ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА ИНЖЕНЕРА

И. В. ДУНИН-БАРКОВСКИЙ и Н. В. СМИРНОВ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА В ТЕХНИКЕ

(ОБЩАЯ ЧАСТЬ)

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1955

Дунин-Барковский Игорь Валерианович и Смирнов Николай Васильевич.
Теория вероятностей и математическая статистика в технике.

Редактор *А. Ф. Лапко.* Техн. редактор *Н. Я. Мурашова.* Корректор *Н. В. Казанская*

Сдано в набор 18/XI 1954 г. Подписано к печати 1/II 1955 г. Бумага 70×108/16. Физ. печ. л. 34,75. Усл. печ. л. 47,61. Уч.-изд. л. 47,67. Тираж 8 000 экз. Т-00861. Цена книги 25 р. 85 к. Заказ № 1810.

Государственное издательство технико-теоретической литературы. Москва, В-71. Б. Калужская, 15

Министерство культуры СССР. Главное управление полиграфической промышленности.
4-я тип. им. Евг. Соколовой. Ленинград, Измайловский пр., 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 9

ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ. ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ В ТЕХНИЧЕСКИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

ГЛАВА II

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. Случайные события, величины и процессы. Частость и вероятность 16
2.1.1. Испытание. Событие. Случайная величина. Случайный процесс 16. **2.1.2.** Частость и вероятность 18. **2.1.3.** Соотношения между событиями 19. **2.1.4.** Классическое определение вероятности 21. **2.1.5.** Основные свойства вероятности 23.

§ 2. Простейшие способы исчисления вероятностей 24
2.2.1. Непосредственный подсчет вероятностей 24. **2.2.2.** Комбинаторика (теория соединений) и приближенное вычисление факториалов 25. **2.2.3.** Задача о статистической (безвозвратной) выборке 26. **2.2.4.** Правило сложения вероятностей 28. **2.2.5.** Условная вероятность события. Правило сложения в общем случае 29. **2.2.6.** Правило умножения вероятностей. Независимость событий в совокупности 33. **2.2.7.** Формула полной вероятности 36. **2.2.8.** Формула вероятностей гипотез 37.

§ 3. Общие принципы исчисления вероятностей 38
2.3.1. Ограниченность классического определения вероятности 38. **2.3.2.** Общие принципы исчисления вероятностей 39.

§ 4. Схема независимых испытаний и связанные с ней распределения вероятностей 42
2.4.1. Биномиальное распределение 42. **2.4.2.** Вероятнейшее число появлений события 45. **2.4.3.** Распределение Пуассона 46. **2.4.4.** Уточнение формулы Пуассона 50.

ГЛАВА III

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

§ 1. Законы распределения случайных величин 51
3.1.1. Распределение дискретной случайной величины 51. **3.1.2.** Непрерывные случайные величины. Интегральная функция распределения и плотность вероятности. Квантили 54.

§ 2. Двумерные случайные величины 60
3.2.1. Дискретная двумерная величина и ее условные законы распределения 60. **3.2.2.** Непрерывные двумерные величины, их функции распределения и плотности вероятности 65.

§ 3. Числовые характеристики положения центра группирования 67
3.3.1. Математическое ожидание (среднее значение) 67. **3.3.2.** Медиана 74. **3.3.3.** Мода 75. **3.3.4.** Теоремы о математических ожиданиях (средних значениях) 77.

§ 4. Характеристики рассеивания 80
3.4.1. Дисперсия и среднее квадратическое отклонение 80. **3.4.2.** Коэффициент вариации 82. **3.4.3.** Теоремы о дисперсиях 84. **3.4.4.** Ковариация. Коэффициент корреляции 87. **3.4.5.** Теорема о математическом ожидании произведения двух случайных величин в общем случае 88. **3.4.6.** Теорема о дисперсии суммы 88. **3.4.7.** Корреляция между двумя событиями 89.

§ 5. Приближенное определение функций случайных величин 92
3.5.1. Приближенное определение математического ожидания функции 92. **3.5.2.** Дисперсия функции случайной величины 93. **3.5.3.** Математическое ожидание и дисперсия функции двух случайных величин 93.

§ 6. Моменты высших порядков и производящая функция 94
3.6.1. Начальные и центральные моменты 94. **3.6.2.** Производящая функция 95.

§ 7. Закон больших чисел. Теорема Чебышева 98
3.7.1. Неравенство Чебышева 98. **3.7.2.** Теорема Чебышева 100. **3.7.3.** Теорема Я. Бернулли 101. **3.7.4.** Понятие о законе больших чисел 104.

ГЛАВА IV

НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

§ 1. Композиция законов распределения 105
4.1.1. Закон распределения суммы дискретных величин 105. **4.1.2.** Закон распределения суммы непрерывных величин 107.

§ 2. Моменты некоторых дискретных распределений 112
4.2.1. Моменты биномиального распределения 112. **4.2.2.** Моменты гипергеометрического распределения 114. **4.2.3.** Моменты распределения Пуассона 117.

§ 3. Нормальное распределение 118
4.3.1. Нормальная плотность вероятности и нормальная функция распределения 118. **4.3.2.** Моменты нормального распределения 122. **4.3.3.** Функция Лапласа 126. **4.3.4.** Обоснование нормального распределения в трудах П. Л. Чебышева, А. А. Маркова и А. М. Ляпунова 128. **4.3.5.** Применение нормального закона для вычисления вероятностей при биномиальном распределении. Теорема Лапласа 131. **4.3.6.** Характеристики уклонения от нормального закона: асимметрия и эксцесс 137.

§ 4. Преобразование случайных величин 140
4.4.1. Плотность вероятности монотонной функции случайной величины 140. **4.4.2.** Плотность вероятности немонотонной функции случайной величины 143.

§ 5. Некоторые, встречающиеся в приложениях распределения 144
4.5.1. Гамма-распределение 144. **4.5.2.** Бэта-распределение 149. **4.5.3.** χ^2-распределение 152. **4.5.4.** Преобразование χ^2-распределения. Распределение существенно-положительных величин 155. **4.5.5.** Уклонения от нормального закона в производственных условиях 160.

§ 6. Приложение теории кривых распределения к решению размерных цепей . . . 162
4.6.1. Понятие о размерных цепях 162. **4.6.2.** Расчет размерных цепей 163. **4.6.3.** О выборе метода расчета 173.

ГЛАВА V

ВЫБОРОЧНЫЙ МЕТОД И ПОЛУЧЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ОЦЕНОК РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

§ 1. Основные понятия выборочного метода и задачи математической статистики 178
5.1.1. Общие понятия о выборке 178. **5.1.2.** Распределение выборки, ее характеристики и их распределения 180. **5.1.3.** Задача получения статистических оценок распределения 182.

§ 2. Распределение выборки и его характеристики 183
5.2.1. Вариационный ряд (упорядоченная выборка). Размах варьирования (широта распределения) 183. **5.2.2.** Группировка значений выборки 185. **5.2.3.** Графики статистических распределений: полигон, гистограмма, ступенчатая кривая 188. **5.2.4.** Характеристики центра группирования и рассеивания выборки 189. **5.2.5.** Статистические (эмпирические) моменты и их упрощенные вычисления 190. **5.2.6.** Вычисление статистических моментов с помощью произвольного начального значения («ложного нуля») 191. **5.2.7.** Вычисление статистических моментов с помощью выражения значений по интервалам в долях ширины интервала 193. **5.2.8.** Вычисление статистических моментов по способу произведений 194. **5.2.9.** Вычисление статистических моментов по способу **сумм** 197. **5.2.10.** Другие формулы для вычисления статистических моментов 199. **5.2.11.** Поправки к группировке (Шеппарда) 200.

§ 3. Статистические оценки параметров распределения 203
5.3.1. Проблема оценки параметров. Требования к оценкам: состоятельность, несмещенность и эффективность. Достаточные оценки (статистики) 203. **5.3.2.** Оценка средней и дисперсии по выборке из конечной совокупности. Дисперсия выборочной средней арифметической в этом случае 212. **5.3.3.** Оценка средней при выборке по группам («типическая выборка»). Сравнительное уменьшение дисперсии средней арифметической 218. **5.3.4.** Случай большой выборки из совокупности неограниченного объема. Метод моментов. Оценки центра распределения и дисперсии 223. **5.3.5.** Применение теоремы Ляпунова при оценке генеральных средней и дисперсии. Выбор числа наблюдений 228. **5.3.6.** Общие понятия о порядковых (ранговых) характеристиках 234. **5.3.7.** Распределение членов вариационного ряда 236. **5.3.8.** Предельные распределения квантилей выборки 240. **5.3.9.** Доверительные пределы для теоретических квантилей 245. **5.3.10.** Распределение крайних членов. Размах (широта) выборки. Случай оценки центра распределения с помощью крайних членов 246. **5.3.11.** Оценка параметра σ по размахам нескольких выборок 253. **5.3.12.** Допустимые (толерантные) пределы 254.

§ 4. Оценки с помощью доверительных интервалов 257
5.4.1. Общее понятие о доверительных интервалах 257. **5.4.2.** Распределение выборочной дисперсии s^2 и среднего квадратического отклонения s. Доверительные интервалы для оценки генеральной дисперсии σ^2 и среднего квадратического отклонения σ 262. **5.4.3.** Построение доверительных интервалов для σ с помощью выборочного размаха R_n 269. **5.4.4.** Распределение Стьюдента и доверительные интервалы для оценки генеральной средней a 271. **5.4.5.** Общий метод получения доверительных интервалов 278. **5.4.6.** Оценка вероятности по частости 281. **5.4.7.** Получение доверительных границ при большом числе наблюдений 283. **5.4.8.** Метод максимума правдоподобия 285. **5.4.9.** Доверительные области для теоретического закона распределения 288.

ГЛАВА VI

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ

§ 1. Общие понятия о статистических гипотезах и их проверке 292
6.1.1. Постановка задачи о проверке гипотез в математической статистике. «Нулевые гипотезы». Пример проверки нулевой гипотезы 292. **6.1.2.** Статистические приемы проверки гипотез. «Критическая область». Уровень значимости критериев 294.

§ 2. Проверка гипотезы о равенстве средних 295
6.2.1. Гипотеза о положении центра группирования 295. **6.2.2.** Проверка гипотезы о равенстве двух средних по выборкам большого объема 297. **6.2.3.** Проверка гипотезы о равенстве двух средних по малым выборкам 298. **6.2.4.** Проверка гипотезы об однородности средних совокупности и ее подгрупп 300.

§ 3. F-распределение и его применения к проверке гипотез 301
6.3.1. F-распределение 301. **6.3.2.** Проверка гипотезы о равенстве дисперсий 304. **6.3.3.** Понятие о дисперсионном анализе. Проверка гипотезы об однородности ряда средних 306.

§ 4. Статистическая проверка соответствия между гипотетическим распределением и данными выборки 316
6.4.1. Критерий χ^2 316. **6.4.2.** Критерий независимости 323. **6.4.3.** Проверка гипотезы об однородности ряда дисперсий 326. **6.4.4.** Проверка гипотезы принадлежности двух независимых выборок одной и той же генеральной совокупности 331.

§ 5. Критерий «случайности» последовательности 334
6.5.1. Постановка задачи 334. **6.5.2.** Понятие серии 335. **6.5.3.** Законы распределения, математические ожидания и дисперсии чисел серий 336. **6.5.4.** Различные критерии «случайности» 339. **6.5.5.** Способ последовательных разностей 344.

§ 6. Проверка гипотезы нормальности 346
6.6.1. Способ выпрямленных диаграмм 346. **6.6.2.** Проверка гипотезы нормальности по совокупности малых выборок 354. **6.6.3.** Приближенная проверка гипотезы нормальности с помощью асимметрии и эксцесса 360.

§ 7. Понятие о мощности критерия проверки гипотезы 360

ГЛАВА VII

ОСНОВЫ ТЕОРИИ КОРРЕЛЯЦИИ

§ 1. Общие понятия о корреляции и регрессии 364
7.1.1. Стохастическая связь 364. **7.1.2.** Условные математические ожидания. Линии регрессии. Условные дисперсии. Дисперсия условных средних 366. **7.1.3.** Корреляционная зависимость. Корреляционное отношение и его свойства 370. **7.1.4.** Линейная регрессия. Уравнение регрессии. Коэффициенты регрессии и корреляции 372. **7.1.5.** Прямые регрессии как приближение к нелинейной регрессии 374. **7.1.6.** Свойства коэффициента корреляции 377. **7.1.7.** Стохастическая и корреляционная связь между непрерывными величинами 379.

§ 2. Нормальная корреляция 380
7.2.1. Общее понятие о нормальной корреляции. Уравнение нормальной регрессии 380. **7.2.2.** Геометрическая интерпретация нормальной корреляции. Нормальная поверхность распределения 383.

§ 3. Оценка коэффициентов корреляции и регрессии и корреляционного отношения по выборочным данным 385
7.3.1. Статистические коэффициенты корреляции и регрессии и корреляционное отношение. Их вычисление 385. **7.3.2.** Оценка коэффициента корреляции; его выборочное математическое ожидание, дисперсия и закон распределения 393. **7.3.3.** Проверка гипотезы об отсутствии корреляционной связи 396. **7.3.4.** Проверка гипотезы о криволинейности корреляционной связи 397.

§ 4. Множественная корреляция 397
7.4.1. Общее понятие о множественной корреляции. Случай трех величин 397. **7.4.2.** Уравнения линейной регрессии по эмпирическим данным 403. **7.4.3.** Частный коэффициент корреляции 406.

§ 5. Обобщение задачи регрессии. Способ наименьших квадратов 407
7.5.1. Постановка задачи и общие понятия 407. **7.5.2.** Оценка линейной зависимости по методу наименьших квадратов 410. **7.5.3.** Общая схема применения метода наименьших квадратов 424.

ГЛАВА VIII

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ И ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕТОДОВ В ТЕХНИКЕ

§ 1. Вводные замечания 431

§ 2. Вероятностные методы оценки ошибок механизмов 431
8.2.1. Общая характеристика применения вероятностных методов в современной теории точности механизмов 431. **8.2.2.** Оценка погрешностей кривошипного механизма 432. **8.2.3.** Оценка погрешности кулачкового механизма с толкателем 434.

§ 3. Статистические методы анализа технологических процессов 437
8.3.1. Задачи анализа технологических процессов 437. **8.3.2.** Анализ точности технологического процесса 438. **8.3.3.** Анализ стабильности технологического процесса 441. **8.3.4.** Анализ взаимосвязей между признаками качества и производственными факторами 444. **8.3.5.** Анализ настройки 445.

§ 4. Статистические методы оценки точности технических измерений 453
8.4.1. Понятие о точности технических измерений 453. **8.4.2.** Статистическая оценка точности измерений по их результатам 456. **8.4.3.** Ошибки отсчета 459.

§ 5. Статистические методы текущего предупредительного контроля качества продукции 467
8.5.1. Общие понятия и основные задачи 467. **8.5.2.** Некоторые варианты статистического текущего предупредительного контроля 468. **8.5.3.** Понятие о выборе варианта метода контроля и его параметров 475.

