{w}{1-v}. \qquad (22)$$

Таким образом, мы уже сталкивались с суммированием бесконечного ряда и имели возможность вычислить его сумму (22).

Бесконечный ряд (15) тоже имеет сумму, но мы не можем ее выразить в виде формулы, как это сделано для геометрической прогрессии. Мы можем только быть уверены в том, что конечная сумма s_p, составленная из начальных его членов, является приближенным значением для суммы s этого ряда, и мы знаем точность этого приближения (см. (21)). Раз мы можем найти сколь угодно хорошее приближение числа s, то мы должны считать, что число s нам известно. С таким явлением мы уже сталкивались, когда рассматривали число π. Его можно вычислить с любой точностью, но нельзя задать его никакой алгебраической формулой.

Точно так же обстоит дело и с числом s, которое задается равенством (16). Числа s_p являются его приближенными значениями.

§ 9. БИНОМ НЬЮТОНА И СУММА ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Здесь будут доказаны алгебраические формулы, упомянутые в заголовке параграфа, которые понадобятся нам в § 10.

Бином Ньютона. Для того чтобы выписать и доказать эту формулу Ньютона, носящую название *бинома Ньютона*, нужно прежде всего напомнить, что собою представляет функция $n!$ натурального числа n. Функция эта определяется формулой

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n. \qquad (1)$$

Таким образом, $n!$ (читается: n факториал) есть произведение всех натуральных чисел подряд, начиная с 1 до n. Мы имеем

$$1! = 1, \quad 2! = 1 \cdot 2 = 2, \quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6,$$
$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Удобства ради положим

$$0! = 1. \tag{2}$$

Формула Ньютона, о которой идет речь, записывается в следующем виде:

$$(u+v)^n = \sum_{\substack{i,\,j \\ i+j=n}} \frac{n!}{i!\,j!} u^i v^j. \tag{3}$$

Здесь справа стоит сумма всех членов вида

$$\frac{n!}{i!\,j!} u^i v^j, \tag{4}$$

где $i + j = n$, причем i и j — неотрицательные целые числа. Формулу эту мы будем доказывать индуктивно. Именно, мы убедимся прежде всего, что для $n = 1$ она верна, а затем докажем, что если она верна при показателе степени, равном n, то она верна и при показателе, равном $n + 1$.

Для $n = 1$ мы имеем

$$(u+v)^1 = u + v = \frac{u}{1!\,0!} + \frac{v}{0!\,1!}. \tag{5}$$

Таким образом, для $n = 1$ формула (3) верна.

Для проведения индукции умножим равенство (3) на $u + v$. Тогда слева мы получим $(u+v)^{n+1}$. Справа же мы получим члены, содержащие множители $u^p v^q$, где $p + q = n + 1$. Из слагаемого (4) после умножения на $(u + v)$ мы получим слагаемое, содержащее множитель $u^p v^q$ в случае, если

$$i = p - 1, \quad j = q \quad \text{или} \quad i = p, \quad j = q - 1.$$

В первом случае мы получим член, содержащий $u^p v^q$ в результате умножения члена (4) на u, а во втором случае при умножении члена (4) на v. Таким образом, в результате умножения суммы, стоящей в правой части равенства (3), на $(u + v)$ мы получим член, содержащий $u^p v^q$ с коэффициентом

$$\frac{n!}{(p-1)!\,q!}+\frac{n!}{p!\,(q-1)!}. \tag{6}$$

Умножая на p числитель и знаменатель первого слагаемого этой суммы и на q числитель и знаменатель второго слагаемого этой суммы, перепишем сумму (6) в виде

$$\frac{n!p}{p!q!}+\frac{n!q}{p!q!}=\frac{n!\,(p+q)}{p!q!}=\frac{(n+1)!}{p!q!}. \tag{7}$$

Таким образом, получаем окончательно

$$(u+v)^{n+1}=\sum_{\substack{p,\,q\\ p+q=n+1}}\frac{(n+1)!}{p!q!}u^p v^q. \tag{8}$$

Итак, индукция проведена и формула (3) доказана.

Коэффициент

$$\frac{n!}{i!j!}, \tag{9}$$

входящий в формулу (3), обычно записывают в несколько ином виде. Для этого полагают $j=k$, $i=n-k$ и производят сокращение дроби (9) на $(n-k)!$. Действительно, мы имеем

$$\frac{n!}{(n-k)!}=n(n-1)\ldots(n-k+1). \tag{10}$$

Таким образом, получаем

$$\frac{n!}{(n-k)!\,k!}=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}, \tag{11}$$

и формула (3) переписывается в виде

$$(u+v)^n=u^n+\frac{n}{1!}u^{n-1}v+\frac{n(n-1)}{2!}u^{n-2}v^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}u^{n-k}v^k+\ldots+v^n. \tag{12}$$

Выведем заново еще одну формулу, известную из алгебры.

Сумма геометрической прогрессии. Положим

$$g_m=w+w\cdot v+w\cdot v^2+\ldots+w\cdot v^m. \tag{13}$$

Умножим и разделим правую часть этого равенства на

$(1-v)$ и используем формулу (9) § 2, положив в ней $u=1$. Тогда получим

$$g_m = w\frac{1-v^{m+1}}{1-v}. \tag{14}$$

В дальнейшем мы будем пользоваться этой формулой только в случае

$$0 < v < 1, \quad w > 0.$$

В этом случае из нее следует

$$g_m < \frac{w}{1-v}. \tag{15}$$

§ 10. ФУНКЦИЯ e^x

Здесь мы прежде всего очень педантично и строго определим функцию e^x, где x — переменная, могущая принимать произвольные действительные значения, а e — известное и важное в математике число

$$e = 2{,}71828\ldots$$

Мы начнем наше исследование с рассмотрения функции

$$\omega_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n, \tag{1}$$

где n — натуральное число. Определенная этим соотношением функция $\omega_n(x)$ есть многочлен степени n относительно x. Прежде всего мы докажем, что при каждом фиксированном x величина $\omega_n(x)$ стремится к некоторому определенному пределу при $n\to\infty$, который обозначим через $\exp(x)$, что в виде формулы записывается так:

$$\lim_{n\to\infty}\omega_n(x) = \exp(x). \tag{2}$$

В результате тщательного изучения функции $\exp(x)$, определенной этим соотношением, придем к выводу, что

$$\exp(x) = e^x. \tag{3}$$

Изучение функции $\omega_n(x)$. Применим к правой части равенства (1) формулу (12) § 9, положив в ней $u=1$,

$v=\frac{x}{n}$. Тогда получим

$$\omega_n(x)=1+\frac{n}{1!}\frac{x}{n}+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\frac{x^k}{n^k}+\ldots \tag{4}$$

В полученной формуле преобразуем числовой коэффициент при x^k. Мы имеем

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!n^k}=1\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}. \tag{5}$$

Полагая

$$\gamma_n(k)=1\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right), \tag{6}$$

мы можем переписать формулу (4) в виде

$$\omega_n(x)=1+\gamma_n(1)\frac{x}{1!}+\ldots+\gamma_n(k)\frac{x^k}{k!}+\ldots \tag{7}$$

Величина $\gamma_n(k)$ обладает следующими свойствами:

$$\gamma_n(1)=1 \tag{8}$$

$$0<\gamma_n(k)<\gamma_{n+1}(k)<1 \quad \text{при} \quad 1<k\leqslant n, \tag{9}$$

$$\gamma_n(k)=0 \text{ при } k>n.$$

Из формулы (7) и неравенства (9) следует, что

$$\text{при } x>0 \text{ имеем } \omega_n(x)<\omega_{n+1}(x). \tag{10}$$

Зафиксируем теперь x, не обязательно положительное, и выберем настолько большое натуральное число p, чтобы было $|x|<p+1$, или, что то же,

$$|x|/(p+1)<1. \tag{11}$$

Тогда при $k>p$ имеем

$$\frac{\gamma_n(k)}{k!}|x|^k\leqslant\frac{|x|^k}{k!}=\frac{|x|^p}{p!}\cdot\frac{|x|}{p+1}\cdot\frac{|x|}{p+2}\ldots\frac{|x|}{k}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{|x|^p}{p!}\frac{|x|^{k-p}}{(p+1)^{k-p}}. \tag{12}$$

Разобьем сумму (7) на два слагаемых

$$\omega_n(x)=s_n(p,x)+r_n(p,x), \tag{13}$$

где

$$s_n(p, x) = \\ = 1 + \gamma_n(1)\frac{x}{1!} + \ldots + \gamma_n(i)\frac{x^i}{i!} + \ldots + \gamma_n(p)\frac{x^p}{p!}, \tag{14}$$

$$r_n(p, x) = \\ = \gamma_n(p+1)\frac{x^{p+1}}{(p+1)!} + \ldots + \gamma_n(k)\frac{x^k}{k!} + \ldots; \tag{15}$$

здесь $i \leqslant p$, $k > p$.

В силу формулы (12) получаем неравенство

$$|r_n(p, x)| \leqslant \\ \leqslant \frac{|x|^p}{p!}\left[\frac{|x|}{p+1} + \frac{|x|^2}{(p+1)^2} + \ldots + \frac{|x|^{k-p}}{(p+1)^{k-p}} + \ldots\right] < \\ < \frac{|x|^p}{p!}\,\frac{\frac{|x|}{p+1}}{1 - \frac{|x|}{p+1}} = \frac{|x|^p}{p!}\cdot\frac{|x|}{p+1-|x|}$$

(см. (15) § 9 и (11)). Окончательно получаем

$$|r_n(p, x)| < \frac{|x|^p}{p!}\cdot\frac{|x|}{p+1-|x|} \quad \text{при} \quad |x| < p+1. \tag{16}$$

Отсюда видно, что величина $|r_n(p, x)|$ остается ограниченной при неограниченном росте n, и, следовательно, имеем неравенство

$$\omega_n(x) < c(x), \tag{17}$$

где $c(x)$ зависит от x, но не зависит от n. Таким образом, при $x > 0$, в силу неравенств (10) и (17), величина $\omega_n(x)$ при неограниченном росте n возрастает, оставаясь ограниченной, и потому предел её существует (см. § 8), так что мы можем написать

$$\text{при } x > 0 \text{ имеем } \exp(x) = \lim_{n\to\infty} \omega_n(x).$$

Случай $|x| \leqslant 1$. В этом случае мы можем считать $p = 1$, так как при $|x| \leqslant 1$ неравенство (11) выполнено при $p = 1$. Тогда формула (13) переписывается в виде

$$\omega_n(x) = 1 + x + r_n(1, x),$$

где

$$|r_n(1, x)| < |x|\cdot\frac{|x|}{2-|x|} \leqslant |x|^2.$$

Таким образом, окончательно при $|x| \leqslant 1$ имеем

$$\omega_n(x) = 1 + x + r_n(1, x), \quad \text{где} \quad |r_n(1, x)| < x^2. \tag{18}$$

Пусть теперь

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots \tag{19}$$

— некоторая последовательность, сходящаяся к нулю. Рассмотрим величину $\omega_n(\xi_n)$. Так как при достаточно больших n $|\xi_n| < 1$, то при достаточно больших n для величины $\omega_n(\xi_n)$ имеет место формула (18), т. е.

$$\omega_n(\xi_n) = 1 + \xi_n + r_n(1, \xi_n), \quad \text{где} \quad |r_n(1, \xi_n)| < \xi_n^2.$$

Отсюда следует окончательный вывод:

$$\text{если} \quad \lim_{n \to \infty} \xi_n = 0, \quad \text{то} \quad \lim_{n \to \infty} \omega_n(\xi_n) = 1. \tag{20}$$

Займемся теперь случаем, когда аргумент x функции $\omega_n(x)$ отрицателен. Для этого рассмотрим функцию

$$\omega_n(-x), \tag{21}$$

считая x положительным. Составим произведение функций $\omega_n(-x)\,\omega_n(x)$. Мы имеем

$$\omega_n(-x)\,\omega_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n = \omega_n(\xi_n), \tag{22}$$

где

$$\xi_n = -\frac{x^2}{n}.$$

Так как

$$\lim_{n \to \infty} \xi_n = 0,$$

то

$$\lim_{n \to \infty} \omega_n(\xi_n) = 1 \tag{23}$$

(см. (20)). Так как в силу формулы (22) мы имеем

$$\omega_n(-x) = \frac{\omega_n(\xi_n)}{\omega_n(x)},$$

причем числитель и знаменатель правой части этого равенства имеют определенные пределы при $n \to \infty$, получаем

$$\lim_{n \to \infty} \omega_n(-x) = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} \omega_n(\xi_n)}{\lim\limits_{n \to \infty} \omega_n(x)} = \frac{1}{\exp(x)}.$$

Итак, мы доказали, что функция $\omega_n(-x)$ при x положительном стремится к определенному пределу, и потому можно положить

$$\lim_{n\to\infty} \omega_n(-x) = \exp(-x),$$

причем

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}. \qquad (24)$$

При этом доказано одновременно важное свойство функции $\exp(x)$. Именно,

$$\exp(-x)\exp(x) = 1, \qquad (25)$$

где $x > 0$. Переобозначая $-x$ на x, получаем формулу

$$\exp(x)\exp(-x) = 1, \qquad (26)$$

где x уже отрицательно. Заметим, кроме того, что при $x = 0$ $\omega_n(x) = 1$, так что, согласно определению,

$$\exp(0) = 1. \qquad (27)$$

Таким образом, для всех значений x мы имеем очень важное соотношение

$$\exp(x)\exp(-x) = 1. \qquad (28)$$

Итак, мы доказали, что при произвольном значении x величина $\omega_n(x)$ стремится к определенному пределу при $n\to\infty$, так что можно положить

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \omega_n(x). \qquad (29)$$

Из формулы (18) следует, что при $|x| \leqslant 1$ имеем

$$\exp(x) = 1 + x + r(x), \quad \text{где} \quad |r(x)| < x^2. \qquad (30)$$

Основное свойство функции $\exp(x)$. Оказывается, что имеет место следующее важнейшее свойство функции $\exp(x)$. Если x и y — два действительные числа, то мы имеем соотношение

$$\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y). \qquad (31)$$

Для доказательства этого важнейшего равенства составим произведение функций $\omega_n(x)$ и $\omega_n(y)$. Мы получим

$$\omega_n(x)\,\omega_n(y) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \left(1+\frac{y}{n}\right)^n = \left(1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}\right)^n. \qquad (32)$$

Мы имеем

$$1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}=\left(1+\frac{x+y}{n}\right)\left(1+\frac{xy}{n(n+x+y)}\right)=$$
$$=\left(1+\frac{x+y}{n}\right)\left(1+\frac{\xi_n}{n}\right), \quad (33)$$

где

$$\xi_n=\frac{xy}{n+x+y}. \quad (34)$$

Из формул (32) и (33) получаем

$$\omega_n(x)\,\omega_n(y)=\omega_n(x+y)\,\omega_n(\xi_n). \quad (35)$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\omega_n(\xi_n)=1$ (см. (20)). Таким образом, переходя к пределу при $n\to\infty$ в соотношении (35), получаем

$$\exp(x)\exp(y)=\exp(x+y).$$

Таким образом, соотношение (31) доказано.

Соотношение это, доказанное для двух сомножителей, очевидно, верно и для произвольного числа сомножителей. Считая все сомножители одинаковыми, мы получаем соотношение

$$(\exp(x))^p=\exp(px), \quad (36)$$

где p — натуральное число. Из этого соотношения и соотношений (27) и (28) получаем соотношение

$$(\exp(x))^p=\exp(px), \quad (37)$$

где p — произвольное целое число. Заменяя в этом соотношении целое число p целым числом q, а $px=qx$ через y, получаем соотношение

$$\left(\exp\left(\frac{y}{q}\right)\right)^q=\exp(y), \quad (38)$$

откуда следует

$$\exp\left(\frac{y}{q}\right)=(\exp(y))^{1/q}. \quad (39)$$

Возведя последнее соотношение в степень p, получаем

$$\left(\exp\left(\frac{y}{q}\right)\right)^p=(\exp(y))^{p/q}. \quad (40)$$

В силу соотношения (36) левая часть этого равенства может быть переписана в виде

$$\left(\exp\left(\frac{y}{q}\right)\right)^p=\exp\left(\frac{p}{q}y\right). \quad (41)$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\exp\left(\frac{p}{q}y\right)=(\exp(y))^{p/q}. \tag{42}$$

Заменяя в этом соотношении y на x и полагая $r = p/q$, мы получаем окончательную формулу

$$\exp(rx)=(\exp(x))^r, \tag{43}$$

где r — произвольное рациональное число.