§ 6. Статистические методы приемочного последующего контроля качества продукции 478
8.6.1. Общие понятия и задачи 478. **8.6.2.** Одинарная выборка. Понятие о двойной выборке 479. **8.6.3.** Случай приемочного числа c, равного нулю 483. **8.6.4.** Последующая оценка результатов приемочного контроля 484. **8.6.5.** Процедура последовательного контроля 486.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица I. Вероятность $\mathbf{P}_\lambda(m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$ числа m появлений редкого события, следующего закону Пуассона, где λ — среднее число появлений события 492

Таблица II. Интегральные вероятности $\mathbf{P}_\lambda(m \geqslant k) = \sum_{m=k}^{\infty} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$ редкого события, следующего закону Пуассона, где m — число появлений события, λ — среднее число появлений события 495

Таблица III. Плотность вероятности $n(z;\ 0,\ 1) = N'(z;\ 0,\ 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$ нормированного нормального распределения 498

Таблица IV. Нормированная функция Лапласа $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{v^2}{2}} dv$ 499

Таблица V. Удвоенная нормированная функция Лапласа $2\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{v^2}{2}} dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z}^{z} e^{-\frac{v^2}{2}} dv$ 501

Таблица VI. Вероятность $Q_z = \mathbf{P}(|X - a| > z_q\sigma) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z_q}^{z_q} e^{-\frac{v^2}{2}} dv$ того, что нормально распределенная случайная величина X отклонится от центра a ее распределения больше, чем на взятое z_q раз ее среднее квадратическое отклонение σ 502

Таблица VII. q-процентные значения нормального отклонения z_q и вероятности $q = 100\,\mathbf{P}(|X - a| > z_q\sigma) = 100\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z_q}^{+z_q} e^{-\frac{v^2}{2}} dv\right)$ нормального распределения 503

Таблица VIII. Значения χ_q^2 в зависимости от вероятности $\mathbf{P}(\chi^2 > \chi_q^2) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \cdot 2^{\frac{k}{2}}} \int_{\chi_q^2}^{\infty} (x)^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx$ и числа k степеней свободы χ^2-распределения . . 503

Таблица IX. Вероятность $\mathbf{P}(\chi^2 > \chi_q^2) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) 2^{\frac{k}{2}}} \int_{\chi_q^2}^{\infty} (x)^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx$ в зависимости от значений χ_q^2 и числа k степеней свободы χ^2-распределения 505

Таблица X. Значения коэффициентов относительной асимметрии (α_i) и относительного рассеивания (k_i) при различных законах распределения 508

Таблица XI. Ориентировочное число a единиц допуска $0{,}5\sqrt[3]{d_{\text{ср}}}$ по классам точности системы допусков и посадок ОСТ 512

Таблица XII. Ориентировочное число a единиц допуска $0{,}5\sqrt[3]{d_{\text{ср}}}$ по посадкам классов точности диаметральных размеров по ОСТ 512

Таблица XIII. Значения t_p p-процентных пределов для отклонения максимального члена u_{nn} выборки из нормальной совокупности от центра распределения . . 513

Таблица XIV. q-процентные пределы для отношения выборочного размаха R_n к параметру σ исходного распределения; математическое ожидание $\mathbf{M}\left(\frac{R_n}{\sigma}\right)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma_{\frac{R_n}{\sigma}}$ этого же отношения в долях параметра σ исходного распределения 514

Таблица XV. Нижние z_1 и верхние z_2 границы доверительного интервала $z_1 s < \sigma < z_2 s$ 515

Таблица XVI. Вероятность $P_t = B_k \int_{-\infty}^{t} \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} dt$ для распределения Стьюдента в зависимости от t и числа k степеней свободы 516

Таблица XVII. Вероятность $\frac{q}{100} = 1 - 2B_k \int_{0}^{t} \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} dt$ для распределения Стьюдента в зависимости от t и числа k степеней свободы 517

Таблица XVIII. Значения q-процентных пределов $t_{q,k}$ в зависимости от числа k степеней свободы и от вероятности $\frac{q_t}{100} = 2B_k \int_{q,k}^{\infty} \left(1 + \frac{t^2}{2}\right)^{-\frac{k+1}{2}} dt$ для распределения Стьюдента 520

Таблица XIX. Двухсторонние 95%-ные доверительные пределы для оценки вероятности по частости при биномиальном распределении 520

Таблица XX. Значения пяти- и однопроцентных пределов уклонения величины F в зависимости от степеней свободы k_1 и k_2. 530

Таблица XXI. Пяти- и однопроцентные пределы для отношения G_t наибольшей эмпирической дисперсии к сумме k эмпирических дисперсий, полученных из k независимых выборок объема n 534

Таблица XXII. Квантили нормального распределения $z_p = u_p + 5$, где u_p определяется из соотношения $\frac{p}{100} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u_p} e^{-\frac{v^2}{2}} dv$ 536

Таблица XXIII. Вероятности $P(\lambda) = K(\lambda)$ распределения Колмогорова 539

Таблица XXIV. Значения z_q, удовлетворяющие уравнению $\mathbf{P}\left(\frac{x_n - \bar{x}}{\bar{s}} > z_q\right) = \alpha$, где $\bar{s} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$, для распределения $r = \frac{x_n - \bar{x}}{\sqrt{\frac{n-1}{n}}\, \bar{s}}$ 540

Таблица XXV. Максимумы математических ожиданий ошибок отсчета (при различных истинных значениях измеряемой величины) в зависимости от отношения параметра σ исходного рассеивания погрешностей измерения к шагу h шкалы прибора 541

Таблица XXVI. Наивыгоднейшие комбинации объемов (n) выборки и приемочных чисел (c) при заданных объеме (N) контролируемой партии и средней доле ($\bar{q}$) производственного брака в партии в зависимости от допускного качества (q_0) или от отправного качества (Q_L) 541

Таблица XXVII. Максимумы среднего выходного качества 547

Таблица XXVIII. Объемы выборки, отвечающие различным уровням выходного качества 548

Таблица XXIX. Объемы выборки. Зависимость фактического выходного качества от доли брака до контроля (пример для $n = 50$). Ожидаемый (O) и минимально возможный ($O_{\min}$) объем контроля в процентах от объема всей партии 549

Таблица XXX. Значения $Z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}$, отвечающие значениям r 550

Литература 551

Предметный указатель 552

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга должна была по нашему первоначальному замыслу представлять попытку систематического и по возможности полного изложения с современных позиций основных вопросов теории вероятностей и математической статистики в их технических приложениях в предельно простой форме, доступной инженеру и студенту втуза.

Потребность в такой книге для довольно широкого круга читателей — исследователей, инженеров и студентов — давно уже назрела в связи с грандиозным расширением отечественного производства, тесно связанного с применением новой техники и новых прогрессивных технических методов, к которым, в частности, принадлежат широко применяемые в настоящее время передовыми предприятиями нашей страны математико-статистические и теоретико-вероятностные методы.

Мысль о написании этой книги возникла у одного из авторов в связи с чтением на протяжении ряда лет курса «Математическая статистика в технике» во втузах Москвы. Перед другим автором аналогичная задача еще ранее была поставлена издательством. Мы объединили усилия, учитывая, что наши неодинаковые специальности будут взаимно дополнять друг друга.

Современная математическая статистика настолько разрослась вширь и вглубь, что осуществление подобной задачи неизбежно приводит к довольно значительному объему книги. С другой стороны, в учебных планах втузов на «математическую статистику в технике» выделяется очень небольшое число часов, следовательно, учебник по этой дисциплине должен иметь соответственно небольшой объем. При этом он, естественно, не может вместить ни разъяснений более сложных вопросов, ни доказательств многих теорем, ни сколько-нибудь подробных практических примеров, ни даже некоторых разделов самой дисциплины. К последним относятся, в частности, некоторые специальные проблемы теории корреляции, дисперсионный анализ, теория вероятностных процессов и другие вопросы.

Вследствие того, что некоторые из этих вопросов требовали более сложного математического аппарата, оказалось целесообразным вначале завершить настоящую «общую часть» работы и выпустить ее в виде самостоятельной книги. В этой книге мы не уклоняемся от рассмотрения по существу теоретических основ статистических методов, давая всюду, где это оказалось возможным, доказательства, понятные для упоминавшегося выше круга читателей. Каждый из рассмотренных вопросов снабжен подробными примерами, почерпнутыми главным образом из производственной и исследовательской практики, причем во многих случаях был использован собственный опыт. Примеры относятся почти исключительно к машиностроению и приборостроению, но им придан в достаточной мере общий характер, позволяющий использовать изложенную методику в различных областях техники. Следует иметь, однако, в виду, что, несмотря на значительное место, отведенное примерам, они, естественно, служат в первую очередь иллюстрацией рассматриваемой в книге теории и хотя почти всюду доведены до окончательных числовых решений и поэтому могут быть использованы

на практике, тем не менее не претендуют на полную замену специальных руководств по таким вопросам, как анализ точности производства, статистические методы контроля и т. п.

Книга предназначена для инженеров-производственников, аспирантов и преподавателей вузов и других специалистов, применяющих в своей работе статистические методы. Она может быть использована также студентами при изучении «математической статистики в технике». Книга рассчитана на читателя, знающего математику в объеме программы для втузов.

Считаем своим долгом выразить глубокую благодарность академику А. Н. Колмогорову за очень ценные советы и указания, а также рецензенту книги А. В. Грошеву и редактору А. Ф. Лапко, существенные замечания которых в значительной степени помогли при подготовке книги к печати.

Очень ценными для нас будут критика и замечания читателей, которые мы надеемся использовать в дальнейшем.

ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ. ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ В ТЕХНИЧЕСКИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

Целью настоящей книги является освещение основных понятий и положений теории вероятностей и математической статистики в их приложениях к решению некоторых инженерно-технических задач.

Грандиозное расширение масштабов отечественного производства на базе комплексной автоматизации и механизации совершающихся в нем процессов, продолжающееся распространение поточно-массовых принципов его организации, борьба за дальнейшее серьезное повышение качества продукции во всех отраслях промышленности тесно связаны с применением новой техники и новых прогрессивных технических методов. К числу таких методов, широко применяемых в настоящее время передовыми советскими предприятиями, принадлежат, в частности, математико-статистические и теоретико-вероятностные методы, дающие существенный экономический эффект за счет сокращения трудоемкости анализа и контроля технологических процессов, решительного сокращения брака, получения экономии металла, дальнейшего повышения общей производственно-технической культуры предприятия и т. д.

Чтобы уяснить себе роль и значение этих методов, мы должны остановиться на некоторых общих положениях, характеризующих приложение научных и, в частности, математических дисциплин к производству.

Современное конструирование, производство и эксплуатация разнообразных машин и приборов опираются на научные знания различных закономерностей и взаимосвязей. Техническое использование этих закономерностей, твердо определяющих, что неизбежно будет происходить при тех или иных наперед известных условиях, и лежит в основе всех инженерных расчетов. Обоснованный научно-техническими расчетами технологический процесс предусматривает множество разнохарактерных операций, протекающих в заранее строго регламентированных и детализированных производственных условиях, планомерно осуществляемых с целью получения строго однородной продукции, например в смысле одинаковости размеров всех экземпляров деталей в партии, удовлетворяющей техническим условиям. Однако такая картина точного чередования технологических операций с полным и точным учетом всех действующих факторов в значительной мере является лишь идеальной схемой. В действительности технологический процесс сам по себе без постоянного контроля и регулирования его еще не обеспечивает вполне однородного качества массовой продукции. Как бы ни был точен и совершенен инженерный расчет, он не может все же заранее предусмотреть все многообразие различных обстоятельств, оказывающих то или иное влияние на ход процесса и зачастую по-разному складывающихся в последовательных повторениях одних и тех же операций. Влияние каждого из этих факторов в отдельности бывает нередко невелико и мало заметно, причем действия некоторых из них могут взаимно погашаться, суммарный же эффект воздействия их всех приводит обычно к тому, что вместо однозначно определяемого результата мы получаем более или менее колеблющиеся от случая к случаю и разнящиеся друг от друга результаты. Такой именно характер

носит общеизвестный для производственников факт «рассеивания» размеров деталей, получаемых не только на станках универсального назначения, но и на автоматах и автоматических линиях.

Аналогично этому влияние случайных факторов, накладывающееся на основные закономерности, можно проследить в самых разнообразных приложениях научных методов. Даже в такой области, как небесная механика, достаточно полно учитывающей все существенные причины движения небесных тел, мы принуждены для получения определенных предсказаний опираться на инструментальные наблюдения, производимые лишь с некоторой ограниченной точностью. Последнее обстоятельство вносит некоторые неопределенности случайного характера в прогнозы астрономической науки. В качестве другого примера, в котором роль возмущающих случайных воздействий еще больше, можно привести полет артиллерийских снарядов. Основные факторы, определяющие механически движение снаряда в воздухе, хорошо изучены: существует детально разработанная математическая теория этого явления. Общеизвестно также явление «рассеивания» точек поражения, неизменно сопровождающее стрельбу из орудий и представляющее отклонения снарядов от теоретически вычисленной траектории, отвечающей «нормальным», т. е. некоторым средним начальным условиям и т. п. Эти отклонения вызываются случайными изменениями начального направления траектории, начальной скорости, сообщаемой снаряду, вариацией в его массе, коэффициенте сопротивления, порывами ветра, неоднородностью режима атмосферы.

Явление рассеивания снарядов изучается методами теории вероятности и математической статистики, лежащими в основе современной теории артиллерийской стрельбы.

В некоторых условиях оказывается возможным воздействовать на случайные явления в направлении сокращения рассеивания их результатов. Так, например, при обработке изделий на станках иногда оказывается возможным настолько уменьшить рассеивание размеров путем повышения точности оборудования, улучшения его настройки, подбора заготовок по размерам и т. д., что случайные колебания размеров становятся пренебрежимо малыми, составляющими лишь незначительную часть допуска. В других случаях, таких, как случайные помехи в радиоприемных устройствах, хотя и не представляется возможным непосредственно воздействовать на источники возникновения флюктуаций, но их все же удается учесть и свести к минимуму отрицательное действие случайных факторов.

Случайность эта существует объективно, вне нашего сознания, и она причинно обусловлена. Однако случайность не вытекает с необходимостью из закономерностей развития данного события, являясь лишь дополнением и формой проявления необходимости.

Случайное в одной связи может оказаться необходимым в другой связи в более полном комплексе явлений.

Вместе с тем всякий раз, когда наука сталкивается с явлениями, аналогичными только что рассмотренному рассеиванию снарядов, перед ней возникает новая задача учета воздействия и более подробного изучения «возмущающих» факторов.

Нередко такой учет оказывается возможным. Постепенное более глубокое и совершенное овладение многообразными действующими в определенных условиях факторами и служит одним из показателей научного прогресса в соответствующей области. Однако беспредельное усложнение теоретической схемы в отрыве от практических задач может привести к большим трудностям и оказаться бесполезным для научного предвидения реальных событий. Так, например, учет неравномерной «турбулентной» структуры ветрового потока, встречающего движущийся снаряд, сделал бы теоретическую разработку задачи повышения меткости артиллерийской стрельбы практически неразрешимой. В то же время принципиально мы могли бы поставить задачу об изучении движений отдельных молекул идеального газа, находящихся в данном сосуде. Движение это подчи-

нено обычным законам механики. Для этого пришлось бы, однако, учесть начальные положения и скорости всех молекул в данном сосуде, что делает решение задачи совершенно необозримым. Но такой сложный путь необходим лишь в тех случаях, когда требуется полностью определить влияние всех факторов во все время данного процесса на отдельные, участвующие в нем объекты. В большинстве же реальных задач требуется лишь определить суммарный эффект действия многочисленных случайных факторов или их средний эффект в большом числе повторений изучаемого процесса.

Так именно и обстоит дело в современном массовом и крупносерийном промышленном производстве. Задачи обеспечения взаимозаменяемости деталей и узлов машин требуют не точного выполнения размера одной какой-нибудь изолированно взятой детали, а научно обоснованного построения технологического процесса, обеспечивающего массовое изготовление таких деталей и узлов, которыми можно было бы без ущерба заменить без подгонки любые детали и узлы, входящие в комплект соединения.

Изучение массовых процессов, при которых некоторая совокупность (опытов, операций, испытаний и т. п.) воспроизводится много раз при одинаковых условиях, и составляет предмет теории вероятностей и основанной на ней математической статистики. При таком изучении к массовым процессам применяется понятие вероятности, позволяющей обнаружить и формулировать своеобразные закономерности, которым подчинён результат этих процессов. Вероятность события является, как мы увидим в следующей главе, объективной характеристикой случайного события.

Как и все математические дисциплины, теория вероятностей и математическая статистика изучают общие закономерности массовых явлений в абстрактной форме, безразличной к специфической природе рассматриваемых объектов. Благодаря такому подходу выводы этих дисциплин могут быть применены к явлениям самой различной природы. Однако правильность такого применения не может быть оценена с помощью каких-либо формальных математических критериев. Для законного применения различных положений теории вероятностей и математической статистики необходимо убедиться путем надлежащего анализа действительности в реальном осуществлении основных положений общей теоретической схемы и правильно интерпретировать ее понятия и выводы. Математико-статистические приемы могут быть плодотворно применены лишь в сочетании с глубоким анализом причинных связей. Таким образом, приложение этих методов должно быть подчинено специфическим закономерностям изучаемого круга явлений. Так, например, математическая статистика в технике имеет дело с технологическими процессами, примыкающими вплотную по своему характеру к физическим, химическим и другим процессам, относящимся к области естествознания.

Особенность статистического подхода к исследованию массового явления заключается в том, что исследователь в соответствии с объективным характером процесса сосредоточивает свое внимание на некоторых основных повторяющихся признаках совокупности объектов, принимаемых в этом отношении равноправными, и абстрагируется от остальных чисто индивидуальных признаков. Именно в этом случае при описании, анализе и сравнении массовых процессов возникают такие конкретные проблемы, которые с неизбежностью требуют своеобразных методов исследования. Так, в частности, обоснованные суждения о современных технологических процессах и их параметрах могут быть сделаны лишь при полном учете и надлежащем анализе статистических материалов, относящихся к массовому производству.

Принципиальные положения об основах статистических методов социально-экономической статистики, содержащиеся в трудах В. И. Ленина и И. В. Сталина, имеют и для математической статистики в технике свое, чрезвычайно большое принципиальное значение.

Так, в частности, метод группировок, преследующий в социально-экономической статистике своей целью правильное, основанное на положениях экономической науки построение статистических показателей в соответствующих разрезах, в технике указывает на важность правильного отбора качественных признаков, по которым ведутся наблюдения и делаются технические расчеты.

Принцип примата качественного анализа над количественным, предопределяющий исследование количественной стороны явлений в неразрывной связи с качественной их стороной, в технике является решающим в применении статистических и теоретико-вероятностных методов.

В своем историческом развитии теория вероятностей прошла через ряд этапов; на решающих из них русские ученые-математики сыграли выдающуюся роль.