Число e и функция e^x. По определению будем считать, что число e задается равенством

$$e=\exp(1). \tag{44}$$

Таким образом, мы имеем

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \tag{45}$$

Это есть обычное общепринятое определение числа e. Полагая в соотношении (43) $x = 1$, получаем

$$\exp(r)=e^r, \tag{46}$$

где r — произвольное рациональное число. Таким образом, мы установили, что для произвольного рационального числа r функция $\exp(r)$ представляет собой не что иное, как величину e^r, где возведение в рациональную степень r понимается так, как это понимают в алгебре. Для произвольного, не обязательно рационального числа x равенство

$$e^x=\exp(x) \tag{47}$$

является определением функции e^x. Правая часть соотношения (47) нами уже определена. Функция e^x, первоначально определенная чисто алгебраически для рациональных значений x, формулой (47) доопределяется так, что она имеет смысл уже для произвольного действительного числа x, не обязательно рационального. Такое определение функции e^x для действительных значений x является единственно разумным. Так получающаяся в результате этого построения функция e^x обладает хорошими свойствами. Эти свойства следующие:

$$e^0=1,\quad e^xe^y=e^{x+y}. \tag{48}$$

Эти свойства функции e^x вытекают из свойств (27) и (31) функции $\exp(x)$, с которой функция e^x совпадает.

Кроме того, функция e^x имеет производную. Займемся ее вычислением.

Производная функции e^x. При определении производной e^x мы воспользуемся формулой (21) § 1, положив при этом

$$\xi = x + h. \tag{49}$$

Таким образом,

$$(e^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h}. \tag{50}$$

Так как h — малая величина, то мы можем при вычислении функции e^h использовать формулу (30), так что получаем

$$e^h = 1 + h + r(h),$$

где

$$|r(h)| < h^2. \tag{51}$$

Из этого следует, что

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1. \tag{52}$$

Таким образом, из формулы (50) следует, что

$$(e^x)' = e^x. \tag{53}$$

Итак, производная функции e^x вычислена. Она обладает тем замечательным свойством, что совпадает с самой функцией e^x. Тем же свойством обладает функция ce^x, где c — константа. Именно,

$$(ce^x)' = ce^x. \tag{54}$$

Оказывается, что всякая функция $f(x)$, удовлетворяющая уравнению

$$f'(x) = f(x), \tag{55}$$

записывается в виде

$$f(x) = ce^x. \tag{56}$$

Доказательство дается в упражнении 3 к § 11.

§ 11. ФУНКЦИЯ $\ln x$

Имея в виду в дальнейшем изменить обозначения, я, для того чтобы не вводить путаницы, употреблю греческие буквы для обозначения переменных. Рассмотрим уравнение

$$\eta = e^\xi. \tag{1}$$

Решение этого уравнения относительно неизвестной величины ξ при известной величине η называется *натуральным логарифмом* величины η и обозначается через

$$\xi = \ln \eta. \tag{2}$$

Следует прежде всего выяснить, при каких значениях η уравнение (1) имеет решение относительно неизвестной ξ. Заметим прежде всего, что e^{ξ} — величина всегда положительная, что следует из ее определения. Таким образом, уравнение (1) может быть разрешено лишь при $\eta > 0$. Для дальнейшего исследования уравнения (1) надо начертить график функции (1), откладывая ξ по оси абсцисс, а η — по оси ординат. Так как число e заключено между числами 2 и 3, то при возрастании ξ функция e^{ξ} растет быстрее, чем функция 2^{ξ}. Для того чтобы составить себе представление о той скорости, с какой растет функция 2^{ξ}, напомню известный рассказ. Изобретатель игры в шахматы попросил от персидского шаха следующую награду. Он сказал: «Положи на первую клеточку шахматной доски одно зерно риса, на вторую клеточку — два зерна риса, на третью — четыре зерна риса и так на каждую следующую клеточку вдвое больше, чем на предыдущую». Так как общее число клеточек шахматной доски есть 64, то общее количество зерен составляет сумму геометрической прогрессии

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^k + \ldots + 2^{63}.$$

Сумма этой прогрессии дается формулой (14) § 9 и равна $2^{64} - 1$. При попытке подсчитать это число получаются такие чудовищные результаты, что, если я не ошибаюсь, такого количества риса нет вообще на земле. Итак, функция e^{ξ} стремительно возрастает при $\xi \to +\infty$. Точно так же она стремительно убывает к нулю, когда $\xi \to -\infty$. Так как производная функции e^{ξ} положительна при произвольном ξ (см. § 10, (53)), то функция e^{ξ} возрастает на всем протяжении $-\infty < \xi < +\infty$. Отсюда видно, что уравнение (1) имеет решение для всякого положительного η и притом только одно.

Перейдем теперь к более естественным обозначениям. Рассмотрим уравнение

$$e^y = x \tag{3}$$

и $y=\varphi(x)$ — искомое решение уравнения. Как мы уже отметили, функция

$$\varphi(x)=\ln x \tag{4}$$

определена при всяком положительном x. Возьмем производную от обеих частей равенства (3) по x, считая, что $y=\varphi(x)$, и беря производную от левой части равенства как от сложной функции (см. § 5, (16)). Тогда получим в силу этой формулы

$$(e^y)'\cdot\varphi'(x)=1, \tag{5}$$

где в выражении $(e^y)'$ нужно заменить y через $\varphi(x)$. Так как

$$(e^y)'=e^y=e^{\varphi(x)}=x,$$

то мы получаем для $\varphi'(x)$ выражение

$$\varphi'(x)=\frac{1}{x}. \tag{6}$$

Здесь $\varphi(x)$ есть натуральный логарифм x. Таким образом, производная $\ln x$ определяется формулой

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}. \tag{7}$$

§ 12. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИИ e^x В РЯД

Формулы, полученные в § 10, дают возможность разложить функцию e^x в степенной ряд.

Из формулы (6) § 10 следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\gamma_n(k)=1. \tag{1}$$

Выберем теперь p так, чтобы было $p+1>10|x|$. Тогда из формулы (12) § 10 получим

$$\frac{\gamma_n(k)}{k!}|x|^k\leqslant\frac{|x|^p}{p!}\cdot\frac{1}{10^{k-p}}.$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем

$$\frac{|x|^k}{k!}\leqslant\frac{|x|^p}{p!}\cdot\frac{1}{10^{k-p}}, \tag{2}$$

так как при фиксированном x p — фиксированное число, то из формулы (2) следует, что при неограниченно возрастающем k величина $\frac{|x|^k}{k!}$ стремится к нулю. Таким образом, при фиксированном x найдется настолько большая величина q, что

$$\frac{|x|^k}{k!} < 1 \quad \text{при} \quad k \geqslant q. \tag{3}$$

Хотя при доказательстве этого соотношения мы пользовались определенным выбором натурального числа p, окончательный результат (3) не зависит от этого выбора.

Будем теперь считать, что в формуле (16) § 10 $p > q$. Тогда из нее мы получим

$$|r_n(p, x)| < \frac{|x|^p}{p!} \cdot \frac{|x|}{p+1-|x|} < \frac{|x|}{p+1-|x|}.$$

Из формулы (13) § 10 следует теперь, что

$$|\omega_n(x) - s_n(p, x)| < \frac{|x|}{p+1-|x|}. \tag{4}$$

Из формулы (14) § 10 и (1) следует, что при переходе к пределу при $n \to \infty$ в неравенстве (4) мы получаем

$$\left|e^x - \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^p}{p!}\right)\right| < \frac{|x|}{p+1-|x|}.$$

Так как правая часть этого неравенства стремится к нулю при p неограниченно возрастающем, то неравенство это означает, что e^x разлагается в бесконечный ряд

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^p}{p!} + \ldots \tag{5}$$

При $x = 1$ получаем

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{p!} + \ldots \tag{6}$$

Формулы (6) и (5) удобны для вычисления числа e и функции e^x.

§ 13. ПОСЛЕСЛОВИЕ. О ТЕОРИИ ПРЕДЕЛОВ

Личный опыт убеждает меня, что первоначальное знакомство с математическим анализом не должно начинаться с изучения теории пределов. Будучи еще школьником, я довольно хорошо владел основами дифференциального и интегрального исчисления, умея пользоваться ими для решения задач, но не зная даже о существовании теории пределов, и только на первом курсе я узнал о том, что она существует и был этим очень удивлен. Исторически интегральное и дифференциальное исчисления были уже хорошо развитыми областями математики до того, как появилась теория пределов. Последняя возникла как некоторая надстройка над существовавшей уже теорией. Многие физики считают, что так называемое строгое определение производных и интегралов вовсе не нужно для хорошего понимания дифференциального и интегрального исчисления. Я разделяю их точку зрения. Я думаю, что, начав изложение математического анализа в школе с теории пределов, можно полностью увязнуть в последней, не дойдя ни до каких содержательных результатов. Ознакомление с теорией пределов, если и нужно, то оно должно быть дано уже после ознакомления с содержательными результатами анализа. Поэтому я даю очень неформальное и очень интуитивное описание теории пределов лишь в послесловии.

Теория пределов. Понятие предела всегда связано с изучением поведения некоторой функции $f(\xi)$ в связи с поведением ее аргумента ξ. При этом взаимосвязь поведения функции $f(\xi)$ с поведением аргумента ξ имеет очень специфический характер. Ставится вопрос о том, как ведет себя величина $f(\xi)$, когда переменная величина ξ неограниченно приближается к некоторой постоянной величине x. Если в процессе приближения величины ξ к постоянной величине x, переменная величина $f(\xi)$ также приближается к некоторой постоянной величине f_0 (мы не предполагаем, что функция $f(\xi)$ определена при $\xi = x$), то считается, что функция $f(\xi)$ стремится к пределу f_0 при $\xi \to x$. В виде формулы это записывается так:

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) = f_0. \qquad (1)$$

Для того чтобы не давать формальных определений, а дать лишь интуитивную картину, мы должны представить себе, что ξ является приближенным значением величины x, и точность этого приближения возрастает по мере приближения ξ к x. Точно так же величину $f(\xi)$ надо рассматривать как приближенное значение величины f_0, причем точность приближения возрастает по мере того, как возрастает точность приближения x величиной ξ.

При таком интуитивном описании легко понять основные правила предельного перехода. Если имеются две функции $f(\xi)$ и $g(\xi)$, причем выполнено условие

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) = f_0, \quad \lim_{\xi \to x} g(x) = g_0, \tag{2}$$

т. е. величины $f(\xi)$ и $g(\xi)$ являются все более и более точными приближениями величин f_0 и g_0, когда ξ становится все более точным приближением величины x, то очевидно, что приближенное значение суммы $f_0 + g_0$ дается суммой $f(\xi) + g(\xi)$ и точность этого приближения повышается по мере того, как повышается точность приближений величины f_0 величиной $f(\xi)$ и величины g_0 величиной $g(\xi)$. Отсюда вытекает первое правило теории пределов

$$\lim_{\xi \to x} (f(\xi) + g(\xi)) = f_0 + g_0 = \lim_{\xi \to x} f(\xi) + \lim_{\xi \to x} g(\xi). \tag{3}$$

Точно так же дело обстоит и с произведением. Ясно, что произведение $f(\xi) \cdot g(\xi)$ является приближенным значением произведения $f_0 \cdot g_0$. Точность этого приближения возрастает по мере того, как возрастает точность приближения величины f_0 величиной $f(\xi)$ и точность приближения величины g_0 величиной $g(\xi)$. Отсюда вытекает второе правило теории пределов

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) g(\xi) = f_0 g_0 = \lim_{\xi \to x} f(\xi) \cdot \lim_{\xi \to x} g(\xi). \tag{4}$$

На основании тех же точно соображений мы получаем и третье правило теории пределов

$$\lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f_0}{g_0} = \frac{\lim\limits_{\xi \to x} f(\xi)}{\lim\limits_{\xi \to x} g(\xi)}. \tag{5}$$

Эта формула верна, однако, только при условии, когда $g_0 \neq 0$. Следующее, последнее правило теории пределов относится к неравенствам. Если величина $f(\xi)$, дающая все более и более точное приближение величины f_0, остается все время не превосходящей величины $g(\xi)$, которая дает все более и более точное приближение величины g_0, то ясно, что $f_0 \leqslant g_0$, или, иначе, из соотношения

$$f(\xi) \leqslant g(\xi) \tag{6}$$

следует соотношение

$$f_0 \leqslant g_0$$

или

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) \leqslant \lim_{\xi \to x} g(\xi). \tag{7}$$

Несколько иной, но очень похожий вариант теории пределов, возникает тогда, когда аргументом функции является не переменное число ξ, приближающееся к постоянному числу x, а целое неотрицательное число n, неограниченно возрастающее, так что мы имеем дело с функциями $f(n)$ и $g(n)$, которым обычно дают несколько иное обозначение

$$f(n) = f_n, \quad g(n) = g_n. \tag{8}$$

Здесь ставится вопрос о том, как ведет себя величина f_n, когда число n неограниченно возрастает. Если оказывается, что при этом число f_n неограниченно приближается к числу f_0, то пишут

$$\lim_{n \to \infty} f_n = f_0. \tag{9}$$

Если наряду с этим соотношением имеет место аналогичное соотношение и для второй функции

$$\lim_{n \to \infty} g_n = g_0, \tag{10}$$

то на основании тех же интуитивных соображений, которые имели место при рассмотрении функций $f(\xi)$ и $g(\xi)$, мы получаем теперь основные правила теории пределов. Выпишем их:

$$\lim_{n \to \infty} (f_n + g_n) = \lim_{n \to \infty} f_n + \lim_{n \to \infty} g_n, \tag{11}$$

$$\lim_{n \to \infty} f_n g_n = \lim_{n \to \infty} f_n \cdot \lim_{n \to \infty} g_n, \tag{12}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_n}{g_n} = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} f_n}{\lim\limits_{n \to \infty} g_n}. \tag{13}$$

Формула (13) верна, только если $\lim\limits_{n \to \infty} g_n \neq 0$.

Из соотношения $f_n \leqslant g_n$ следует $\lim\limits_{n \to \infty} f_n \leqslant \lim\limits_{n \to \infty} g_n$.

Непрерывные функции. Понятием предельного перехода пользуются для того, чтобы определить понятие непрерывной функции. Именно, функция $f(\xi)$, которая определена также для значения аргумента $\xi = x$, считается непрерывной при значении аргумента $\xi = x$, если выполнено соотношение

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) = f(x).$$

Функция $f(\xi)$ считается просто непрерывной, если она непрерывна для каждого значения x своего аргумента. Если функция $g(\xi)$ — вторая непрерывная функция, то из правил 1, 2, 3 следует, что сумма функций $f(\xi) + g(\xi)$ непрерывна, произведение функций $f(\xi) g(\xi)$ непрерывно, отношение функций $\frac{f(\xi)}{g(\xi)}$ непрерывно, за исключением лишь тех значений, для которых $g(x) = 0$.

Все функции, которые рассматриваются в книжке, конечно же, непрерывны и, конечно, имеют производные, но говорить об этом на каждом шагу я считаю ненужным. Это должно подразумеваться или, скорее, чувствоваться само собой.

УПРАЖНЕНИЯ

Упражнения к § 1

Укажем прежде всего некоторые приемы вычисления производной. Согласно § 1 производная $f'(x)$ функции $f(x)$ определяется соотношением

$$f'(x) = \lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}. \tag{1}$$

Таким образом, для нахождения производной функции $f(x)$ следует рассмотреть частное

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \tag{2}$$

и посмотреть, как ведет себя это частное, когда x остается постоянным, а ξ неограниченно приближается к x. Если дробь (2) приближается к некоторому определенному пределу, то этот предел обозначается через $f'(x)$ и является производной функции $f(x)$. Наиболее просто предел отношения (2) вычисляется в случае, если числитель его $f(\xi)-f(x)$ удается непосредственно разделить на $\xi - x$. Тогда для перехода к пределу в полученном частном достаточно заменить ξ через x, и мы получим производную $f'(x)$. Это удается, если в выражении $f(\xi)-f(x)$ можно вынести двучленный множитель $\xi - x$. Так как вынесение двучленного множителя есть не очень простая алгебраическая операция, то удобнее изменить обозначения так, чтобы нам можно было вынести одночленный множитель. Для этого полагают

$$h = \xi - x, \tag{3}$$

или, что то же самое,

$$\xi = x + h. \tag{4}$$

Ясно, что $h \to 0$ при $\xi \to x$. Таким образом, в новых обозначениях определение (1) переписывается в виде

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{5}$$

Заметим, что h называется *приращением независимого переменного* x, а разность

$$f(x+h)-f(x) \tag{6}$$

соответствующим *приращением функции*. Если в выражении (6) мы можем вынести за скобку множитель h, то деление его на h является чисто алгебраической операцией и вследствие этого для нахождения предела (5) достаточно в полученном частном заменить h через 0. Этот прием хорошо удается в случае, если $f(x)$ есть рациональная функция x, но в случае наличия радикалов он тоже может удаться. Так, например, если разность (6) может быть записана в виде $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, где a и b есть рациональные выражения, то, умножая и деля эту разность на сумму $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, мы получим

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Выражение $a-b$ уже не содержит иррациональности и может быть разделено либо на $\xi-x$, либо на h в зависимости от того, пользуемся мы определением (1) или определением (5) производной.