Зародившись в XVI веке, теория вероятностей в зачаточном состоянии получила в XVI—XVII веках отражение в работах Тартальи (1500—1557), Кардано (1501—1576), Паскаля (1623—1662) и других ученых того времени.

Однако эти элементарные подсчеты вероятностей можно рассматривать лишь как предисторию теории вероятностей.

Первые ее успехи в анализе простейших массовых процессов связаны с предельными теоремами Якова Бернулли (1654—1705) и Муавра (1667—1754).

Последующие работы Лапласа (1749—1827) и Пуассона (1781—1840) расширили область применения результатов, достигнутых их предшественниками.

Новый период развития теории вероятностей, период оформления ее в стройную математическую дисциплину, связан с именем великого русского математика П. Л. Чебышева (1821—1894) и его выдающихся учеников — академиков А. А. Маркова (1856—1922) и А. М. Ляпунова (1857—1918).

П. Л. Чебышеву и его ученикам принадлежит обоснование двух фундаментальных теорем теории вероятностей, с которыми мы познакомимся в данном курсе.

Русским ученым принадлежит также приоритет в области применения методов теории вероятностей и математической статистики к контролю качества продукции. Еще в 1846 году знаменитый русский математик академик М. В. Остроградский (1801—1861) опубликовал в Известиях Российской Академии наук свою работу по данному вопросу.

Со времени П. Л. Чебышева советские ученые играют ведущую роль в развитии теории вероятностей.

Советская школа теории вероятностей представлена крупнейшими учеными — С. Н. Бернштейном, А. Н. Колмогоровым, А. Я. Хинчиным, Б. В. Гнеденко и др.

А. Н. Колмогоров завершил разработку стройной логической системы, в которой последовательно развертывается идея включения теории вероятностей — дисциплины недавно еще столь своеобразной — в ряд общих понятий математики.

Большую роль в развитии математической статистики сыграли работы Е. Е. Слуцкого, А. Н. Колмогорова, В. И. Романовского.

Особое значение для математической статистики в технике имеют работы по теоретическому исследованию и обоснованию статистических методов анализа производства и контроля качества продукции, проводящиеся за последнее время А. Н. Колмогоровым, В. И. Романовским, Н. А. Бородачевым и др.

Подлинно научная методологическая основа математической статистики в технике — марксистско-ленинская теория — коренным образом отличает ее от зарубежных буржуазных статистических теорий.

Концепции буржуазных статистиков-математиков — А. Кетле (1796—1874), Ф. Гальтона (1822—1911), К. Пирсона (1857—1936) и др., которых в буржуазной литературе характеризуют как основателей математической статистики, имели большое значение в начальный период развития этой науки, но в

методологическом отношении, а также в отношении обоснования основных положений далеко отставали от работ русской школы.

Развитие производства и естествознания выдвинуло перед математической статистикой ряд новых проблем, решение которых привело к дальнейшему совершенствованию математических методов статистики. В этом отношении видная роль принадлежит английскому математику Р. Фишеру, а также Нейману и Вальду.

Вместе с этим использование англо-американской школой приемов математической статистики в социальных и отчасти в биологических науках преследовало явно реакционные цели.

Советские статистические методы в технике характеризуются их прогрессивной научной основой, массовостью их применения, тесной увязкой с достижениями новаторов производства.

Основанные на указанных принципах теоретико-вероятностные и математико-статистические методы находят широкое применение в современной технике при расчетах эффективности вооружения (в форме, например, вычисления вероятности поражения цели); при расчетах и исследованиях точности машин и приборов (их так называемой динамической точности), оценки их суммарных погрешностей и ошибок кинематических цепей; при расчетах размерных цепей; при расчетах и исследованиях точности производственного оборудования, инструментов, приспособлений и технологического процесса в целом; при анализе хода технологических процессов и в особенности технологических процессов заводов-автоматов; при анализе точности технических измерений; при разработке и выборе статистических предупредительных методов контроля качества продукции; при обработке результатов лабораторных, заводских и полигонных испытаний.

Таков далеко не полный перечень технических проблем, при решении которых плодотворно применяются статистические приемы.

ГЛАВА II

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. Случайные события, величины и процессы. Частость и вероятность

2.1.1. Испытание. Событие. Случайная величина. Случайный процесс. Исходными понятиями теории вероятностей, подобными, например, понятию числа в арифметике или точки в геометрии, являются понятия: испытания (опыта), события, случайной величины и случайного процесса.

Испытанием (или опытом) называется осуществление на практике какого-нибудь комплекса условий; явления, происходящие при наличии этого комплекса, называются *событиями*. Так, например, если настроить закрепленный на стойке обычный индикатор часового типа на нуль и затем поднимать и опускать его измерительный стержень, то большая стрелка прибора будет всякий раз занимать относительно нулевого штриха новое положение, обусловливаемое наличием случайных погрешностей показаний прибора. Если теперь всю зону возможных положений стрелки разделить на некоторое число участков: A, B, C, ..., то занятие положения на каком-либо участке A, или B, или C, или D будут представлять события, происходящие при данной обстановке измерений. Заметим, что при таком определении испытания вовсе не обязательно наличие наблюдателя или экспериментатора, ставящего опыт, так как под схему «испытаний» могут быть подведены вообще самые разнообразные явления действительности (например, выпадение дождя в данной местности и т. д.).

Теорию вероятностей интересуют повторные испытания, при которых один и тот же основной комплекс условий воспроизводится много раз. Явления, происходящие при многократных повторениях испытания, называются *массовыми*.

Если при каждой реализации некоторого комплекса условий (обозначаемого, например, γ), т. е., иначе говоря, при каждом испытании неизбежно происходит событие U, то такое событие называется *достоверным*. В обстановке измерения такой характер имеет событие, заключающееся в том, что стрелка индикатора остановится в пределах всей зоны возможных ее положений (представляющей сумму участков A, B, C и т. д.).

Если некоторое событие V заведомо не может произойти в условиях данного испытания, то его называют *невозможным*. Пусть, например, мы обозначим через V событие, состоящее в занятии стрелкой индикатора положения вне зоны U.

На практике весьма часто встречаются комплексы условий, подобные вышеприведенному, когда при испытании может произойти или событие A, или событие B, или событие C и т. д.

В теории вероятностей такие события, представляющие различные возможные исходы испытания, называются *случайными*.

К числу случайных событий следует отнести также, например, получение в определенных производственных условиях действительного размера изделия

в пределах первой четверти допуска (событие A) или второй четверти допуска (событие B) и т. д.

Массовое явление всегда складывается из большого, иногда необозримо большого числа событий.

Если бы мы подразделили допуск размера обрабатываемого в определенных производственных условиях изделия, например, на 10 равных частей и стали бы рассматривать получение действительного размера изделия в границах каждой из 10 частей допуска как событие, то легко убедились бы в том, что обычно задаваемые производственные условия, такие, как станок, инструмент, приспособления, режимы обработки, качество материала, форма заготовки, смазывающе-охлаждающая жидкость и т. п. (комплекс условий γ), не вполне определяют исход испытания, заключающегося в данном случае в обработке одного изделия в данных условиях. Каждое очередное изделие, обработанное в вышеуказанных неизменных условиях, по своим размерам будет получаться в границах то одной, то другой, то третьей и т. д., то десятой части допуска. Иными словами, при каждом очередном испытании происходило бы то событие A_1, то событие A_2, то событие A_3, ..., то событие A_{10}.

Исход испытания, помимо основных условий γ, зависит в этом случае еще от многочисленных добавочных условий, которые складываются по-разному в различных отдельных испытаниях. В нашем примере такими добавочными условиями являются деформации и вибрации системы станок — инструмент — изделие, колебания разнообразных физических свойств, формы и размеров заготовки, колебание напряжения в сети, от которой питается электродвигатель станка и т. д.

Если взять только величину напряжения в электросети, от которой зависит характер режима обработки, то легко убедиться, что оно колеблется под влиянием случайного изменения нагрузки сети, например от включения и выключения станков и агрегатов, не имеющих прямого отношения к технологическому процессу обработки данной детали. Заранее предвидеть конечный результат каждого испытания, например точный размер каждой отдельной детали, в подобных случаях оказывается настолько сложным, что выявление и разработка всех многочисленных дополнительных условий оказываются практически нецелесообразными. Изучение подобного рода процессов требует специфических приемов, основанных на вероятностных закономерностях.

Другим важным исходным понятием теории вероятностей является случайная величина.

Случайной величиной в теории вероятностей называют переменную величину, которая в результате испытания может принять то или иное значение.

В ранее приведенных примерах мы могли бы рассматривать не события, такие, как занятие стрелкой индикатора положения на определенном участке или получение на станке детали с размером в границах некоторой части допуска, а величину отклонения стрелки индикатора от нуля, получающуюся при повторных поднятиях и опусканиях измерительного стержня, или величину отклонения размера вырабатываемых последовательно изделий от номинального размера; такие величины и называются *случайными*.

Во многих современных приложениях статистических методов приходится изучать совокупность случайных величин, отвечающих различным значениям некоторого пространственного или временного (неслучайного) параметра; такая совокупность случайных величин называется *случайным процессом* или *случайной функцией*. Например, ординаты кривой профиля обработанной поверхности в заданном направлении или вариации диаметра изготовленного валика по его длине, или, наконец, вибрации узлов станка в течение времени его работы могут служить примерами случайных процессов.

Аналогичный характер носят, например, координаты броуновской частицы, флюктуации в электрических цепях, шумы в «следящих системах» и т. п.

Приведенные определения и примеры говорят, в частности, о том, что математическое понятие случайного события, случайной величины и случайного процесса тесно связаны между собой. В самом деле, получение размера очередного обработанного валика в интересующих нас достаточно узких границах является случайным событием, диаметр валика, варьирующий от одного экземпляра к другому, — случайной величиной, а вариации этого размера вдоль оси обработанного валика — случайным процессом.

Все эти понятия используются в обстановке, когда испытания носят массовый характер. В такой обстановке научный и практический интерес представляют как раз не результаты единичного испытания, а некоторые общие закономерности массового явления в целом.

Так, например, при изготовлении изделий большими партиями в массовом и серийном производствах нас интересует не размер, который будет иметь та или иная, отдельно взятая из партии деталь, а распределение всей массы одинаковых деталей по их размерам, т. е. указание доли (или процента) деталей, попадающих по размеру в те или другие заданные пределы. Закономерности, проявляющиеся в распределении деталей по размеру, отражают наиболее существенные, общие для всей массы продукции условия производства.

Вот эти своеобразные новые закономерности массовых явлений требуют для своего изучения особых «статистических» приемов исследования.

Вспомогательным средством, наиболее приспособленным для исследования массовых явлений, оказался аппарат особых математических дисциплин — теории вероятностей и математической статистики, в абстрактной форме рассматривающих основные закономерности их протекания.

2.1.2. Частость и вероятность. При изучении массовых явлений мы прежде всего встречаемся с понятием *частости* случайного события.

Пусть мы повторили N раз испытание, в котором возможно появление некоторого события A и при этом k раз событие A фактически имело место; тогда частость появления события A в данной серии из N испытаний равна

$$\mathbf{W}(A) = \frac{k}{N}. \qquad (2.1.1)$$

Частость иногда называют еще *относительной частотой*.

Пусть, например, на станке обработано 1000 деталей и из них оказалось 357 с размерами в пределах первой четверти допуска на обработку (357 раз произошло событие A). Тогда частость события A в серии из 1000 испытаний составила у нас

$$\mathbf{W}(A) = \frac{k}{N} = \frac{357}{1000} = 0{,}357.$$

В весьма обширном и важном классе случаев при многократном повторении испытания частость появления события A обнаруживает устойчивость, т. е. она очень редко сколько-нибудь существенно отклоняется от некоторого положительного постоянного числа.

Это положительное число, меньшее единицы, представляющее собой количественную оценку возможности случайного события A, называется его *вероятностью*.

Вероятность, обычно обозначаемая символом $\mathbf{P}(A)$, представляет собой как бы физическую константу, связанную со случайным событием A, тогда как его частости в различных конкретных сериях испытаний есть лишь случайные проявления этой постоянной характеристики, выражающей вполне определенную объективную, хотя и своеобразную, связь между комплексом условий γ и случайным событием A.

За приближенное численное значение вероятности $\mathbf{P}(A)$ может быть принята частость $\mathbf{W}(A)$, полученная при большом числе N испытаний, производившихся в неизменных условиях γ; точность такого эмпирического измерения вероятности тем выше, чем большее число испытаний было произведено.

Вероятность $\mathbf{P}(A)$ отражает определенную объективную структуру самого процесса, в котором наблюдается событие A, и ее значение теснейшим образом связано с условиями массового испытания; оно изменяется как только изменяется основной комплекс условий.

Например, вероятность не обнаружить ни одной дефектной детали в пробе из n штук, взятой из партии в N штук изделий, изготовленных при одном технологическом процессе, будет одна, а вероятность получить тот же результат, произведя выборку из партии того же объекта, но изготовленной по другому технологическому процессу, будет другая.

Производимый статистический учет массовых явлений или специальные эксперименты позволяют, во-первых, подмечать существование в природе вероятностных закономерностей, находящих свое выражение в устойчивости частот, во-вторых, приближенно находить неизвестные вероятности и, в-третьих, производить проверку правильности теоретических предположений или гипотез, связанных с течением вероятностных процессов. Соотношение между частостью и вероятностью особенно наглядно выступает при осуществлении «выборки», т. е. случайного отбора предметов из обширной совокупности в N однородных предметов (например, из партии определенных изделий). Выборка предпринимается с целью приближенной оценки доли тех предметов в совокупности, которые обладают интересующим нас признаком (например, повышенным качеством). Пусть предметов с признаком A в совокупности содержится M и, следовательно, неизвестная доля равна $\frac{M}{N}$. Если в выборке численностью в n штук у нас оказалось m предметов с признаком A и, таким образом, частость составила $\frac{m}{n}$, то при достаточно большом n мы можем быть практически уверены, что частость воспроизведет по крайней мере приближенно истинную долю $\frac{M}{N}$ в совокупности. В выборке малого объема (при малом n) частость может еще заметно отличаться от доли $\frac{M}{N}$ — в этом сказывается влияние случайных обстоятельств. Однако при возрастании n роль этих обстоятельств будет отступать на второй план. Так как случайный выбор обеспечивает равноправие всех предметов и каждый из них должен появиться одинаково часто, т. е. приблизительно в $\frac{1}{N}$ доле всех извлеченных предметов, то предметы, обладающие признаком A, должны составить приблизительно долю $\frac{M}{N}$ всех n отобранных предметов. Отношение $\frac{M}{N}$, около которого будут группироваться частости в повторных выборках объема n (для простоты мы считаем, что отобранные предметы после регистрации результатов вновь возвращаются в совокупность), играет в данном примере роль вероятности появления интересующего нас события A — извлечения предмета с признаком A.

Здесь мы дали вероятности частотное истолкование.

При определенных простейших условиях можно дать еще и другое, полезное в ряде случаев определение вероятности, но для этого надо сначала остановиться на соотношениях между событиями.

2.1.3. Соотношения между событиями. Рассмотрим вначале систему S событий A, B, C, ..., каждое из которых может при каждом испытании либо произойти (наступить, появиться), либо не произойти.

Между событиями A, B, C, ... могут существовать определенные соотношения:

1. Если при каждом испытании (выполнении комплекса условий γ), в результате которого *происходит событие* A, *происходит также и событие* B, то говорят, что событие A *влечет за собой* событие B, и это соотношение обозначают символом

$$A \subset B \quad \text{или} \quad B \supset A.$$

2. Если событие A влечет за собой событие B и в то же время событие B влечет за собой событие A, т. е. если при каждом испытании *или оба события*

A и B происходят или оба не происходят, то говорят, что такие два события A и B *равносильны*, и обозначают это соотношение символом

$$A = B.$$

Равносильные между собой события могут заменять друг друга. Их считают тождественными.

3. Событие, заключающееся в *совместном* наступлении обоих событий A и B в одном испытании, называют *произведением событий* A и B и обозначают символом

$$AB.$$

Эта запись равносильна такой записи: A и B.

4. Событие, заключающееся в наступлении *хотя бы одного из событий* A *и* B, называют *суммой событий* A *и* B и обозначают символом

$$A + B.$$

Эта запись равносильна такой записи: A или B.

5. *Достоверное событие*, определение которого было дано ранее, обозначим через U, а *невозможное* событие — через V.

6. События A и $\bar{A}$ называются *противоположными*, если для них одновременно удовлетворяются два соотношения:

$$A + \bar{A} = U; \quad A\bar{A} = V, \tag{2.1.2}$$

т. е. если наступление какого-либо одного из них, A или $\bar{A}$, в *каждом* испытании достоверно, а совместное наступление обоих событий A и $\bar{A}$ в *каком-либо* одном *испытании* невозможно.

7. Два события A и B называются *несовместимыми*, если их совместное появление в одном испытании невозможно, т. е. если

$$AB = V. \tag{2.1.3}$$

8. Если событие A заключается в наступлении хотя бы одного из событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, т. е.

$$A = B_1 + B_2 + \ldots + B_n,$$

причем события $B_1, B_2, \ldots, B_n$ *попарно несовместимы*, т. е.

$$B_i B_j = V \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

то говорят, что событие A *подразделяется на частные случаи* $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

9. Говорят, что события $B_1, B_2, \ldots, B_n$ образуют *полную группу*, если хотя бы одно из них должно обязательно произойти при каждом испытании, т. е. если

$$B_1 + B_2 + \ldots + B_n = U. \tag{2.1.4}$$

10. Особую роль в теории вероятностей играют полные группы *попарно несовместимых* событий. В дальнейшем такие группы будут называться просто *полными группами событий*.

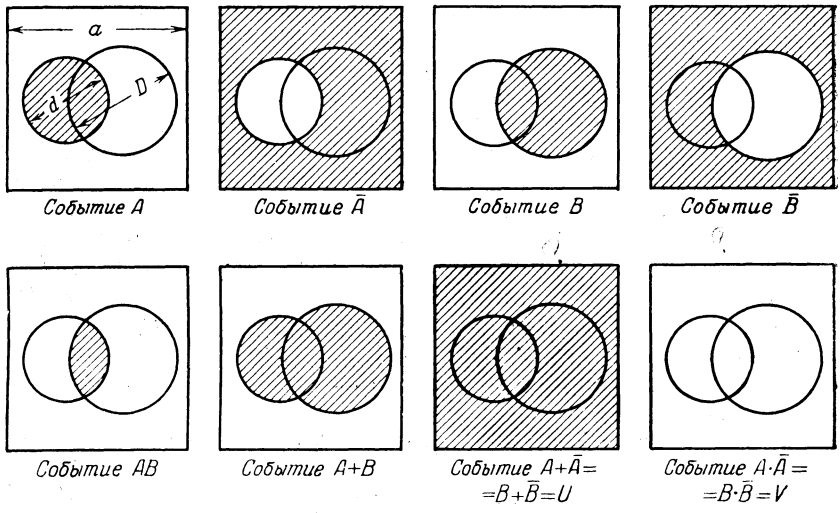
В теории вероятностей в каждой решаемой задаче рассматривается обычно известный круг взаимосвязанных событий, или, как говорят, система событий.

Пусть, например, при разметке некоторого контура точка *всегда* оказывается внутри квадрата со стороной a. Обозначим через U достоверное по условию событие, заключающееся в том, что точка окажется внутри квадрата со стороной a. Невозможным событием V будет по условию то, что точка не окажется внутри квадрата.

Обозначим через A событие, заключающееся в том, что точка окажется внутри окружности диаметра d, и через B событие, заключающееся в том, что точка окажется внутри окружности диаметра D.

Заштрихуем внутри квадрата (черт. 1) такие площади, при попадании разметочной точки на которые произойдут следующие события:

1) событие A,
2) событие $\bar{A}$,
3) событие B,
4) событие $\bar{B}$,
5) событие AB,
6) событие $A+B$,
7) событие $U=A+\bar{A}=B+\bar{B}$,
8) событие $V=A\bar{A}=B\bar{B}$.



Черт. 1. Поля событий при разметке заданного контура.

2.1.4. Классическое определение вероятности. Теперь мы посмотрим, при каких именно условиях испытаний можно в частном случае определить вероятность $\mathbf{P}(A)$, не прибегая с самого начала к опыту, т. е. не определяя приближенно вероятности $\mathbf{P}(A)$ при помощи вычисления частости $\mathbf{W}(A)$ по результатам многократных испытаний.

Подсчет вероятности $\mathbf{P}(A)$ события A в таких условиях носит название классического определения вероятности.

Классическое определение вероятности основано на понятии равновероятности или равновозможности всех возможных исходов данного испытания. Понятие равновозможности с классической точки зрения является основным и не подлежит логическому определению. Его можно пояснить следующим примером. Вынимая наугад одну деталь из партии в n деталей, имеющих различные отклонения от номинального размера, мы можем с равной возможностью вынуть любую из n деталей.

Таким образом, равновозможность физически означает некоторую равноправность (симметрию) отдельных исходов относительно основного комплекса условий γ данного испытания.

Пусть в данном испытании мы различаем полную группу, состоящую из n несовместимых и равновозможных исходов — событий

$$E_1, E_2, \ldots, E_n.$$

Будем называть эти события *элементарными исходами* данного испытания.

Рассмотрим различные события, представляющие всевозможные суммы этих элементарных исходов. Всякое рассматриваемое событие A, таким образом,

может быть подразделено на некоторое число m элементарных исходов, т. е. если

$$A = E_1 + E_2 + \ldots + E_m \qquad (m \leqslant n),$$

то мы будем говорить, что событию A благоприятствует m исходов.

Теперь классическое определение вероятности может быть сформулировано следующим образом: *вероятность события A есть отношение числа m благоприятствующих этому событию исходов к общему числу n всех возможных элементарных, несовместимых и равновозможных исходов испытания*, т. е.

$$\mathbf{P}(A) = \frac{m}{n}. \qquad (2.1.5)$$

Пример 2.1.1. Допуск диаметра валика подразделен на четыре равных групповых допуска. В сборочном цехе имеется партия валиков численностью в 100 штук, из которых 15 штук с размерами в пределах первой группы (B_1), 40 штук — в пределах второй группы (B_2), 30 штук — в пределах третьей группы (B_3) и 15 штук — в пределах четвертой группы (B_4).

Сборщик из партии валиков вынимает наугад один валик.

Полная группа событий в условиях данной задачи состоит из 100 несовместимых и равновозможных случаев потому, что по условию при испытании сборщик вынимает один валик, тем самым один из 100 валиков будет обязательно вынут, при этом вынутым валиком может оказаться (в равной мере) любой из 100 валиков.

Событие B_1 подразделяется на 15 частных случаев этой полной группы, так как в партии валиков имеется 15 штук валиков с размерами в пределах допуска первой группы, и если сборщик вынет один из 15 валиков, то событие B_1 наступит.

Если бы 100 валиков были пронумерованы в порядке возрастания их размеров так: E_1, E_2, ..., E_{100}, то к первой группе по размерам относились бы валики E_1, E_2, ..., E_{15}. Эти исходы благоприятствуют событию B_1. Поэтому вероятность события B_1 будет равна $\mathbf{P}(B_1) = \frac{15}{100} = 0{,}15$.

Аналогично могут быть найдены вероятности:

$$\mathbf{P}(B_2) = \frac{40}{100} = 0{,}4; \quad \mathbf{P}(B_3) = \frac{30}{100} = 0{,}3 \quad \text{и} \quad \mathbf{P}(B_4) = \frac{15}{100} = 0{,}15.$$

События E_1, E_2, ..., E_{100} являются попарно несовместимыми, так как вынутая одна деталь не может одновременно иметь два порядковых номера.

Невозможное событие V в данном случае заключается в том, что вынутая из партии наугад деталь окажется по своему размеру не относящейся ни к одной из четырех групп. Так как таких деталей в партии нет, то событие V не может произойти ни в одном испытании:

$$V = \bar{B}_1 \bar{B}_2 \bar{B}_3 \bar{B}_4.$$

Событие $\bar{B}_1$, противоположное событию B_1, заключается в том, что вынутая из партии деталь окажется не принадлежащей по своим размерам к первой группе, т. е. она будет принадлежать ко второй, третьей или четвертой группе:

$$\bar{B}_1 = B_2 + B_3 + B_4;$$

по определению:

$$\mathbf{P}(\bar{B}_1) = \frac{85}{100} = 0{,}85.$$

Точно так же

$$\mathbf{P}(\bar{B}_2) = \frac{60}{100} = 0{,}6.$$

События $\bar{B}_1$ и $\bar{B}_2$ совместимы, так как если вынутая деталь окажется принадлежащей к третьей или четвертой группе, то оба они наступят одновременно.

Отсюда следует, что событие B_3+B_4 влечет за собой как событие $\bar{B}_1$, так и событие $\bar{B}_2$, т. е.

$$B_3+B_4\subset\bar{B}_1 \quad \text{и} \quad B_3+B_4\subset\bar{B}_2.$$

2.1.5. Основные свойства вероятности. Вероятности случайных событий обладают некоторыми общими свойствами.

Эти свойства на основе классического определения вероятности могут быть сформулированы так:

1. Вероятность любого события A неотрицательна, т. е.

$$\mathbf{P}(A)\geqslant 0. \tag{2.1.6}$$

Действительно, поскольку в формуле (2.1.5) числитель неотрицателен, а знаменатель является существенно положительной величиной (это число элементарных событий), то дробь не может быть отрицательной.

2. Вероятность достоверного события U всегда равна единице, т. е.

$$\mathbf{P}(U)=1, \tag{2.1.7}$$

так как достоверному событию благоприятствуют все возможные элементарные случаи — оно появляется при любом возможном исходе испытания и поэтому для него в формуле (2.1.5) число благоприятствующих случаев m равно числу всех возможных случаев n, т. е. $m=n$, откуда дробь $\frac{m}{n}=\frac{n}{n}=1$. Обратное заключение в случае классического определения, очевидно, также имеет место: вероятность, равная единице, отвечает достоверному событию.

3. Вероятность невозможного события V равна нулю, т. е.

$$\mathbf{P}(V)=0, \tag{2.1.8}$$

так как невозможному событию не благоприятствует ни один из n возможных элементарных исходов, а это значит, что $m=0$ и потому в формуле (2.1.5) дробь

$$\frac{m}{n}=\frac{0}{n}=0.$$

4. Вероятность любого случайного события A заключена между вероятностями невозможного события V и достоверного события U, иными словами, заключена между нулем и единицей, т. е.

$$0=\mathbf{P}(V)\leqslant\mathbf{P}(A)\leqslant\mathbf{P}(U)=1, \tag{2.1.9}$$

так как случайным событием, вообще говоря, называют такое, которое не является достоверным, т. е. ему благоприятствуют не все n возможных случаев, но не является и невозможным, т. е. среди n возможных элементарных случаев есть все же такие, которые ему благоприятствуют. Поэтому для случайного события A дробь в формуле (2.1.5) будет заключена между

$$\frac{0}{n}=0 \quad \text{и} \quad \frac{n}{n}=1.$$

Таким образом, классическое определение устанавливает определенную шкалу для измерения вероятностей. Граничным точкам этой шкалы отвечают вероятности нуль и единица.

Числовая величина вероятности, например $\mathbf{P}(A)=0{,}47$, измеренная по этой шкале, может быть наглядно истолкована следующим образом: в данном испытании событие A столь же вероятно, как взятие наудачу одного «отмеченного» предмета из группы в 100 предметов, из которых 47 «отмеченных» и 53 не «отмеченных».

5. Вероятность наступления хотя бы одного из противоположных событий A и $\bar{A}$ всегда равна 1, т. е.

$$\mathbf{P}(A+\bar{A})=\mathbf{P}(U)=1, \tag{2.1.10}$$

так как из формулы (2.1.2) следует, что вероятность наступления хотя бы одного из противоположных событий A и $\bar{A}$ равносильна достоверному событию, а вероятность достоверного события равна 1, как это видно из формулы (2.1.7).

6. Вероятность наступления хотя бы одного события из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, составляющих полную группу, равна единице, т. е.

$$\mathbf{P}(A_1+A_2+\ldots+A_n)=\mathbf{P}(U)=1, \tag{2.1.11}$$

так как из формулы (2.1.4) следует, что наступление хотя бы одного события из событий, составляющих полную группу, равносильно достоверному событию, вероятность которого по формуле (2.1.7) равна единице.

Классическое определение вероятности позволяет предвидеть устойчивость частостей при многократных повторениях испытаний.

В самом деле, предположение, касающееся равновозможности элементарных частных событий, естественно понимать так, что при многократном повторении испытания все элементарные частные случаи повторяются примерно одинаковое число раз.

Если, например, произведено N испытаний, то каждый элементарный исход в полной группе $E_1, E_2, \ldots, E_n$ появится при этом примерно $\frac{N}{n}$ раз. Если событию A благоприятствует m исходов из числа всех n исходов, то оно произойдет в N испытаниях в $k \approx m\frac{N}{n}$ случаях и, таким образом, наблюденная частость события A будет равна

$$\mathbf{W}(A)=\frac{k}{N}\approx\frac{m}{n}=\mathbf{P}(A).$$

Устойчивость частости в этом случае является фактом, который может быть интуитивно предсказан заранее, и он неоднократно проверялся в ряде специальных экспериментов, причем в них со всей тщательностью обеспечивалась равновозможность элементарных исходов. Подтверждением этого фундаментального положения является также вся многолетняя обширная практика статистических наблюдений.

Практика, таким образом, показывает, что при определенных условиях действительно с увеличением числа испытаний частость $\mathbf{W}(A)$ все с большей точностью выражает вероятность $\mathbf{P}(A)$.

§ 2. Простейшие способы исчисления вероятностей

2.2.1. Непосредственный подсчет вероятностей. В теории вероятностей рассматривается ряд способов или приемов исчисления вероятностей сложных событий по заданным вероятностям исходных событий. Эти заданные вероятности могут быть определены статистическим путем или установлены на основе каких-либо теоретических допущений.

Остановимся вначале на простейших способах исчисления вероятностей. Сюда войдут:

1. Непосредственный подсчет вероятностей.
2. Правило сложения вероятностей.
3. Правило умножения вероятностей.
4. Формула полной вероятности.
5. Формула вероятностей гипотез.

Непосредственный подсчет вероятностей производится по весьма простой формуле (2.1.5).

Основная трудность при пользовании этой формулой заключается в правильном определении числа n всех равновозможных случаев и числа m благоприятствующих интересующему нас событию случаев.

Рассмотрим один характерный пример.

Пример 2.2.1. В сборочный узел входят две сопрягаемые детали: № 1 (валик) и № 2 (втулка). Узел имеет пониженное качество, если размер одной из деталей завышен, а другой занижен, или одной детали нормален, а другой завышен или занижен.

На сборку поступили партия валиков и партия втулок.

Из 10 валиков, входящих в партию, 7 имеют нормальные размеры, 2 — завышенные и 1 — заниженный.

Из 20 втулок, входящих в партию, 16 имеют нормальные размеры, 1 — завышенный и 3 — заниженные.

Требуется определить непосредственным подсчетом вероятность события П, заключающегося в том, что первый собранный узел окажется пониженного качества.

Каждый из 10 валиков может попасть в первый узел и быть сопряженным в нем с каждой из 20 втулок. Следовательно, общее число всех возможных случаев, составляющих полную группу, будет равно

$$n = 10 \cdot 20 = 200.$$

Благоприятные комбинации для события П складываются из:

1) сопряжений «завышенных» валиков с «заниженными» втулками

$$m_{1\text{П}} = 2 \cdot 3 = 6.$$

2) Сопряжений «заниженных» валиков с «завышенными» втулками

$$m_{2\text{П}} = 1 \cdot 1 = 1.$$

3) Сопряжений «нормальных» валиков с «заниженными» втулками

$$m_{3\text{П}} = 7 \cdot 3 = 21.$$

4) Сопряжений «нормальных» валиков с «завышенными» втулками

$$m_{4\text{П}} = 7 \cdot 1 = 7.$$

5) Сопряжений «завышенных» валиков с «нормальными» втулками

$$m_{5\text{П}} = 2 \cdot 16 = 32.$$

6) Сопряжений «заниженных» валиков с «нормальными» втулками

$$m_{6\text{П}} = 1 \cdot 16 = 16.$$

Всего благоприятных для события П комбинаций будет:

$$m_{\text{П}} = 6 + 1 + 21 + 7 + 32 + 16 = 83.$$

Таким образом, искомая вероятность равна

$$\mathbf{P}(\text{П}) = \frac{83}{200}.$$

2.2.2. Комбинаторика (теория соединений) и приближенное вычисление факториалов. Подсчет числа благоприятствующих случаев и числа всех возможных случаев для определения вероятности по формуле (2.1.5) нередко бывает осложнен тем, что элементарные случаи представляют собой комбинации или соединения заданных исходных событий.

Если рассматривать события как элементы такого рода соединений, то мы можем прийти к различным типам этих соединений, рассматриваемых в комбинаторике.

Различают три основных типа соединений (без повторений).

1. *Размещения* — это соединения, отличающиеся друг от друга либо числом, либо составом входящих в них элементов, либо при одном и том же числе и составе элементов порядком их расположения.

2. *Перестановки* — соединения, содержащие одни и те же элементы и отличающиеся друг от друга только порядком элементов.

3. *Сочетания* — соединения из данного числа элементов, отличающиеся друг от друга входящими в них элементами независимо от их порядка. Таким образом, если два сочетания различны, то в одном из них содержится хотя бы один элемент, не содержащийся в другом.

Кроме этих основных трех типов соединений без повторений в теории вероятностей, нередко используются еще соединения с *повторениями*, т. е. соединения, в которых элементы встречаются не по одному, а по нескольку раз.