Пользуясь этими приемами, найдите производную функции $f(x)$, которая задается нижеследующими различными формулами:

Упражнение 1. $f(x)=ax^2+bx+c$.

Ответ. $f'(x)=2ax+b$.

Упражнение 2. $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

Ответ. $f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

Упражнение 3. $f(x)=\frac{1}{x}$.

Ответ. $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

Упражнение 4. $f(x)=\frac{1}{x^2}$.

Ответ. $f'(x)=-\frac{2}{x^3}$.

Упражнение 5. $f(x)=\frac{x-a}{x-b}$.

Ответ. $f'(x)=\frac{a-b}{(x-b)^2}$.

Упражнение 6. $f(x)=\frac{1}{ax^2+bx+c}$.

Ответ. $f'(x)=-\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^2}$.

Упражнение 7. $f(x)=\sqrt{x}$.

Ответ. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Упражнение 8. $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$.

Ответ. $f'(x)=\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Упражнения к § 2

Правило вычисления производной многочлена настолько просто, что невозможно дать на него сколько-нибудь трудное интересное упражнение. Поэтому дадим здесь только два упражнения, причем второе будет использовано в дальнейшем. Вычислим производную двух следующих многочленов.

Упражнение 1. $f(x)=x^4+4x^3+6x^2+4x+1$.

Ответ. $f'(x)=4(x^3+3x^2+3x+1)$.

Упражнение 2. $f(x)=3x^5-5(a^2+b^2)x^3+15a^2b^2x$.

Ответ. $f'(x)=15[x^4-(a^2+b^2)x^2+a^2b^2]$.

Упражнения к § 3

Рассмотреть нижеследующие многочлены $f(x)$. Установить участки возрастания и убывания многочлена $f(x)$, а также найти все значения x, при которых многочлен $f(x)$ имеет максимумы и минимумы, и отличить их друг от друга.

Упражнение 1. $f(x)=x^4-px^2+q$.

Ответ. При $p\leqslant 0$ многочлен $f(x)$ убывает при $-\infty<x\leqslant 0$ и возрастает при $0\leqslant x<\infty$. Он достигает своего минимума в точке $x=0$. В этой точке вторая производная многочлена $f(x)$ положительна при p отрицательном и равна 0 при $p=0$. Таким образом, условие (30) § 3 не является необходимым условием минимума функции. При p положительном многочлен $f(x)$ достигает своего максимума в точке $x=0$ и имеет два минимума при $x=-\sqrt{p/2}$ и $x=\sqrt{p/2}$. Этот многочлен убывает на участке $-\infty<x\leqslant-\sqrt{p/2}$, возрастает на участке $-\sqrt{p/2}\leqslant x\leqslant 0$, вновь убывает на участке $0\leqslant x\leqslant\sqrt{p/2}$ и снова возрастает на участке $\sqrt{p/2}\leqslant x<\infty$.

Упражнение 2. $f(x)=3x^5-5(a^2+b^2)x^3+15a^2b^2x$ (см. упражнение 2 § 2).

Ответ. Будем считать, что числа a и b положительны. Для определенности предположим, что $a>b$. Многочлен $f(x)$ возрастает на участке $-\infty<x\leqslant-a$, убывает на участке $-a\leqslant x\leqslant-b$, возрастает на участке $-b\leqslant x\leqslant b$, убывает на участке $b\leqslant x\leqslant a$ и возрастает на участке $a\leqslant x<\infty$. Он имеет максимумы в точках $x=-a$, $x=b$ и минимумы в точках $x=-b$, $x=a$.

Упражнение 3. Имеется прямоугольный железный лист со сторонами a и b, причем $a\geqslant b$. Вырежем по углам этого листа квадраты со стороной $x<\frac{b}{2}$ и у полученной так железной выкройки загнем под прямым углом кверху каждый из выступов. Тогда получится коробка, основанием которой служит прямоугольник со сторонами $a-2x$ и $b-2x$, а высота равна x, так что объем коробки равен $x(a-2x)(b-2x)$. Найти, при каком значении x объем коробки максимален.

Ответ. $x=\frac{1}{6}\left(a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}\right)$.

В случае $a=b$ получаем более простое решение

$$x=a/6.$$

Упражнения к § 4

Начертить графики нижеследующих многочленов $f(x)$.

Упражнение 1. $f(x)=x^4-px^2+q$ (см. упражнение 1 § 3).

Ответ. В упражнении 1 § 3 многочлен $f(x)$ уже достаточно исследован. Остается только выяснить, при каких условиях график его пересекается с осью абсцисс, т. е. уравнение $f(x)=0$ имеет действительные корни и сколько имеется этих корней.

В случае $p\leqslant 0$ уравнение $f(x)=0$ не имеет действительных корней, когда $q>0$, и имеет два действительных корня, когда $q<0$. Если $p=0$ и $q=0$, то имеется четырехкратный корень $x=0$, а при $p<0$, $q=0$ — двукратный корень $x=0$.

При $p>0$ и $q<0$ имеются два действительных корня. При $p>0$, $q>0$ уравнение $f(x)=0$ имеет четыре действительных корня, если $\frac{p^2}{4}-q>0$, и не имеет действительных корней при $\frac{p^2}{4}-q<0$. Если $q>0$ и $\frac{p^2}{4}-q=0$, то имеются два двойных корня $x=\pm\sqrt{p/2}$. Если $p>0$, $q=0$, то имеются три действительных корня, один из которых двойной.

Упражнение 2.

$$f(x)=3x^5-5(a^2+b^2)x^3+15a^2b^2x$$

(см. упражнение 2 § 3).

Ответ. В упражнении 2 § 3 уже в значительной степени выявлено поведение графика многочлена $f(x)$. Остается выяснить вопрос, при каких условиях график этот пересекается с осью абсцисс в одной точке $x=0$ или в большем числе точек. В последнем случае определить число точек пересечения.

Уравнение $f(x)=0$ имеет пять действительных корней, если $a^2/b^2>5$, один действительный корень, если $a^2/b^2<5$, и в случае $a^2/b^2=5$ — три действительных корня, из которых два двойные.

Упражнения к § 5

Упражнение 1. Вычертить графики функций

$$y = \sin x,$$
$$y = \cos x.$$

Найти участки убывания каждой из функций $\sin x$ и $\cos x$, найти точки максимума и минимума каждой из этих функций. Найти точки пересечения графиков этих функций с осью абсцисс. Найти точки перегиба каждого из этих графиков.

Упражнение 2. Вычертить график функции

$$y = \operatorname{tg} x.$$

Ответ. Так как функция $\operatorname{tg} x$ периодическая с периодом π, так что

$$\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x,$$

где k — произвольное целое число, то для построения всего графика функции $\operatorname{tg} x$ достаточно построить его на участке $-\pi/2 < x < \pi/2$. На этом участке функция $\operatorname{tg} x$ возрастает от $-\infty$ до ∞, проходя через нуль при $x = 0$, где график ее имеет точку перегиба. Для построения всего графика функции $\operatorname{tg} x$ следует сместить уже построенную часть параллельно вдоль оси абсцисс на величину $k\pi$, где k — произвольное целое число. Каждый такой сдвиг дает отдельную ветвь графика функции $\operatorname{tg} x$, не пересекающуюся с другими ветвями.

Упражнение 3. Вычертить график функции

$$y = f(x) = \frac{a}{x},$$

где a — положительное число.

Ответ. Функция $f(x)$ не определена при $x = 0$ и потому состоит из двух отдельных ветвей: лежащей над осью абсцисс при $x > 0$ и лежащей под осью абсцисс при $x < 0$. Так как

$$\left(\frac{a}{x}\right)' = -\frac{a}{x^2},$$

то на каждой из двух своих ветвей функция $f(x)$ убывает. Рассмотрим ее более внимательно при $x > 0$. Если, оставаясь положительным, x приближается к нулю, то функция $f(x)$ неограниченно возрастает, так что график ее прижимается к оси ординат. Точно так же при неограниченном возрастании x значение функции $f(x)$ стремится к нулю, так что график ее при возрастании x прижимается к оси абсцисс. Зависимость между x и y можно переписать в форме

$$xy = a.$$

Кривая, определяемая этим уравнением, очевидно, симметрична относительно биссектрисы I и III четвертей.