Число размещений из n по m обозначается символом A_n^m и подсчитывается по формуле

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{2.2.1}$$

Как следует из определения, перестановки, по существу, представляют размещения из n по n. Поэтому число перестановок, обозначаемое символом P_n, равно

$$P_n = n!, \tag{2.2.2}$$

так как

$$P_n = A_n^n = n(n-1)\ldots 2\cdot 1 = n!.$$

Число сочетаний из n элементов по m обозначается символом C_n^m. Из каждого сочетания этого типа, переставляя всеми способами его элементы между собой, получают $P_m = m!$ размещений. Проделав эту операцию со всеми сочетаниями, получим всего $C_n^m \cdot P_m$ размещений из n по m.

Поэтому

$$A_n^m = C_n^m m!.$$

Отсюда, принимая во внимание (2.2.1) и (2.2.2), получим:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{2.2.3}$$

При вычислении вероятностей по способу непосредственного подсчета с применением комбинаторики часто приходится иметь дело с факториалами больших чисел. Понятно, что вычисления в этих случаях делаются очень трудоемкими. Чтобы облегчить вычисления, прибегают к следующей формуле (Стирлинга) для приближенного вычисления факториалов больших чисел:

$$n! \approx \sqrt{2\pi}\, e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}. \tag{2.2.4}$$

По этой формуле факториал, например, 10 равен $10! = 3\,598\,696$, тогда как на самом деле $10! = 3\,628\,800$. Ошибка составляет $0{,}8\%$.

Относительная погрешность формулы убывает с возрастанием n.

При вычислениях по формуле Стирлинга естественно воспользоваться логарифмами. Из формулы (2.2.4) следует:

$$\lg n! \approx \lg \sqrt{2\pi} - n \lg e + \left(n + \frac{1}{2}\right) \lg n,$$

$$\lg \sqrt{2\pi} = 0{,}39909, \qquad \lg e = 0{,}43429,$$

$$\sqrt{2\pi} = 2{,}506628, \qquad e = 2{,}718282.$$

Если не требуется большой точности вычислений, то можно прибегнуть к таблице логарифмов факториалов.

В качестве примера использования комбинаторики при непосредственном подсчете вероятностей приведем еще практически важную задачу о статистической (безвозвратной) выборке.

2.2.3. Задача о статистической (безвозвратной) выборке. Если в процессе отбора упоминавшейся уже выше выборки каждый из отобранных объектов обратно не возвращается, то выборка называется безвозвратной или бесповторной.

Пусть каждый из S объектов некоторой совокупности обладает одним из двух признаков: A или $\overline{A}$, причем признаком A обладает K объектов и, следо-

вательно, признаком $\overline{A}$ обладает $S-K$ объектов. Из этой совокупности отбирается s объектов так, что после отбора i объектов следующим за ними $i+1$-м объектом может с равной вероятностью оказаться любой из еще неотобранных объектов.

Интересующее нас событие заключается в том, что в выборке из s объектов окажется некоторое заданное число k ($k \leqslant s$) объектов, обладающих признаком A.

Будем различать между собой отдельные объекты совокупности, например, перенумеровав их в каком-нибудь порядке. За полную группу элементарных исходов в данном испытании можно принять совокупность всех сочетаний из S объектов по s взятых наудачу в выборку. Число этих сочетаний будет равно C_S^s.

Таким образом, отдельные элементарные исходы будут различаться между собой составом вынутой группы s (но не порядком их).

Подсчитаем теперь, какое число из всех C_S^s сочетаний полной группы будет благоприятствовать интересующему нас событию. Каждое благоприятствующее нашему событию сочетание можно получать, объединяя какую-либо группу из k объектов, обладающих признаком A, с какой-либо группой $s-k$ объектов, обладающих признаком $\overline{A}$. Различаемые нами группы при этом должны отличаться по составу элементов, т. е. представлять сочетания.

Число всех сочетаний по k объектов, обладающих признаком A, равно C_K^k, а число сочетаний по $s-k$ объектов, обладающих признаком $\overline{A}$, равно C_{S-K}^{s-k}.

Так как все сочетания по s, представляющие благоприятные комбинации, мы получим, комбинируя каждые из C_K^k сочетаний первого типа с каждым из C_{S-K}^{s-k} сочетаний второго, то общее число всех благоприятных комбинаций s отобранных объектов будет, следовательно, равно произведению $C_K^k \cdot C_{S-K}^{s-k}$.

На основании определения вероятности интересующая нас вероятность $\mathbf{P}_{SK}(s, k)$ того, что в выборке из s объектов окажется k объектов с признаком A, окончательно будет равна

$$\mathbf{P}_{SK}(s,\ k) = \frac{C_K^k C_{S-K}^{s-k}}{C_S^s}. \tag{2.2.5}$$

Можно было бы за полную группу элементарных исходов в данном испытании принять не совокупность сочетаний, а совокупность размещений из S объектов по s объектов.

Тогда число всех возможных случаев было бы равно A_S^s. Число же благоприятствующих нашему событию комбинаций мы получили бы, умножив произведение $C_K^k C_{S-K}^{s-k}$ на число перестановок P_s, которое можно составить из каждой благоприятствующей комбинации, содержащей s элементов. Таким образом, число благоприятствующих комбинаций будет равно

$$C_K^k \cdot C_{S-K}^{s-k} P_s.$$

Вероятность интересующего нас события будет равна

$$\mathbf{P}_{SK}(s,\ k) = \frac{C_K^k C_{S-K}^{s-k} P_s}{A_S^s} = \frac{C_K^k C_{S-K}^{s-k}}{A_S^s : P_s} = \frac{C_K^k C_{S-K}^{s-k}}{C_S^s}.$$

Результат получился тот же самый. Иными словами, элементарными исходами в данном случае мы можем считать и сочетания из S по s и размещения из S по s, так как и те и другие по отдельности между собой равновозможны и несовместимы.

Формуле (2.2.5) можно придать иной вид, применив (2.2.3) для выражения чисел сочетаний

$$\mathbf{P}_{SK}(s,\ k) = \frac{s!}{k!\,(s-k)!}\,\frac{K(K-1)\ldots(K-k+1)\,(S-K)\,(S-K-1)\ldots[S-K-(s-k)+1]}{S\,(S-1)\ldots(S-s+1)} =$$

$$= \frac{s!}{k!\,(s-k)!}\,\frac{K!}{(K-k)!}\,\frac{(S-K)!}{[S-K-(s-k)]!}\,\frac{(S-s)!}{S!}. \qquad (2.2.6)$$

В частности, вероятность не получить в выборке ни одного предмета с признаком A получится из (2.2.6) при $k=0$ в виде

$$\mathbf{P}_{SK}(s,\ 0) = \frac{(S-K)\,(S-K-1)\ldots(S-K-s+1)}{S\,(S-1)\ldots(S-s+1)}. \qquad (2.2.7)$$

Пример 2.2.2. В партии деталей численностью в 100 штук имеется 30 деталей с отклонениями от номинального размера в плюс (+).

Из этой партии отбирается безвозвратная выборка численностью в 3 штуки. Требуется определить вероятность того, что в выборку попадает одна «плюсовая» деталь.

По формуле (2.2.5) находим:

$$\mathbf{P}_{100,30}(3,1) = \frac{C_{30}^1 C_{70}^2}{C_{100}^3} = \frac{30\cdot 70\cdot 69\cdot 3}{100\cdot 99\cdot 98} = 0{,}448.$$

2.2.4. Правило сложения вероятностей. Вторым приемом исчисления вероятностей является правило сложения вероятностей. Для несовместимых событий его можно сформулировать следующим образом: *если событие A в данном испытании подразделяется на частные несовместимые случаи $A_1, A_2, \ldots, A_s$ ($A = A_1 + A_2 + \ldots + A_s$), то вероятность события A равна сумме вероятностей событий $A_1, A_2, \ldots, A_s$*, т. е.

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{s} A_i\right) = \sum_{i=1}^{s} \mathbf{P}(A_i). \qquad (2.2.8)$$

Поясним содержание этого правила на примере.

Пусть в условиях примера 2.1.1 событие B_{1-3} представляет собой то, что вынутая сборщиком деталь окажется по своему размеру в пределах первых трех четвертей общего допуска размера.

Это значит, что событие B_{1-3} подразделяется на три частных случая (несовместимых события) B_1, B_2 и B_3, так как если вынутая деталь окажется по размерам лежащей в границах допусков первой (событие B_1), второй (событие B_2) или третьей (событие B_3) групп, то событие B_{1-3} наступит.

Таким образом,

$$B_{1-3} = B_1 + B_2 + B_3.$$

На основании правила сложения имеем:

$$\mathbf{P}(B_{1-3}) = \mathbf{P}(B_1 + B_2 + B_3) = \mathbf{P}(B_1) + \mathbf{P}(B_2) + \mathbf{P}(B_3) = 0{,}15 + 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}85.$$

Доказательство правила сложения вероятностей в классической схеме вытекает прямо из определения вероятностей. В самом деле, если событие A подразделяется на несовместимые события $A_1, A_2, \ldots, A_s$, каждому из которых благоприятствует соответственно $m_1, m_2, \ldots, m_s$ элементарных исходов (между собой не перекрывающихся или несовместимых) из полной группы, то событию A благоприятствует всего $m_1 + m_2 + \ldots + m_s$ исходов и потому, если n обозначает общее число исходов полной группы,

$$\mathbf{P}(A) = \frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_s}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} + \ldots + \frac{m_s}{n} =$$

$$= \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \ldots + \mathbf{P}(A_s),$$

что и требовалось.

Правило сложения в современной теории вероятностей принимается за аксиому, выражающую основное свойство вероятности как своеобразной меры объективной возможности наступления события в рассматриваемом испытании.

Заметим еще, что если в N опытах каждое из несовместимых событий A_i произошло k_i раз, т. е. если число появления события $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_s$ будет $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_s$, то частость его $\frac{k}{N}$ будет представлять в точности сумму частостей $\frac{k_1}{N} + \frac{k_2}{N} + \ldots + \frac{k_s}{N}$. Таков эмпирический смысл рассматриваемого свойства вероятности.

Из этого положения в свою очередь вытекает следующее.

1. Для полной группы событий из формул (2.1.11) и (2.2.8) получим:

$$\mathbf{P}(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) = \mathbf{P}(U) = 1, \qquad (2.2.9)$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — несовместимые события, составляющие полную группу.

Итак, сумма вероятностей несовместимых событий, составляющих полную группу, равна единице.

2. Для противоположных событий (по определению между собой несовместимых) из формул (2.1.10) и (2.2.8) получим:

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{P}(A + \overline{A}) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\overline{A}) = \mathbf{P}(U) = 1, \\ \text{откуда} \quad &\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A), \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.10)$$

где A и $\overline{A}$ — противоположные события.

Итак, вероятность противоположного события дополняет до единицы вероятность данного события.

Пример 2.2.3. Требуется по условиям примера 2.1.1:

1) проверить, пользуясь формулой (2.2.9), составляют ли события B_1, B_2, B_3 и B_4 полную группу и 2) вычислить вероятность события, заключающегося в том, что вынутая деталь не будет принадлежать к первой группе.

1) По формуле (2.2.9) получим:

$$\mathbf{P}(B_1) + \mathbf{P}(B_2) + \mathbf{P}(B_3) + \mathbf{P}(B_4) = 0{,}15 + 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}15 = 1.$$

Следовательно, несовместимые между собой события B_1, B_2, B_3 и B_4 действительно составляют полную группу.

2) По формуле (2.2.10), если $\mathbf{P}(B_1) = 0{,}15$, то $\mathbf{P}(\overline{B}_1) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$.

Таким образом, вероятность того, что вынутая деталь не будет принадлежать к первой группе, равна $P(\overline{B}_1) = 0{,}85$.

2.2.5. Условная вероятность события. Правило сложения в общем случае. Остановимся на важных в теории вероятностей понятиях условной вероятности события и независимости событий.

Ранее указывалось, что вероятность события A связана с определенным комплексом условий γ. Если никаких других условий, кроме комплекса γ, при вычислении вероятности $\mathbf{P}(A)$ события A не налагается, то такая вероятность называется *безусловной вероятностью* события A. Таким образом, строго говоря, и безусловная вероятность $\mathbf{P}(A)$ является условной в том смысле, что она связана с комплексом условий γ.

Условной вероятностью $\mathbf{P}(A \mid B)$ *события* A при наступлении события B называется вероятность события A, вычисленная в предположении, что событие B наступило. Вероятность $\mathbf{P}(A \mid B)$ отличается от вероятности $\mathbf{P}(A)$ тем, что предположение о наступлении события B изменяет прежний комплекс условий γ и вероятность $\mathbf{P}(A \mid B)$ относится по существу к испытанию в других условиях.

Поясним смысл условной вероятности на примере.

Пример 2.2.4. Предположим, что детали одного наименования («валик привода») поступают на сборку из двух механических цехов-изготовителей (№ 1 и № 2).

Среди «валиков привода» цехов № 1 и № 2 имеются валики с отклонениями от номинального размера в плюс (+) и в минус (—).

Каждые n валиков, имеющихся на сборке, состоят из $a+k$ валиков цеха № 1, из которых a «минусовых» и k «плюсовых», и $b+l$ валиков цеха № 2, из которых l «плюсовых» и b «минусовых».

При этом $a+k+b+l=n$.

Обозначим через A событие, заключающееся в том, что взятая наугад из партии в n штук деталь окажется «плюсовой», и через B, — что она окажется изготовленной в цехе № 1.

Мы будем иметь четыре возможные комбинации признаков:

$$AB,\quad \overline{A}B,\quad A\overline{B} \text{ и } \overline{A}\overline{B}.$$

Распределение n валиков между этими комбинациями приведено в табл. 2.2.1.

Таблица 2.2.1

События	События		
	A	$\overline{A}$	Сумма
B	k	a	$k+a$
$\overline{B}$	l	b	$l+b$
Сумма	$k+l$	$a+b$	n

Вычислим непосредственным подсчетом вероятности появления событий A и B, противоположных им событий $\overline{A}$ и $\overline{B}$ и вероятности совместного появления различных попарных комбинаций этих четырех событий.

Вероятность совместного появления двух событий A и B, т. е., иными словами, события AB, заключающегося в том, что вынутый наугад валик окажется одновременно «плюсовым» и изготовленным в цехе № 1, равна

$$\mathbf{P}(AB)=\frac{k}{n},$$

так как из общего числа n валиков k валиков являются одновременно «плюсовыми» и изготовленными в цехе № 1.

Аналогично этому получим:

$$\mathbf{P}(A\overline{B})=\frac{l}{n};\quad \mathbf{P}(\overline{A}B)=\frac{a}{n} \quad \text{и} \quad \mathbf{P}(\overline{A}\overline{B})=\frac{b}{n}.$$

Вероятность появления события A равна

$$\mathbf{P}(A)=\frac{k+l}{n},$$

ибо из общего числа n валиков $k+l$ валиков являются «плюсовыми» (без учета того, в каком цехе они изготовлены). Очевидно,

$$\mathbf{P}(A)=\frac{k}{n}+\frac{l}{n}=\mathbf{P}(AB)+\mathbf{P}(A\overline{B}); \tag{2.2.11}$$

это следует также из правила сложения.

Аналогичным образом:

$$\mathbf{P}(\overline{A}) = \frac{a+b}{n} = \mathbf{P}(\overline{A}B) + \mathbf{P}(\overline{A}\,\overline{B}), \tag{2.2.12}$$

$$\mathbf{P}(B) = \frac{k+a}{n} = \mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(\overline{A}B), \tag{2.2.13}$$

$$\mathbf{P}(\overline{B}) = \frac{l+b}{n} = \mathbf{P}(A\overline{B}) + \mathbf{P}(\overline{A}\,\overline{B}). \tag{2.2.14}$$

Вычислим теперь условные вероятности. Условная вероятность события B, вычисленная в предположении, что событие A наступило, т. е., иными словами, вероятность того, что вынутый наугад валик окажется изготовленным в цехе № 1, если предположить, что он заведомо «плюсовой», равна

$$\mathbf{P}(B \mid A) = \frac{k}{k+l},$$

так как, предположив, что валик «плюсовой», мы тем самым исключили из подсчета все $a+b$ «минусовых» валиков, и общее число валиков теперь оказывается равным $k+l$, из которых k валиков изготовлено в цехе № 1.

Аналогично

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{k}{a+k}.$$

Возьмем теперь полученное нами выражение для условной вероятности $\mathbf{P}(B \mid A)$ и разделим в нем числитель и знаменатель на n; тогда получим:

$$\mathbf{P}(B \mid A) = \frac{k}{k+l} = \frac{\frac{k}{n}}{\frac{k+l}{n}} = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Аналогично этому

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{k}{a+k} = \frac{\frac{k}{n}}{\frac{a+k}{n}} = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Таким образом, *когда событие A подразделяется на $k+l>0$ элементарных исходов из полной группы несовместимых и равновозможных между собой исходов, из которых ровно k благоприятствуют наступлению A вместе с B, то условная вероятность события B при условии наступления события A равна*

$$\mathbf{P}(B \mid A) = \frac{k}{k+l} = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)}. \tag{2.2.15}$$

Формула (2.2.15) называется *формулой условной вероятности.*

Если событию A не благоприятствует ни один случай и $\mathbf{P}(A) = 0$, то условная вероятность других событий в зависимости от события A не определяется.

Пользуясь выведенными соотношениями, можно обобщить правило сложения, распространив его на случай совместимых событий.

Событие $A+B$, заключающееся в том, что вынутый валик окажется либо «плюсовым», либо изготовленным в цехе № 1, очевидно, подразделяется на следующие три события:

Событие AB (валик «плюсовой» и изготовлен в цехе № 1).

Событие $A\overline{B}$ (валик «плюсовой», но не изготовлен в цехе № 1).

Событие $\overline{A}B$ (валик не «плюсовой», но изготовлен в цехе № 1), т. е.

$$A+B = AB + A\overline{B} + \overline{A}B.$$

Тогда на основании правила сложения вероятностей получим для несовместимых событий:

$$\mathbf{P}(A+B)=\mathbf{P}(AB)+\mathbf{P}(A\overline{B})+\mathbf{P}(\overline{A}B). \tag{2.2.16}$$

Пользуясь соотношениями (2.2.11) и (2.2.13), найдем:

$$\mathbf{P}(AB)+\mathbf{P}(A\overline{B})=\mathbf{P}(A), \quad \mathbf{P}(\overline{A}B)=\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(AB).$$

Поэтому из (2.2.16) следует:

$$\mathbf{P}(A+B)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(AB). \tag{2.2.17}$$

Таким образом, имеем результат, обобщающий теорему сложения для двух событий: *вероятность суммы двух событий равна сумме их вероятностей минус вероятность совместного их появления в данном испытании.*

В частном случае при двух несовместимых событиях A и B $\mathbf{P}(AB)=0$ и поэтому результат по формуле (2.2.17) совпадает с результатом по формуле (2.2.8).

Ознакомимся теперь с понятием о независимости событий.

Событие A называется независимым от события B, если наступление события B не изменяет вероятности события A, т. е. если

$$\mathbf{P}(A\mid B)=\mathbf{P}(A). \tag{2.2.18}$$

Пример 2.2.5. В сборочном цехе имеется n_A втулок, из которых m_A «плюсовых» и n_B валиков, из которых m_B «плюсовых».

Обозначим через A событие, заключающееся в том, что взятая наугад из партии втулок втулка окажется «плюсовой», и через B, — что взятый наугад из партии валиков валик окажется «плюсовым». Очевидно, что

$$\mathbf{P}(A)=\frac{m_A}{n_A} \quad \text{и} \quad \mathbf{P}(B)=\frac{m_B}{n_B}.$$

По самому характеру данного испытания заранее очевидно, что события A и B будут независимы, так как, каков бы ни был исход испытания с партией втулок, вероятность появления валика будет одна и та же. Проверим тем не менее это обстоятельство, используя формулу условной вероятности (2.2.15).

Найдем вероятность совместного наступления двух событий A и B, т. е. события AB, заключающегося в том, что вынутые наугад из своих партий детали — втулка и валик — окажутся «плюсовыми».

Очевидно, что каждая вынутая втулка может оказаться вынутой совместно с каждым из валиков. Поэтому общее число возможных исходов данного испытания равно произведению n_An_B.

Подсчитаем число благоприятствующих событию AB исходов. Так как каждая «плюсовая» втулка может быть вынута совместно с каждым плюсовым валиком, то число благоприятствующих исходов будет равно произведению m_Am_B.

Искомая вероятность будет равна

$$\mathbf{P}(AB)=\frac{m_Am_B}{n_An_B}.$$

По формуле (2.2.15) условная вероятность $\mathbf{P}(A\mid B)$ будет равна

$$\mathbf{P}(A\mid B)=\frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}=\frac{m_Am_B}{n_An_B}:\frac{m_B}{n_B}=\frac{m_A}{n_A}.$$

Мы видим, что действительно

$$\mathbf{P}(A\mid B)=\frac{m_A}{n_A}=\mathbf{P}(A);$$

отсюда следует, что события A и B независимы в определенном выше смысле.

Пример 2.2.6. Из партии численностью в 100 валиков 15 валиков являются только эллиптичными, 50 — только конусными, 25 — одновременно эллиптичными и конусными и 10 валиков дефектов не имеют. Событие $Э$ заключается в том, что взятый наудачу из партии валик окажется эллиптичным, а событие $К$ в том, что валик окажется конусным.

Тогда, пользуясь формулой непосредственного подсчета вероятностей, получим:

$$\mathbf{P}(Э) = \frac{40}{100} = 0{,}4, \quad \mathbf{P}(К) = \frac{75}{100} = 0{,}75 \quad \text{и} \quad \mathbf{P}(ЭК) = \frac{25}{100} = 0{,}25.$$

Подсчитаем теперь условную вероятность $\mathbf{P}(Э \mid К)$ того, что вынутый валик окажется эллиптичным, если предположить, что он конусный.

По формуле (2.2.15) получим:

$$\mathbf{P}(Э \mid К) = \frac{\mathbf{P}(ЭК)}{\mathbf{P}(К)} = \frac{0{,}25}{0{,}75} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33.$$

Эту вероятность можно было бы подсчитать и непосредственно. Если валик конусный, то это один из 75 конусных валиков и, следовательно, число всех элементарных исходов равно 75. Нас интересует вероятность того, что валик окажется эллиптичным. Таких валиков среди 75 валиков имеется 25. Следовательно, число благоприятствующих случаев равно 25. Отсюда

$$\mathbf{P}(Э \mid К) = \frac{25}{75} = \frac{1}{3} = \approx 0{,}33.$$

Аналогично

$$\mathbf{P}(К \mid Э) = \frac{\mathbf{P}(ЭК)}{\mathbf{P}(Э)} = \frac{0{,}25}{0{,}4} = 0{,}625.$$

Мы видим, что в данном случае $\mathbf{P}(Э \mid К) \neq \mathbf{P}(Э)$ и $\mathbf{P}(К \mid Э) \neq \mathbf{P}(К)$, откуда заключаем, что события $Э$ и $К$ зависимы.

Заметим, что если бы в данном случае общая доля эллиптичных валиков среди всех валиков была равна доле эллиптичных среди одних только конусных валиков, то события $Э$ и $К$ были независимыми. Так, например, если $\mathbf{P}(Э) = 0{,}5$ и $\mathbf{P}(К) = 0{,}5$, а $\mathbf{P}(ЭК) = 0{,}25$, то $\mathbf{P}(Э \mid К) = \frac{0{,}25}{0{,}5} = 0{,}5$ и $\mathbf{P}(К \mid Э) = \frac{0{,}25}{0{,}5} = 0{,}5$, т. е. $\mathbf{P}(Э \mid К) = \mathbf{P}(Э)$ и $\mathbf{P}(К \mid Э) = \mathbf{P}(К)$.

2.2.6. Правило умножения вероятностей. Независимость событий в совокупности. Для двух событий может быть сформулировано следующее правило умножения вероятностей.

Вероятность совместного появления двух событий A и B в данном испытании равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность второго, вычисленную в предположении, что первое событие появилось, т. е.

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B \mid A) = \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(A \mid B). \qquad (2.2.19)$$

Правило это вытекает из формулы условной вероятности. В самом деле, если уравнение (2.2.15) решить относительно $\mathbf{P}(AB)$, то мы получим соотношение (2.2.19).

Пример 2.2.7. В собираемый механизм входят две одинаковые шестерни. Технические условия нарушаются, если обе они окажутся с отклонением по толщине зуба в плюс (+) от среднего размера (заедание). У сборщика имеется 10 шестерен, из которых 3 «плюсовых» и 7 «минусовых». Требуется определить вероятность нарушения технических условий на сборке.

Обозначим через A событие, заключающееся в том, что первая шестерня, взятая наугад из партии, окажется «плюсовой», и через B событие, заключающееся в том, что вторая взятая наугад шестерня окажется «плюсовой».

Очевидно, интересующее нас событие заключается в совместном наступлении событий A и B.

На основании правила умножения вероятностей вероятность его будет равна

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B \mid A).$$

Непосредственным подсчетом находим:

$$\mathbf{P}(A)=\frac{3}{10} \quad \text{и} \quad \mathbf{P}(B\,|\,A)=\frac{2}{9},$$

так как если первая вынутая шестерня окажется «плюсовой», то вероятность того, что вторая окажется «плюсовой», будет равна отношению числа оставшихся в партии «плюсовых» шестерен ($3-1=2$) к общему числу оставшихся в партии шестерен ($10-1=9$).

Окончательно получим:

$$\mathbf{P}(AB)=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}\approx 0{,}07.$$

Из правила умножения для двух событий можно вывести важное следствие.

Если событие A независимо от B и, следовательно, $\mathbf{P}(A\,|\,B)=\mathbf{P}(A)$, то на основании соотношения (2.2.19) имеем:

$$\mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(B\,|\,A)=\mathbf{P}(B)\cdot\mathbf{P}(A\,|\,B)=\mathbf{P}(B)\cdot\mathbf{P}(A),$$

откуда

$$\mathbf{P}(B\,|\,A)=\mathbf{P}(B).$$

Таким образом, *свойство независимости событий взаимно*. Условие независимости двух событий A и B может быть записано в симметричной форме

$$\mathbf{P}(AB)=\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$$

— вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их безусловных вероятностей. Группируя события, правилу умножения легко придать следующий общий вид.

Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем условная вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события наступили:

$$\mathbf{P}(A_1A_2\ldots A_s)=\mathbf{P}(A_1)\cdot\mathbf{P}(A_2\,|\,A_1)\ldots\mathbf{P}(A_s\,|\,A_1A_2\ldots A_{s-1}), \quad (2.2.20)$$

где $\mathbf{P}(A_s\,|\,A_1A_2\ldots A_{s-1})$ есть вероятность появления события A_s, вычисленная в предположении, что события A_1, A_2, ..., A_{s-1} наступили.

Так, например, для трех событий A_1, A_2 и A_3 мы, пользуясь (2.2.19), найдем, считая A_1A_2 за одно событие,

$$\mathbf{P}(A_1A_2A_3)=\mathbf{P}(A_1A_2)\cdot\mathbf{P}(A_3\,|\,A_1A_2)$$

и

$$\mathbf{P}(A_1A_2)=\mathbf{P}(A_1)\cdot\mathbf{P}(A_2\,|\,A_1).$$

Отсюда в соответствии с общей формулой

$$\mathbf{P}(A_1A_2A_3)=\mathbf{P}(A_1)\cdot\mathbf{P}(A_2\,|\,A_1)\cdot\mathbf{P}(A_3\,|\,A_1A_2).$$

Если вероятность какого-либо из событий A_1, A_2, ..., A_s равна нулю, то и вероятность совместного наступления этих событий также равна нулю, как это видно из (2.2.20).

Применим правило умножения к вычислению вероятности $\mathbf{P}_{SK}(s,\,0)$, задаваемой формулой (2.2.7), для случая неполучения ни одного предмета с признаком A в выборке из s.

Вероятность при первом извлечении не получить предмета с признаком A будет равна $\frac{S-K}{S}$, условная вероятность не получить его и при втором извлечении, если он не появился в первом, очевидно, будет $\frac{S-K-1}{S-1}$; аналогично

этому условная вероятность не получить A при третьем извлечении, если в первых двух он не появился, равна $\frac{S-K-2}{S-2}$ и т. д.

Таким образом, из правила умножения для s последовательных извлечений найдем:

$$\mathbf{P}_{SK}(s, 0) = \frac{S-K}{S}\,\frac{S-K-1}{S-1}\,\cdots\,\frac{(S-K-s+1)}{(S-s+1)},$$

что совпадает с (2.2.7).

События A_1, A_2, ..., A_s называются независимыми в совокупности, когда условная вероятность появления любого события из их числа, вычисленная в предположении, что какие-либо другие события в группе (совокупности) произошли, равна безусловной вероятности события

$$\mathbf{P}(A_p \mid A_k A_l A_m \ldots) = \mathbf{P}(A_p), \tag{2.2.21}$$

где A_k, A_l, A_m есть некоторые события рассматриваемой группы.

Для независимости нескольких событий в совокупности недостаточно их *попарной независимости*, т. е. независимости любой пары событий, взятых из совокупности событий.

Убедимся в этом на примере.

Пример 2.2.8. У сборщика имеется четыре валика, из которых один конусный, второй с огранкой, третий эллиптический, а четвертый имеет одновременно все три указанных дефекта. Обозначим: через K событие, заключающееся в том, что первый вынутый наугад валик окажется с конусностью, через O — с огранкой и через $Э$ — с эллиптичностью.

Требуется проверить, имеется ли зависимость между тремя событиями K, O и $Э$.

Вычислим сначала безусловные вероятности интересующих нас событий. Они равны

$$\mathbf{P}(K) = \mathbf{P}(O) = \mathbf{P}(Э) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Вычислим условную вероятность события K в предположении, что событие O появилось. Событие $K \mid O$ означает, что мы заранее предполагаем валик с огранкой и при этом интересуемся его конусностью. Искомая вероятность равна

$$\mathbf{P}(K \mid O) = \frac{1}{2}.$$

Аналогично этому можно было бы подсчитать, что условные вероятности событий $K \mid Э$, $Э \mid K$, $Э \mid O$, $O \mid K$ и $O \mid Э$ равны:

$$\mathbf{P}(K \mid Э) = \mathbf{P}(Э \mid K) = \mathbf{P}(Э \mid O) = \mathbf{P}(O \mid K) = \mathbf{P}(O \mid Э) = \frac{1}{2}.$$

Мы видим, что условные вероятности событий K, O и $Э$ равны их безусловным вероятностям. Следовательно, эти события попарно независимы.

Вычислим теперь условную вероятность события K в предположении, что события O и $Э$ наступили.

Событие $K \mid OЭ$ означает, что мы заранее полагаем вынутый валик имеющим огранку и эллиптичность и при этом интересуемся его конусностью.

Искомая вероятность равна

$$\mathbf{P}(K \mid OЭ) = \frac{1}{1} = 1 \neq \mathbf{P}(K) = \frac{1}{2}$$

потому что, предположив заранее наличие огранки и эллиптичности, мы свели число возможных случаев к одному (только один валик имеет одновременно огранку и эллиптичность), а число благоприятных случаев оказалось также равным единице (единственный валик, имеющий одновременно огранку и эллиптичность, имеет вместе с этим и конусность).

Аналогично этому можно было бы подсчитать, что условные вероятности событий $O \mid KЭ$ и $Э \mid KO$

$$\mathbf{P}(O \mid KЭ) = \mathbf{P}(Э \mid KO) = 1 \neq \mathbf{P}(O) = \mathbf{P}(Э) = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, хотя события K, O и $Э$ попарно независимы, но они в то же время не являются независимыми в совокупности.

Из правила умножения в свою очередь следует, что если события $A_1, A_2, \ldots, A_s$ независимы в совокупности, то из формул (2.2.20) и (2.2.21) вытекает:

$$\mathbf{P}(A_1A_2A_3 \ldots A_s) = \mathbf{P}\left(\prod_{i=1}^{s} A_i\right) = \prod_{i=1}^{s} \mathbf{P}(A_i), \tag{2.2.22}$$

т. е. *вероятность совместного наступления нескольких независимых в совокупности событий равна произведению вероятностей (безусловных) этих событий.*

Так как, вообще говоря, каждая из вероятностей $\mathbf{P}(A_1)$, $\mathbf{P}(A_2)$, ..., $\mathbf{P}(A_s)$ меньше единицы, то вероятность совместного наступления нескольких событий уменьшается с увеличением числа этих событий.

Пример 2.2.9. Пусть при испытании оптиметра на стабильность показаний вероятность получения отсчета в плюс от нулевого штриха при однократном арретировании наконечника равна 0,5. Требуется вычислить вероятность того, что при трехкратном арретировании два раза будет получен отсчет в плюс (событие M).

Обозначим через A событие, заключающееся в получении отсчета в плюс при первом арретировании, через B — в получении такого отсчета при втором и через C — при третьем арретировании.

Так как при любом порядковом номере арретирования вероятность «плюсового» отсчета равна 0,5 независимо от результатов остальных арретирований, то события A, B и C являются независимыми в совокупности.

Событие M подразделяется на три частных случая

$$M = AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC.$$

Потому, применяя теорему сложения, получим:

$$\mathbf{P}(M) = \mathbf{P}(AB\bar{C}) + \mathbf{P}(A\bar{B}C) + \mathbf{P}(\bar{A}BC).$$

С другой стороны, каждая тройка событий $AB\bar{C}$, $A\bar{B}C$ и $\bar{A}BC$ состоит из событий, независимых в совокупности, так как относится к последовательным независимым испытаниям. Поэтому искомая вероятность $\mathbf{P}(M)$ будет равна

$$\mathbf{P}(M) = \mathbf{P}(AB\bar{C}) + \mathbf{P}(A\bar{B}C) + \mathbf{P}(\bar{A}BC) = \mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(B)\cdot\mathbf{P}(\bar{C}) + \mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(\bar{B})\cdot\mathbf{P}(C) +$$

$$+ \mathbf{P}(\bar{A})\cdot\mathbf{P}(B)\cdot\mathbf{P}(C) = 0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5 + 0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5 + 0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5 = 3\cdot 0{,}125 = 0{,}375.$$

2.2.7. Формула полной вероятности. Правила сложения и умножения вероятностей могут быть обобщены, и тогда мы получим формулу полной вероятности, которая относится к следующему случаю.