Упражнение 4. Построить график функции

$$y = f(x) = x^2 \cos x.$$

Ответ. Прежде всего видно, что функция $f(x)$ четная, именно: $f(-x) = f(x)$. Таким образом, график этой функции симметричен относительно оси ординат, и, следовательно, достаточно представить его себе для $x \geqslant 0$. При положительных значениях x знак функции $x^2 \cos x$ совпадает со знаком функции $\cos x$. Отсюда видно, что при $x > \pi/2$ график состоит из волн, аналогичных волнам функции $\cos x$, но волны эти растут по мере возрастания x, так как $\cos x$ множится на x^2. Ясно, что на каждой волне, лежащей над осью абсцисс, функция $f(x)$ достигает максимума, а на каждой волне, лежащей под осью абсцисс, функция $f(x)$ достигает своего минимума. Более тщательного рассмотрения требует отрезок $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$. В концах этого отрезка функция $\cos x$ обращается в нуль, следовательно, и функция $f(x)$ также обращается в нуль. При промежуточных значениях x функция $f(x)$ неотрицательна. При $x = 0$ график этой функции проходит через начало координат, где $f(x)$ достигает своего минимума. На отрезке $0 < x < \pi/2$ функция $f(x)$ положительна, кроме концов отрезка, где она обращается в нуль, следовательно, на этом отрезке она где-то достигает своего максимума. Для того чтобы найти те значения x, при которых функция $f(x)$ достигает своих максимумов и минимумов, нужно приравнять к нулю ее производную, т. е. решить уравнение

$$2x \cos x - x^2 \sin x = 0.$$

Деля это равенство на $x^2 \cos x$, мы получаем уравнение

$$\frac{2}{x} = \operatorname{tg} x.$$

Таким образом, для нахождения точек максимума и минимума $f(x)$, мы должны найти пересечение графиков функций $y = \frac{2}{x}$ и $y = \operatorname{tg} x$. Так как график функции $y = \frac{2}{x}$ прижимается к оси абсцисс при возрастании x, то при сравнительно больших x решение уравнения $\frac{2}{x} = \operatorname{tg} x$ приблизительно совпадает с решением уравнения $\operatorname{tg} x = 0$, т. е. приблизительно равно числу $k\pi$, где k — целое. Геометрически видно, что решение уравнения $\frac{2}{x} = \operatorname{tg} x$ в действительности несколько больше, чем число $k\pi$. Из этого видно, что на каждой волне графика функции $f(x)$ эта функция достигает либо своего максимума примерно в том же месте, где и функция $\cos x$, либо своего минимума примерно в том же месте, где и функция $\cos x$, имеет место лишь небольшой сдвиг вправо.

Упражнение 5. Вычислить производные функций, приведенных в упражнениях к § 1, пользуясь правилами, данными в § 5.

Вычислить производные нижеследующих функций.

Упражнение 6. $f(x) = (\sin x)^n$.

Ответ. $f'(x) = n(\sin x)^{n-1} \cos x$.

Упражнение 7. $f(x) = \sin x^n$.

Ответ. $f'(x) = \cos x^n \cdot nx^{n-1}$.

Упражнение 8. $f(x) = \sqrt[n]{x}$.

Ответ. $f'(x) = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.

Упражнение 9. Будем исходить из некоторой функции $\psi(y)$ переменного y. Ее производную по переменному y мы, как это принято, обозначаем через $\psi'(y)$. Положим теперь $y = ax$, где a — постоянная. Заменяя в функции $\psi(y)$ ее аргумент y на ax, мы получаем функцию

$$f(x) = \psi(ax)$$

переменного x. Вычислить производную $f'(x)$.

Ответ.

$$f'(x) = \psi'(ax) \cdot a.$$

Таким образом, для нахождения $f'(x)$ мы должны сперва вычислить производную $\psi'(y)$, а затем заменить в ней y через ax и умножить полученное выражение на постоянную a. Для доказательства последней формулы следует использовать формулу (16) § 5. В силу этой формулы мы имеем

$$f'(x) = \psi'(ax)(ax)' = \psi'(ax) \cdot a.$$

Упражнение 10. Будем исходить из функции $\psi(y)$ переменного y. Ее производную по переменному y, как это принято, обозначим через $\psi'(y)$. Положим теперь $y = x + a$. Подставляя вместо y в функцию $\psi(y)$ это выражение, мы получим функцию

$$f(x) = \psi(x + a).$$

Вычислить производную $f'(x)$ функции $f(x)$.

Ответ. $f'(x) = \psi'(x + a)$.

Это значит, что для вычисления производной $f'(x)$ следует вычислить производную $\psi'(y)$ функции $\psi(y)$ и затем в полученном выражении заменить y через $x + a$. Для доказательства этого мы должны воспользоваться формулой (16) § 5. В силу этой формулы мы имеем

$$f'(x) = \psi'(x+a)(x+a)' = \psi'(x+a).$$

Обратные функции. В математике и ее приложениях функции часто определяются как решение уравнения. Наиболее важен следующий случай. Будем исходить из заданной функции $\psi(y)$ переменного y и рассмотрим уравнение

$$\psi(y) = x, \tag{7}$$

где x известная, хотя и переменная величина, а y — неизвестная величина, которую нужно определить из этого уравнения. Так как в уравнение входит x, то его решение y является функцией x, так что мы можем написать

$$y = \varphi(x). \tag{8}$$

Это решение удовлетворяет уравнению (7), т. е. мы должны иметь тождество

$$\psi(\varphi(x)) = x. \tag{9}$$

Выясним прежде всего достаточные условия, при которых уравнение (7) разрешимо относительно y. Выделим некоторый отрезок

$$b_1 \leqslant y \leqslant b_2 \tag{10}$$

изменения переменного y и допустим, что для всех внутренних значений y из отрезка (10), т. е. для всех значений y, удовлетворяющих условию

$$b_1 < y < b_2, \tag{11}$$

производная $\psi'(y)$ имеет один и тот же знак, т. е. выполнено одно из двух соотношений: либо

$$\psi'(y) > 0 \quad \text{при} \quad b_1 < y < b_2 \tag{12}$$

либо

$$\psi'(y) < 0 \quad \text{при} \quad b_1 < y < b_2. \tag{13}$$

Положим теперь

$$a_1 = \psi(b_1), \quad a_2 = \psi(b_2). \tag{14}$$

В случае (12) функция $\psi(y)$ возрастает на отрезке $[b_1, b_2]$. В случае (13) функция $\psi(y)$ убывает на отрезке $[b_1, b_2]$ (см. § 3). Таким образом, в случае (12) мы имеем $a_1 < a_2$, а в случае (13) мы имеем $a_2 < a_1$.

В случае (12) величина $x = \psi(y)$ пробегает весь отрезок $[a_1, a_2]$, возрастая, когда y пробегает отрезок $[b_1, b_2]$. В случае (13) величина $x = \psi(y)$ пробегает весь отрезок $[a_1, a_2]$, убывая, когда y пробегает отрезок $[b_1, b_2]$. Таким образом, если выполнено условие (12) или условие (13), каждому значению x соответствует единственное значение y, получаемое из уравнения (7), и потому функция $y = \varphi(x)$ определена для всех значений, лежащих на отрезке $[a_1, a_2]$. Функция $\varphi(x)$ называется *обратной* к функции $\psi(y)$.

Для придания всему рассмотрению геометрической наглядности построим график функции $\psi(y)$, но несколько необычным образом. Именно, мы будем откладывать по оси ординат величину независимого переменного y, а по оси абсцисс величину зависимого переменного $x = \psi(y)$. Полученный так график функции $\psi(y)$ обозначим через L. График этот является одновременно графиком функции $y = \varphi(x)$, если при его построении мы будем независимое переменное x откладывать по оси абсцисс, а зависимое переменное y — по оси ординат.

Пусть p — произвольная точка графика L, а x и y — ее абсцисса и ордината

$$p = (x, y).$$

Величину x можно определить через величину y по формуле (7), а величину y по величине x можно определить по формуле (8). Начнем с величины y. Вычислим величину x по формуле (7). По полученной величине $x = \psi(y)$ вычислим величину y по формуле (8). Тогда мы получим

$$\varphi(\psi(y)) = y. \tag{15}$$

Таким образом, функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ связаны двумя соотношениями: соотношением (9) и соотношением (15). Отсюда видно, что связь между функциями $\psi(y)$ и $\varphi(x)$ взаимная, так что функции эти разумно называть *взаимно обратными*.

Вычислим теперь производную $\varphi'(x)$ функции $\varphi(x)$, исходя из того, что она задается уравнением (9). Для этого возьмем производную от тождества (9) по x. Производная правой части, очевидно, равна единице. Производную левой части вычислим по формуле (16) § 5, как производную от сложной функции. Тогда мы получим

$$\psi'(y)\,\varphi'(x) = 1.$$

Таким образом, мы получаем

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\psi'(y)} = \frac{1}{\psi'(\varphi(x))}.$$

Здесь мы выразили y через x по формуле (8) и окончательно получили для производной $\varphi'(x)$ функции $\varphi(x)$ формулу

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\psi'(\varphi(x))}. \tag{16}$$

Применим полученные результаты для вычисления производных обратных тригонометрических функций, т. е. функций $\arcsin x$, $\arccos x$ и $\operatorname{arctg} x$.