Если событие A может осуществиться лишь при условии, что произошло какое-нибудь событие B_i из числа несовместимых событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, вероятности которых известны, и если, кроме того, известны условные вероятности

$$\mathbf{P}(A \mid B_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

то вероятность события A может быть подсчитана по следующей формуле полной вероятности

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(B_i)\cdot\mathbf{P}(A \mid B_i). \tag{2.2.23}$$

Пример 2.2.10. Имеется шесть партий деталей следующего состава: две партии, имеющие по 2 детали с отклонениями в плюс от номинального размера и по 6 деталей в минус (состав B_1), три партии деталей, имеющие по 2 «плюсовых» и по 8 «минусовых» деталей (состав B_2), одна партия деталей, состоящая из 8 «плюсовых» и 2 «минусовых» деталей (состав B_3). Требуется определить

вероятность того, что из одной, выбранной наудачу партии будет вынута «плюсовая» деталь (событие A).

По формуле полной вероятности имеем:

$$\mathbf{P}(A)=\mathbf{P}(B_1)\cdot\mathbf{P}(A\,|\,B_1)+\mathbf{P}(B_2)\cdot\mathbf{P}(A\,|\,B_2)+\mathbf{P}(B_3)\cdot\mathbf{P}(A\,|\,B_3)=$$
$$=\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{8}+\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{10}+\frac{1}{6}\cdot\frac{8}{10}=\frac{19}{60},$$

так как

$$\mathbf{P}(B_1)=\frac{2}{6},\quad \mathbf{P}(B_2)=\frac{3}{6}\quad\text{и}\quad \mathbf{P}(B_3)=\frac{1}{6};\qquad \mathbf{P}(A\,|\,B_1)=\frac{2}{8},$$

$$\mathbf{P}(A\,|\,B_2)=\frac{2}{10}\quad\text{и}\quad \mathbf{P}(A\,|\,B_3)=\frac{8}{10}.$$

Формула полной вероятности может быть выведена следующим образом. Так как по условию событие A может осуществиться, если только осуществится какое-нибудь одно из несовместимых событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, то это значит, что событие A подразделяется на частные случаи $AB_1, AB_2, \ldots, AB_n$ (между собой несовместимые), т. е.

$$A=\sum_{i=1}^{n}AB_i.$$

На основании правила сложения получим:

$$\mathbf{P}(A)=\mathbf{P}\Big(\sum_{i=1}^{n}AB_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(AB_i).$$

Опираясь на правило умножения, каждое из слагаемых этой суммы можно представить в виде:

$$\mathbf{P}(AB_i)=\mathbf{P}(B_i)\cdot\mathbf{P}(A\,|\,B_i).$$

Тогда окончательно получим:

$$\mathbf{P}(A)=\sum_{i=1}^{m}\mathbf{P}(B_i)\cdot\mathbf{P}(A\,|\,B_i),$$

что и требовалось.

Часто события $B_1, B_2, \ldots, B_n$, при которых только и может наступить событие A, называют *гипотезами* относительно A. Каждая гипотеза B_i сообщает A известную вероятность $\mathbf{P}(A\,|\,B_i)$. В формуле полной вероятности учитывается возможность наступления события при любой из гипотез данного круга.

2.2.8. Формула вероятностей гипотез. Пусть, как и в **2.2.7,** событие A может осуществиться тогда и только тогда, когда осуществляется какая-нибудь гипотеза B_i из числа n несовместимых гипотез $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

Тогда событие A подразделяется на частные случаи

$$A=\sum_{i=1}^{n}B_iA.$$

Безусловные вероятности гипотез $B_1, B_2, \ldots, B_n$ и условные вероятности $A\,|\,B_i$ предполагаются данными.

Если факт A наблюдался, то, естественно, возникает вопрос о том, как вероятна каждая из конкурирующих гипотез, при которых только и мог этот факт произойти.

Условная вероятность гипотезы B_i, вычисленная в предположении, что факт A имел место, определяется по формуле

$$\mathbf{P}(B_i\,|\,A)=\frac{\mathbf{P}(B_i)\cdot\mathbf{P}(A\,|\,B_i)}{\sum_{j=1}^{n}\mathbf{P}(B_j)\,\mathbf{P}(A\,|\,B_j)}\qquad(2.2.24)$$

(мы применили в знаменателе правой части индекс j только потому, что индекс i нами уже использован в левой части и в числителе).

Эта формула называется *формулой вероятностей гипотез* (*Бейеса*).

Пример 2.2.11. Имеется шесть партий деталей трех различных составов (B_1, B_2 и B_3), как это указано в условии примера 2.2.10. Пусть теперь из одной, выбранной наудачу партии взята одна деталь и она оказалась «плюсовой», т. е. факт A совершился. Требуется определить при этом условии вероятности того, что деталь вынута из партии первого состава — $\mathbf{P}(B_1|A)$, второго состава — $\mathbf{P}(B_2|A)$ и третьего состава — $\mathbf{P}(B_3|A)$.

$$\mathbf{P}(B_1|A)=\frac{\mathbf{P}(B_1)\cdot\mathbf{P}(A|B_1)}{\mathbf{P}(B_1)\cdot\mathbf{P}(A|B_1)+\mathbf{P}(B_2)\cdot\mathbf{P}(A|B_2)+\mathbf{P}(B_3)\cdot\mathbf{P}(A|B_3)}=$$

$$=\frac{\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{8}}{\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{8}+\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{10}+\frac{1}{6}\cdot\frac{8}{10}}=\frac{5}{19},$$

$$\mathbf{P}(B_2|A)=\frac{\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{10}}{\frac{19}{60}}=\frac{6}{19}$$

и

$$\mathbf{P}(B_3|A)=\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{8}{10}}{\frac{19}{60}}=\frac{8}{19}.$$

Таким образом, произошла переоценка гипотез:

если $\mathbf{P}(B_1)=\frac{1}{3}$, то $\mathbf{P}(B_1|A)=\frac{5}{19}$,

если $\mathbf{P}(B_2)=\frac{1}{2}$, то $\mathbf{P}(B_2|A)=\frac{6}{19}$

и если $\mathbf{P}(B_3)=\frac{1}{6}$, то $\mathbf{P}(B_3|A)=\frac{8}{19}$.

Формула (2.2.24) выводится так: пусть событие A может осуществиться тогда и только тогда, когда осуществляется хотя бы одно какое-нибудь событие B_i из несовместимых событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Требуется найти вероятность B_i, если известно, что A произошло.

На основании определения условной вероятности имеем:

$$\mathbf{P}(B_i|A)=\frac{\mathbf{P}(B_iA)}{\mathbf{P}(A)}=\frac{\mathbf{P}(B_i)\cdot\mathbf{P}(A|B_i)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Используя формулу полной вероятности, находим:

$$\mathbf{P}(B_i|A)=\frac{\mathbf{P}(B_i)\cdot\mathbf{P}(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n}\mathbf{P}(B_j)\,\mathbf{P}(A|B_j)},$$

что и требовалось.

§ 3. Общие принципы исчисления вероятностей

2.3.1. Ограниченность классического определения вероятности. Все изложенные нами до сих пор способы исчисления вероятностей были основаны на классическом определении вероятности.

Как уже указывалось в самом начале, классическое определение вероятности относится лишь к частному случаю, а именно к тому случаю, когда событие оказывается возможным подразделить на конечное число элементарных несовместимых исходов данного испытания.

Такая схема далеко не всегда имеет место на практике.

Более того, в большинстве практически важных случаев совсем не представляется возможным применить классическую схему равновозможных исходов в конечном числе и тем самым определить вероятность интересующих нас событий. Так дело обстоит во многих физических и естественно-научных приложениях теории вероятностей, в артиллерии, в технике и т. п. Например, не представляется возможным определенным образом наметить конечную группу элементарных равновозможных исходов при стрельбе по цели из орудия. Таким же образом обстоит дело при исследовании точности массового производства и осуществлении контроля качества продукции.

Уже простейший классический опыт с бросанием игральной кости не может быть исследован с точки зрения классического определения, если кость имеет неправильную форму — это не мешает, тем не менее, каждой из шести граней иметь определенную вероятность выпасть при бросании такой кости.

2.3.2. Общие принципы исчисления вероятностей. Классическое определение является явно неподходящим для тех случаев, когда возможные исходы испытания составляют бесконечное множество. Пусть, например, речь идет о возможных состояниях (принимаемых в результате испытания некоторой системой), которые описываются с помощью определенного числа параметров. Так, положение стрелки, вращающейся около некоторой оси, может быть охарактеризовано углом, который она образует с некоторым постоянным радиусом-вектором. Если в некотором опыте игла бросается на плоскость, разграфленную параллельными прямыми, то положение ее относительно параллелей определяется двумя параметрами: расстоянием от центра иглы до ближайшей параллели и углом θ, который игла образует с направлением параллелей (см. далее пример 2.3.2 и черт. 4). Если в другом опыте стержень ломается под действием удара в двух местах, то расстояния от левого конца стержня до точек излома его будут двумя параметрами, описывающими состояние стержня после испытания. Координаты точки попадания снаряда являются в артиллерии наиболее интересными параметрами, определяющими результат выстрела. Состояние массы газа из N молекул может быть описано, если известны $3N$ пространственных координат этих молекул и $3N$ составляющих скорости и т. д. Во всех этих случаях мы можем геометрически описывать состояния систем положением некоторой точки M, координатами которой являются значения параметров в «*пространстве параметров данной системы*».

Под пространством параметров здесь понимается «пространство» с числом измерений, равным числу параметров (которое, конечно, может быть больше трех).

Тогда область, в которой может в результате испытания находиться изображающая случайная точка, будет *областью возможных состояний системы*.

Если из области возможных состояний G выделить некоторую часть g, то попадание случайной точки в эту часть всей области G можно рассматривать как некоторое случайное событие — возможный результат испытания. Это случайное событие мы для простоты будем обозначать той же буквой g, а его вероятность $\mathbf{P}(g)$.

Для того чтобы перейти к вероятности события, необходимо вероятностную меру связать с каждой частью g области G или по крайней мере с практически важными частями ее. Заметим, что, как ясно из предыдущего, вероятностную меру нельзя отождествлять с обычной геометрической мерой, совпадающей лишь в некоторых частных случаях, о которых будет сказано далее, с вероятностной мерой.

Вопрос о том, каким образом определяется вероятностная мера частей области G, не может быть решен в общем виде, так как всецело зависит от

физической природы явления. Тем не менее, вводимая мера, или вероятность, должна быть подчинена тем же принципам, которые мы установили, рассматривая классическое определение вероятности. Таких принципов в теории вероятностей не много: они сводятся к следующим трем положениям, характеризующим «вероятностную» меру:

1. Вероятность события (т. е. мера частных областей g, лежащих в пространстве параметров) есть неотрицательное число, $0 \leqslant \mathbf{P}(g)$.

2. Вероятность достоверного события (т. е. мера всей области G) равна единице,

$$\mathbf{P}(G) = 1.$$

3. Вероятность суммы несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий $\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{s} g_i\right) = \sum_{i=1}^{s} \mathbf{P}(g_i)$ $(g_i g_k = V)$:

$$\mathbf{P}(g_1) + \mathbf{P}(g_2) + \ldots + \mathbf{P}(g_s) + \ldots = 1.$$

Этот последний принцип мы будем считать справедливым как для случая конечного числа, так и для счетного множества несовместимых событий.

Заметим, что *счетным множеством* называется такое множество, элементы которого могут быть занумерованы в некотором порядке и выписаны в последовательность 1, 2, 3, ... В качестве примеров счетных множеств можно указать: множество четных чисел, множество полных квадратов и т. д.

Таковы аксиомы меры области в нашем пространстве параметров данной системы.

В частном случае, когда система может принимать конечное число равновозможных состояний, т. е. в области G может иметь место конечное число равновероятных положений случайной точки M, мы приходим к классической схеме.

В самом деле, если всего в пространстве параметров имеется n равноправных положений E_1, E_2, ..., E_n случайной точки, составляющих в этом случае всю область G возможных положений, то согласно 2-му принципу

$$\mathbf{P}(G) = \mathbf{P}(E_1 + E_2 + \ldots + E_n) = 1.$$

С другой стороны, в силу 3-го принципа будем иметь:

$$\mathbf{P}(E_1 + E_2 + \ldots + E_n) = \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2) + \ldots + \mathbf{P}(E_n) = n\mathbf{P}(E_1) = 1,$$

так как по условию все положения E_i случайной точки равновероятны.

Отсюда $\mathbf{P}(E_1) = \frac{1}{n}$ и аналогично $\mathbf{P}(E_i) = \frac{1}{n}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Если интересующее нас событие A подразделяется на m исходов из числа всех n (т. е. мы рассматриваем часть всей области G, содержащую m определенных положений случайной точки), то

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\operatorname{mes} g}{\operatorname{mes} G} = \frac{m}{n},$$

где $\operatorname{mes} g$ и $\operatorname{mes} G$ — соответственно мера g и мера G.

В более сложном случае вероятностная мера может оказаться пропорциональной геометрической мере области.

Такой случай имеется во многих задачах на так называемые геометрические вероятности. В этих задачах рассматривается точка, брошенная так, что она может случайно совпасть с любой точкой данной области G в плоскости или пространстве.

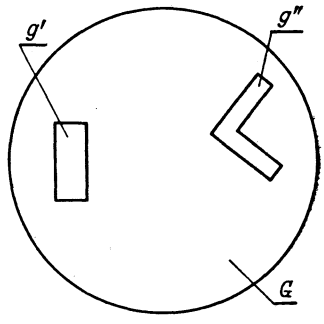
В области G выделяется ее часть g и спрашивается о вероятности попадания брошенной точки в g. При этом предполагается, что попадания брошенной точки в две части g' и g'', имеющие одинаковую площадь (или объем), равновероятны независимо от положения и формы этих областей (черт. 2). Отсюда легко прийти к заключению, что вероятностная мера каждой части g пропорциональна ее площади (или объему). Поэтому мы можем написать в данном случае

$$\mathbf{P}(g) = k \cdot \operatorname{mes} g,$$

где под $\operatorname{mes} g$ понимается мера объема, площади или длины, смотря по числу измерений рассматриваемой области, и k — коэффициент пропорциональности.

В частности, для всей области G мы должны иметь $1 = \mathbf{P}(G) = k \cdot \operatorname{mes} G$; отсюда $k = \frac{1}{\operatorname{mes} G}$ и

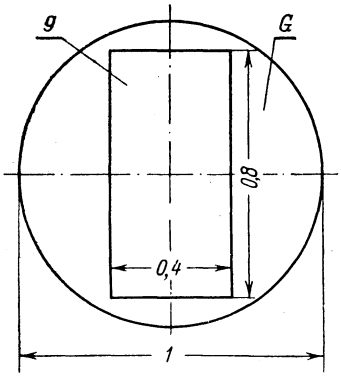
$$\mathbf{P}(g) = \frac{\operatorname{mes} g}{\operatorname{mes} G}. \qquad (2.3.1)$$



Черт. 2. Геометрические вероятности.

Таким образом, в данном случае вероятность попадания в часть g определяется отношением геометрической меры (длины, площади или объема) этой части к геометрической мере всей области G.

Пример 2.3.1. Опытом установлено, что разметчик наносит точку в пределах круга диаметра 1 *мм*, причем все положения точки в пределах круга оказываются примерно равновероятными. Требуется найти вероятность события A, заключающегося в том, что точка окажется в пределах операционного допуска $\pm 0{,}2$ *мм* по горизонтали и $\pm 0{,}4$ *мм* по вертикали (черт. 3).



Черт. 3. Вероятность выполнения технических условий при разметке.

«Пространство параметров» в данном случае будет представлять собой координатную плоскость xy. Случайная точка M здесь совпадает с точкой, наносимой разметчиком. Все возможные положения этой точки определяются кругом диаметра 1 *мм*, который и будет являться областью G, т. е. областью «возможных положений» точки.

Условия, при которых событие A совершается, в геометрической интерпретации сводятся к тому, чтобы точка оказалась в границах прямоугольника с основанием 0,4 *мм* и высотой 0,8 *мм*, который и будет являться частью g (области G), благоприятствующей появлению события A (черт. 3).