Упражнение 11. Будем исходить из функции

$$\psi(y) = \sin y$$

и будем рассматривать эту функцию на отрезке

$$-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2.$$

Так как

$$\sin' y = \cos y,$$

то для всех внутренних точек отрезка $[-\pi/2, \pi/2]$ имеем

$$\sin' y = \cos y > 0.$$

В нашем случае

$$b_1 = -\pi/2, \quad b_2 = \pi/2,$$

$$a_1 = \sin(-\pi/2) = -1, \quad a_2 = \sin(\pi/2) = +1.$$

Таким образом, решение $y = \varphi(x)$ уравнения (7) относительно y определено для всех значений x, принадлежащих отрезку

$$-1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Решение это обозначается через $\arcsin x$. Таким образом, мы имеем

$$\sin(\arcsin x) = x. \tag{17}$$

По ранее доказанному одновременно имеет место и соотношение

$$\arcsin(\sin y) = y. \tag{18}$$

Задача заключается в том, чтобы, пользуясь формулой (16), вычислить производную $\arcsin' x$ функции $\arcsin x$.

Ответ.

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{19}$$

В самом деле, в силу формулы (16) мы имеем

$$\arcsin' x = \frac{1}{\psi'(y)} = \frac{1}{\cos y}.$$

Величину $\cos y$ нужно теперь выразить как функцию величины x. Мы знаем, что $x = \sin y$, отсюда следует, что

$$\cos y = \sqrt{1 - x^2}.$$

Таким образом, мы окончательно получаем соотношение (19).

Упражнение 12. Функция $\arccos x$ определяется условием

$$\cos(\arccos x) = x.$$

Вычислить производную $\arccos' x$ функции $\arccos x$.

Ответ.

$$\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{20}$$

Упражнение 13. Функция $\operatorname{arctg} x$ определяется условием

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x,$$

где рассматриваются лишь решения $|\operatorname{arctg} x| < \frac{\pi}{2}$. Вычислить, пользуясь формулой (16), производную $\operatorname{arctg}' x$ функции $\operatorname{arctg} x$.

Ответ.

$$\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2}. \tag{21}$$

Упражнение 14. Вычислить производную функции

$$f(x) = \arcsin x + x\sqrt{1-x^2}. \tag{22}$$

Ответ. $f'(x) = 2\sqrt{1-x^2}$. (23)

Упражнения к § 6

Упражнение 1. Найти первообразную $h(x)$ функции $f(x) = x^3 - px$.

Ответ. $h(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{p}{2}x^2$.

Упражнение 2. Найти первообразную $h(x)$ функции $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Ответ.

$$h(x) = \frac{r^2}{2}\arcsin\frac{x}{r} + \frac{x}{2}\sqrt{r^2 - x^2}. \tag{24}$$

Для доказательства положим

$$\psi(y) = \arcsin y + y\sqrt{1-y^2}.$$

В силу формулы (23) имеем

$$\psi'(y) = 2\sqrt{1-y^2}. \tag{25}$$

Вычислим теперь производную функции $\psi\left(\frac{x}{r}\right)$. Мы имеем в силу формулы упражнения 9 § 5

$$\left(\psi\left(\frac{x}{r}\right)\right)' = \frac{1}{r}\psi'\left(\frac{x}{r}\right).$$

Из этого следует справедливость формулы (24).

Упражнение 3. В приложениях к математике играют большую роль так называемые *дифференциальные уравнения*. В этих уравнениях неизвестными являются функции, а в уравнения входят не только сама функция, но и ее производные. Одним из наиболее простых, но в то же время важных уравнений является следующее:

$$f''(t) + \omega^2 f(t) = 0. \tag{26}$$

Здесь независимая переменная обозначена через t, а $f(t)$ есть неизвестная функция. Расскажем, как это уравнение возникает в механике. Рассмотрим движение точки по прямой, которую мы примем за ось абсцисс. Обозначим через x абсциссу движущейся точки. Движение этой точки задается уравнением

$$x = f(t),$$

где t есть время, а x — абсцисса точки в момент времени t. Рассмотрим движение точки x массы m, находящейся под действием силы притяжения к началу координат, причем сила эта пропорциональна величине отклонения точки от начала координат, так что сила эта равна $-kx$, где k — постоянный положительный коэффициент. Тогда в силу законов механики мы имеем

$$mf''(t) = -kf(t).$$

Здесь слева стоит масса, умноженная на ускорение точки, а справа — величина действующей силы. Обозначая положительную величину k/m через ω^2, мы можем переписать последнее уравнение в виде (26). Наша задача заключается в том, чтобы найти решение уравнения (26), точнее, все решения этого уравнения, так как решений существует не одно.

Ответ. Любое решение уравнения (26) записывается в виде

$$f(t) = a\sin(\omega t + \alpha), \tag{27}$$

где a и α — произвольные константы. Докажем это. Прежде всего упростим уравнение (26), вводя новое независимое переменное $\tau = \omega t$ и обозначим новую неизвестную функцию через $\psi(\tau)$, так что мы имеем

$$f(t) = \psi(\tau) = \psi(\omega t),$$

и потому

$$f'(t) = (\psi(\omega t))' = \omega\psi'(\tau).$$

Далее, мы имеем

$$f''(t) = \omega^2\psi''(\tau).$$

Теперь уравнение (26) переписывается в форме

$$\omega^2\psi''(\tau) + \omega^2\psi(\tau) = 0,$$

или иначе

$$\psi''(\tau) + \psi(\tau) = 0. \tag{28}$$

Умножая это уравнение на $2\psi'(\tau)$, мы получаем

$$2\psi'(\tau)\psi''(\tau) + 2\psi(\tau)\psi'(\tau) = 0.$$

Легко проверяется, что левая часть этого уравнения является первообразной от функции

$$(\psi'(\tau))^2 + (\psi(\tau))^2.$$

Так как производная этой функции равна нулю, то она является константой, притом неотрицательной. Таким образом, из уравнения (28) вытекает равенство

$$(\psi'(\tau))^2 + (\psi(\tau))^2 = a^2,$$

где a — неотрицательная константа. При $a=0$ функция $\psi(\tau)$ тождественно равна нулю. При $a>0$ введем новую неизвестную функцию

$$\varphi(\tau)=\frac{\psi(\tau)}{a}.$$

Тогда для функции $\varphi(\tau)$ мы получаем уравнение

$$(\varphi'(\tau))^2+(\varphi(\tau))^2=1.$$

Отсюда мы получаем

$$(\varphi'(\tau))^2=1-(\varphi(\tau))^2.$$

Далее

$$\frac{(\varphi'(\tau))^2}{1-(\varphi(\tau))^2}=1.$$

Извлекая из обеих частей этого равенства квадратный корень, получаем

$$\frac{\varphi'(\tau)}{\sqrt{1-(\varphi(\tau))^2}}=\pm 1. \tag{29}$$

Левая часть этого равенства имеет первообразную $\arcsin\varphi(\tau)$ (см. формулу (16) § 5 и упражнение 11 к § 5), правая часть — первообразную $\pm\tau$. Таким образом, из уравнения (29) вытекает

$$\arcsin\varphi(\tau)=\pm\tau+\alpha,$$

где α есть произвольная константа. Функция $\varphi(\tau)$, являющаяся решением этого уравнения, записывается в виде

$$\varphi(\tau)=\sin(\pm\tau+\alpha).$$

Здесь мы как бы имеем два различных решения

$$\varphi(\tau)=\sin(\tau+\alpha) \tag{30}$$

и

$$\varphi(\tau)=\sin(-\tau+\alpha). \tag{31}$$

Но в действительности решение (31) может быть записано в форме (30) за счет выбора константы α. Действительно, выберем в решении (30) константу α в следующей форме:

$$\alpha=-\beta+\pi,$$

где β — также произвольная константа. Тогда решение (30) запишется в виде

$$\sin(\tau-\beta+\pi)=\sin(-\tau+\beta).$$

Таким образом, решение (31) получается из решения (30) путем переобозначения констант. Итак, произвольное решение уравнения (29) записывается в виде

$$\varphi(\tau)=\sin(\tau+\alpha).$$

Отсюда следует, что

$$\psi(\tau) = a \sin(\tau + \alpha),$$

и далее

$$f(t) = a \sin(\omega t + \alpha).$$

Итак, произвольное решение уравнения (26) записывается в форме (27), где a и α — произвольные константы, причем можно считать, что a есть неотрицательная величина. Уравнение

$$x = a \sin(\omega t + \alpha) \tag{32}$$

дает нам колебательное движение точки x с амплитудой a и начальной фазой α. Если положить $\omega = \frac{2\pi}{T}$, то уравнение (32) перепишется в виде

$$x = a \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right),$$

где T — есть период колебательного движения (32).

Упражнения к § 7

Упражнение 1. Рассмотрим кубическую пораболу L, задаваемую уравнением

$$y = f(x) = x^3 - px,$$

где p — положительное число. График L функции $f(x)$ пересекается с осью абсцисс в трех точках a_{-1}, a_0, a_1, абсциссы которых соответственно равны $-\sqrt{p}$, 0, $\sqrt{p}$. Дугу кривой L, идущую от точки a_{-1} до точки a_0, обозначим через L_1. Дуга L_1 проходит над осью абсцисс и вместе с отрезком $[a_{-1}, a_0]$ оси абсцисс ограничивает площадку P плоскости. Вычислим площадь S площадки P.

Ответ. $S = \frac{p^2}{4}$.

В силу формулы (16) § 7

$$S = \int_{-\sqrt{p}}^{0} f(t)\,dt. \tag{33}$$

Так как функция

$$h(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{p}{2}x^2$$

является первообразной для функции $f(x)$, то определенный интеграл (33) записывается в виде

$$\int_{-\sqrt{p}}^{0} f(t)\,dt = h(0) - h(-\sqrt{p}) = \frac{p^2}{4}.$$

Таким образом,

$$S = p^2/4.$$

Упражнение 2. Вычислить площадь S круга радиуса r при помощи формулы (16) § 7.

Ответ. $S = \pi r^2$.

Для вычисления выберем окружность радиуса r с центром в начале координат. Тогда уравнение ее запишется в виде $x^2 + y^2 = r^2$ или, иначе, $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$.

Будем рассматривать ту часть площади, которая находится в первой четверти координатной плоскости. Уравнение соответствующей части окружности записывается в виде $y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, где x меняется от 0 до r. Таким образом, площадь той части круга, которая находится в первом квадранте, записывается в виде определенного интеграла

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - t^2}\, dt.$$

Функция

$$h(x) = \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{x}{r} + \frac{x}{2}\sqrt{r^2 - x^2}$$

является первообразной для функции $f(x)$ (см. упражнение 2 § 6). Таким образом, мы имеем

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - t^2}\, dt = h(r) - h(0) = r^2 \cdot \frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, площадь всего круга равна πr^2.

Упражнения к § 8

Упражнение 1. Доказать, что ряд

$$S = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots, \tag{34}$$

составленный из бесконечного числа положительных слагаемых, сходится, и вычислить его сумму.

Ответ. $S = 1$.

Для вычисления суммы S бесконечного ряда (34) составим предварительную сумму

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}. \tag{35}$$

Заметим, что

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

В силу этой формулы мы имеем

$$S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Таким образом, при неограниченно возрастающем n сумма S_n стремится к 1, и потому сумма S бесконечного ряда (34) равна 1.

Упражнение к § 10

Упражнение 1. Доказать, что функция

$$f(x) = \frac{e^x}{x^k},$$

где k — произвольное натуральное число, всегда стремится к бесконечности, когда x неограниченно возрастает.

Ответ. По доказанному в § 10 имеем

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Отсюда следует, что

$$e^x > \gamma_n(k+1) \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$$

(см. (7) § 10). Переходя в этом соотношении к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$e^x \geqslant \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Таким образом, мы имеем при положительных значениях x

$$f(x) = \frac{e^x}{x^k} > \frac{x^{k+1}}{(k+1)!\, x^k} = \frac{x}{(k+1)!}.$$

Ясно, что при x, стремящемся к бесконечности, правая часть последнего неравенства стремится к бесконечности, и тем самым наше утверждение доказано.

Упражнения к § 11

Упражнение 1. Доказать, что функция

$$f(x) = \frac{(\ln x)^k}{x}$$

стремится к нулю при $x \to \infty$.

Ответ. При доказательстве использовать упражнение 1 к § 10.

Упражнение 2. Начертить график функции

$$y = f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

Ответ. Функция $f(x)$ на участке $0 < x \leqslant e$ изменяется, возрастая, в пределах $-\infty < f(x) \leqslant \frac{1}{e}$, а затем на участке $e \leqslant x < \infty$ убывает, стремясь к нулю. В точке $x = e$ она достигает максимума.

Упражнение 3. Решить дифференциальное уравнение

$$f'(x) = \lambda f(x), \tag{36}$$

где $f(x)$ есть неизвестная функция, а λ — заданное число.

Ответ.

$$f(x) = ae^{\lambda x}, \tag{37}$$

где a есть произвольная постоянная величина. Среди решений уравнения (36) есть решение

$$f(x) \equiv 0.$$

Если решение $f(x)$ уравнения (36) не равно тождественно нулю, то выберем такой участок $b_1 \leqslant x \leqslant b_2$ изменения x, внутри которого функция $f(x)$ либо положительна, либо отрицательна. Тогда для значений x, удовлетворяющих условию $b_1 < x < b_2$, можем уравнение (36) разделить на $f(x)$ и получить

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \lambda. \tag{38}$$

В случае $f(x) > 0$ первообразной левой части уравнения (38) является функция

$$h(x) = \ln f(x)$$

(см. (16) § 5 и (7) § 11). В случае $f(x) < 0$ первообразной левой части уравнения является функция

$$h(x) = \ln(-f(x)).$$

Первообразной для правой части уравнения (38) является λx. Таким образом, как для положительной функции $f(x)$, так и для отрицательной функции $f(x)$ мы имеем равенство

$$\ln|f(x)| = \lambda x + c,$$

где c — постоянная величина. Из этого следует, что

$$|f(x)| = e^c e^{\lambda x}$$

или, иначе,

$$f(x) = \pm e^c e^{\lambda x} = ae^{\lambda x},$$

где a — положительная или отрицательная константа.

Из этого видно, что в концах b_1, b_2 нашего участка функция $f(x)$ не может обращаться в нуль, и поэтому наш участок $b_1 \leqslant x \leqslant b_2$ можно расширить в обе стороны с сохранением знака функции $f(x)$. Отсюда вытекает, что для всех значений x функция $f(x)$ сохраняет знак. Поэтому формула (37) дает решение уравнения (36) для всех значений x. Для a мы должны допустить также значение 0, чтобы учесть решение, тождественно равное нулю.

Упражнения к § 13

Упражнение 1. Доказать, что функция $\sin\frac{1}{x}$ не стремится ни к какому пределу при $x \to 0$. Более полно, можно подобрать такую последовательность положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$, сходящуюся к нулю, что

$$\lim_{k\to\infty} \sin\frac{1}{x_k} = c,$$

где c — произвольное число, заключенное между -1 и 1.

Ответ. Положим $x_k = \dfrac{1}{2k\pi + \alpha}$, где $\alpha \geqslant 0$. Ясно, что

$$\lim_{k\to\infty} x_k = 0, \quad \text{а} \quad \lim_{k\to\infty} \sin\frac{1}{x_k} = \sin\alpha.$$

Упражнение 2. Показать, что функция

$$f(x) = x\sin\frac{1}{x} \tag{39}$$

непрерывна, но не имеет производной при $x = 0$.

Ответ. Для нахождения $f'(0)$ мы должны составить частное

$$\frac{f(\xi) - f(0)}{\xi - 0} = \frac{\xi\sin\frac{1}{\xi}}{\xi} = \sin\frac{1}{\xi}, \tag{40}$$

но так как функция $\sin\frac{1}{\xi}$ не стремится ни к какому пределу при $\xi \to 0$ (см. упражнение 1), то частное (40) не стремится ни к какому пределу при $\xi \to 0$, и потому функция (39) не имеет производной при $x = 0$.

Лев Семенович Понтрягин

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ

М., 1980 г., 88 стр. с илл.

Редакторы *А. Ф. Лапко*, *В. Р. Телеснин*
Техн. редактор *Н. В. Вершинина*
Корректор *Л. С. Сомова*

ИБ № 11601

Сдано в набор 25.07.79. Подписано к печати 16.01.80. Т-02420. Бумага $84 \times 108^1/_{32}$, тип. № 3. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 4,62. Уч.-изд. л. 4,12. Тираж 150 000 экз. Заказ № 292.
Цена книги 10 коп.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29