Поэтому, пользуясь формулой (2.3.1), находим:

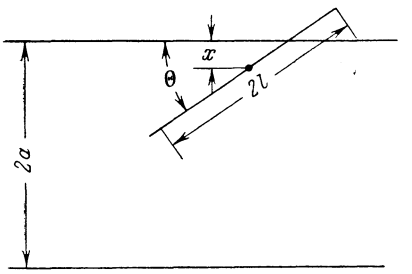
$$\mathbf{P}(A) = \frac{\operatorname{mes} g}{\operatorname{mes} G} = \frac{\text{площ. прямоуг.}}{\text{площ. круга}} = 0{,}4 \cdot 0{,}8 : \frac{\pi \cdot 1^2}{4} = \frac{0{,}32}{0{,}79} = 0{,}41.$$

Пример 2.3.2. Советскими инженерами предложен метод оценки зернистой структуры металла, основанный на использовании так называемой «задачи об игле» Бюффона.

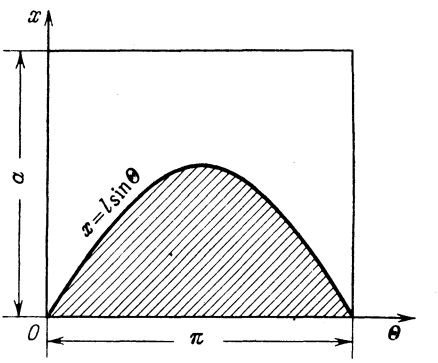
Задача эта заключается в следующем.

На плоскость нанесены параллельные прямые, отстоящие друг от друга а расстоянии $2a$. На плоскость наудачу бросается игла длиной $2l (l < a)$. ребуется найти вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь ямую.

Обозначим через x расстояние от центра иглы до ближайшей параллели и через θ — угол, составленный иглой с направлением параллелей (черт. 4). У нас имеются два параметра x и θ. Пространство параметров будет представлять координатную плоскость $x\theta$. Случайной точкой M в данном случае будет центр иглы. Всевозможные положения иглы относительно параллели определяются точками прямоугольника со сторонами a и π, так как параллель может считаться ближайшей к точке нахождения центра иглы в том лишь случае, если $x \leqslant a$. С другой стороны, угол θ между иглой и параллелью, определяющий их пересечение, изменяется от 0 до π. Поэтому прямоугольник этот будет представлять область G возможных положений точки.



Черт. 4. Пересечение иглой, бросаемой на плоскость, нанесенной на этой плоскости линии.



Черт. 5. Область возможных значений (прямоугольник) и область, благоприятствующая (заштрихованная) пересечению иглой линии.

Из черт. 4 видно, что для пересечения параллели иглой необходимо и достаточно, чтобы $x \leqslant l \sin \theta$. Поэтому в геометрической интерпретации условий, при которых событие A совершается, необходимо, чтобы точка попала в часть g всей области, ограниченную дугой синусоиды.

Искомая вероятность в силу сделанных предположений равна отношению площади, заштрихованной на черт. 5, к площади прямоугольника со сторонами a и π.

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{a\pi} \int_0^{\pi} l \sin \theta \, d\theta = \frac{2l}{a\pi}.$$

§ 4. Схема независимых испытаний и связанные с ней распределения вероятностей

2.4.1. Биномиальное распределение. Рассмотрим схему последовательных независимых испытаний, являющуюся одной из простейших и важнейших схем теории вероятностей.

Пусть производится серия последовательных испытаний, каждое из которых заканчивается одним из двух несовместимых между собой результатов: или событие A наступает или оно не наступает.

Вероятность события A не зависит от номера испытания, т. е. она остается постоянной во всей серии испытаний, причем, естественно, $\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\bar{A}) = 1$. Вместе с тем упомянутая выше независимость испытаний означает, что вероятность события A в каком-либо испытании данной серии не изменяется при условии, что результаты других испытаний становятся известными.

Эта схема впервые была рассмотрена Я. Бернулли. В этом случае в каждом испытании имеются два альтернативных исхода A и $\bar{A}$. В схеме Я. Бернулли обычно полагают

$$\mathbf{P}(A) = P_1 = p \quad \text{и} \quad \mathbf{P}(\bar{A}) = P_2 = q.$$

В данной схеме имеет место следующая закономерность.

Если вероятность события A постоянна в серии последовательных независимых испытаний и равна p, то вероятность $\mathbf{P}(s, k)$ *появления события A ровно k раз в этих s испытаниях будет*

$$\mathbf{P}(s, k) = C_s^k p^k q^{s-k} = \frac{s!}{k!\,(s-k)!}\, p^k q^{s-k}. \tag{2.4.1}$$

Поясним смысл формулы (2.4.1) на примере.

Пример 2.4.1. Пусть коэффициент использования некоторого станочного оборудования составляет 0,8. На производственном участке имеется пять таких станков. Требуется подсчитать вероятность того, что в некоторый произвольный момент времени в середине рабочей смены при нормальном ходе производства только два из них будут работать. Поскольку запуск одного станка в некоторый момент времени в этих условиях не зависит от работы других станков, причем каждый из работающих станков можно уподобить получению результата A при очередном последовательном испытании — проверке того, работает или не работает станок, то интересующая нас вероятность может быть подсчитана по формуле (2.4.1):

$$\mathbf{P}(5, 2) = C_5^2 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^{5-2} = \frac{5!}{2!\,3!}\, 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^3 \approx 0{,}05.$$

Отсюда следует, что при заданных условиях мы лишь с достаточно малой вероятностью можем встретить работу только двух станков, а, скажем, не четырех. Заметим, что действительное наблюдение событий, имеющих подобную или еще меньшую вероятность, может служить некоторым признаком уклонения от нормальных условий в самом интересующем нас процессе. Об этом будет подробно сказано в главе VI.

Выведем теперь формулу (2.4.1).

Рассмотрим серию из s независимых последовательных (повторных) испытаний, в результате каждого из которых может произойти некоторое событие A. Пусть известно, что в каждом испытании вероятность появления события A постоянна и равна p, т. е.

$$\mathbf{P}(A) = p.$$

Требуется определить вероятность того, что в s испытаниях событие A произойдет ровно k раз и, следовательно, $s-k$ раз не произойдет.

Обозначим, как обычно, через $\bar{A}$ событие, противоположное событию A, т. е. непоявление события A.

Возможные результаты испытания условимся записывать, ставя по порядку буквы A и $\bar{A}$, смотря по тому, появляется или не появляется событие A в последовательных испытаниях.

Таким образом, мы можем представить себе все возможные результаты последовательных s испытаний в виде серий чередующихся букв A и $\bar{A}$. Назовем благоприятными те серии букв A и $\bar{A}$, в которых буква A входит k раз, а буква $\bar{A}$ $s-k$ раз.

В качестве первой серии можно рассмотреть ту благоприятную комбинацию, которая соответствует предположению, что сначала событие A происходит ровно k раз, а затем $s-k$ раз подряд не происходит. Обозначим ее через E_1.

Остальные благоприятные комбинации — пусть их будет всего некоторое число l — назовем последующими и обозначим их через $E_2, E_3, \ldots, E_l$.

Вычислим вероятность получения первой комбинации. Эту комбинацию можно рассматривать как совместное наступление независимых событий, заключающееся в том, что в 1, 2, 3, ..., k-м испытании появляется событие A, а в $k+1, k+2, \ldots, s$-м испытании появляется событие $\bar{A}$.

Иными словами, событие

$$E_1 = \underbrace{AA \ldots A}_{k \text{ раз}} \cdot \underbrace{\bar{A}\bar{A} \ldots \bar{A}}_{s-k \text{ раз}}.$$

Тогда вероятность первой комбинации в силу независимости испытаний на основании правила умножения вероятностей (2.2.22) будет равна

$$\mathbf{P}(E_1) = \underbrace{pp \ldots p}_{k \text{ раз}} \underbrace{qq \ldots q}_{s-k \text{ раз}} = p^k q^{s-k}.$$

Так как в любой другой благоприятной комбинации событие A также встречается k раз и $s-k$ раз не встречается (хотя и в другом порядке), то и ее вероятность будет также равна $p^k q^{s-k}$ (произведение не меняется от изменения порядка сомножителей)

$$\mathbf{P}(E_2) = \mathbf{P}(E_3) = \ldots = \mathbf{P}(E_l) = \ldots = p^k q^{s-k} = \mathbf{P}(E_1).$$

Благоприятные комбинации (первая и все последующие) несовместимы, так как появление одной из них при s испытаниях исключает появление всех других при тех же s испытаниях. Поэтому на основании правила сложения (2.2.8) вероятность появления хотя бы одной из благоприятных комбинаций будет равна

$$\mathbf{P}(s, k) = \mathbf{P}(E_1 + E_2 + \ldots + E_l) = \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2) + \ldots + \mathbf{P}(E_l).$$

Так как вероятности всех благоприятных комбинаций равны между собой и равны $p^k q^{s-k}$, то получим:

$$\mathbf{P}(s, k) = l p^k q^{s-k}. \qquad (2.4.1')$$

Каждая благоприятная комбинация вполне определяется указанием тех k номеров испытаний (из общего числа s), в которых происходит событие A. Эта группа k номеров, очевидно, составляет одно из возможных сочетаний из s различных номеров по k (порядок номеров не имеет значения). Следовательно, число l благоприятных комбинаций будет равно C_s^k. Подставив это значение в (2 4.1′), получим (2.4.1), что и требовалось.

Если считать число s испытаний постоянным, а числу появлений события A в серии из s испытаний придавать все возможные значения, которых, очевидно, $s+1$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, s$), то вычисленные по формуле (2.4.1) вероятности для всех значений k будут равны последовательным членам разложения по формуле бинома Ньютона выражения $(p+q)^s$.

Так как $p+q=1$, то сумма этих членов разложения при любых значениях p и s будет всегда равна единице. Этот результат можно было предвидеть заранее потому, что события, заключающиеся в появлении возможных значений A, составляют полную группу.

Но такие события можно поставить в соответствие случайным величинам X_1 и X_2, представляющим: X_1 — число появлений события A в серии s испытаний и X_2 — число непоявлений его в той же серии из s испытаний. Это один из примеров распределения вероятностей случайной величины, так называемое биномиальное распределение. О нем будет более подробно сказано в дальнейшем.

Происхождение этого названия ясно из предыдущего.

Распределение случайной величины и, в частности, биномиальное распределение изображают графически следующим образом.

По оси абсцисс откладывают значения, которые данная случайная величина может принять, и в полученных таким образом точках строят ординаты, высоты которых пропорциональны вероятностям получения случайной величиной соответствующих значений.

Пример 2.4.2. Требуется на основе условий примера 2.4.1 построить график распределения вероятностей числа работающих станков (из общего их числа в пять станков).

Наша случайная величина X представляет собой число работающих станков. Очевидно, что эта случайная величина может принять значения $X=0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Вероятность одного значения, а именно $X=2$, была вычислена в примере 2.4.1, она равна $\mathbf{P}(X=2)\approx 0{,}05$.

Подсчитаем вероятности остальных значений по формуле (2.4.1):

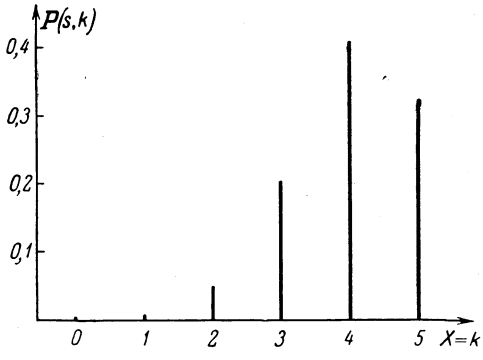
$\mathbf{P}(X=0)\approx 0$; $\mathbf{P}(X=1)\approx 0{,}01$;

$\mathbf{P}(X=3)\approx 0{,}20$; $\mathbf{P}(X=4)\approx 0{,}41$

и

$$\mathbf{P}(X=5)\approx 0{,}33.$$

Заносим их в табл. 2.4.1.



Черт. 6. График распределения вероятностей числа работающих станков из пяти станков участка (биномиальное распределение).

Таблица 2.4.1

X	0	1	2	3	4	5	Σ
$\mathbf{P}(X=k)$	0	0,01	0,05	0,20	0,41	0,33	1,0

Теперь построим график распределения вероятностей (черт. 6).

2.4.2. Вероятнейшее число появлений события. *Вероятнейшим числом* k_0 появлений события A при s последовательных независимых испытаниях называют такое число k (оно может быть не одно, их может быть два) появлений события A, которое при данном s имеет наибольшую вероятность. Это практически иногда важное число может быть найдено из таблицы вероятностей, подсчитанных по формуле (2.4.1) для данных условий, или по графику распределения вероятностей. Так, например, на черт. 6 наивероятнейшим числом k_0 работающих станков является число 4, так как оно имеет наибольшую вероятность $\mathbf{P}(X=4)\approx 0{,}41$.

Для того чтобы определить вероятнейшее число, не прибегая к расчету таблицы распределения, и вместе с тем составить представление о характере изменения вероятности $\mathbf{P}(s, k)$ при последовательных значениях k, проще всего найти отношение двух соседних членов $\mathbf{P}(s, k)$ и $\mathbf{P}(s, k-1)$. Для этого отношения получим:

$$\frac{\mathbf{P}(s,k)}{\mathbf{P}(s,k-1)}=\frac{C_s^k p^k q^{s-k}}{C_s^{k-1}p^{k-1}q^{s-k+1}}=\frac{s(s-1)\ldots(s-k+1)}{k!}\,\frac{(k-1)!}{s(s-1)\ldots(s-k+2)}\,\frac{p}{q}=$$

$$=\frac{s-k+1}{k}\,\frac{p}{q}=\frac{p}{q}\left(\frac{s+1}{k}-1\right). \qquad (2.4.2)$$

При возрастании k это отношение убывает; его наибольшее значение получается при $k=1$ и равно $\frac{\mathbf{P}(s,1)}{\mathbf{P}(s,0)}=\frac{sp}{q}$, а наименьшее получается при $k=s$ и равно $\frac{\mathbf{P}(s,s)}{\mathbf{P}(s,s-1)}=\frac{p}{sq}$.

Если наибольшее значение $\frac{sp}{q}$ меньше единицы, т. е. $s<\frac{q}{p}$, то $\mathbf{P}(s,k)<$ $<\mathbf{P}(s,k-1)$ при любом k, т. е. члены биномиального распределения убывают

от начала к концу распределения. Обратная картина будет наблюдаться, когда наименьшее отношение $\frac{p}{sq}$ больше единицы, т. е. $s < \frac{p}{q}$; в этом случае $\mathbf{P}(s, k) > \mathbf{P}(s, k-1)$ при любом k и члены бинома возрастают вместе с k. В этих двух случаях вероятнейшие значения k будут отвечать соответственно крайним членам $k_0 = 0$ и $k_0 = s$; однако они могут реализоваться лишь при ограниченных значениях s. При $k = (s+1)p$ отношение (2.4.2) равно единице, при меньших k оно больше единицы, а при больших k меньше единицы.

Если произведение $(s+1)p$ не есть целое число, то $\mathbf{P}(s, k)$ будут возрастать, когда k пробегает значения 0, 1, 2, ..., $k_0 = [(s+1)p]$, где символ $[(s+1)p]$ обозначает *целую часть* числа $(s+1)p$. При дальнейшем возрастании k от значения $k = k_0$ до $k = s$ вероятность $\mathbf{P}(s, k)$ убывает. В этом случае вероятнейшее значение k отвечает значению

$$k_0 = [(s+1)p].$$

Наконец, если $(s+1)p$ равно целому числу k_0, то $\frac{\mathbf{P}(s, k_0)}{\mathbf{P}(s, k_0-1)} = 1$; в этом случае в ряду вероятностей мы имеем два максимальных члена $\mathbf{P}(s, k_0)$ и $\mathbf{P}(s, k_0-1)$.

Заметим, что случай, когда $[(s+1)p] = 0$ реализуется при $(s+1)p < 1$, т. е. при $s < \frac{1}{p} - 1 = \frac{q}{p}$, а случай $[(s+1)p] = s$ — при $s < \frac{p}{q}$, который мы исследовали раньше. Поэтому, резюмируя, мы можем сказать, что в биномиальном распределении вероятнейшее значение k отвечает одному значению $k_0 = [(s+1)p]$, если $(s+1)p$—не целое число, или двум $k_0 = [(s+1)p]$ и k_0-1, если $(s+1)p$ есть целое число. При значениях $k < (s+1)p$ вероятности $\mathbf{P}(s, k)$ возрастают, а при $k > (s+1)p$ они убывают.

Возьмем два примера:

1) $s = 4$; $p = \frac{2}{5}$ и $(s+1)p = 2$.

Согласно предыдущему в этом случае мы имеем два вероятнейших числа: $k_0 = 2$ и $k_0 = 1$. В самом деле, пользуясь формулой (2.4.1), находим:

$$\mathbf{P}(4, 0) = \frac{81}{625}; \quad \mathbf{P}(4, 1) = \mathbf{P}(4, 2) = \frac{216}{625}; \quad \mathbf{P}(4, 3) = \frac{96}{625} \quad \text{и} \quad \mathbf{P}(4, 4) = \frac{16}{625}.$$

Мы видим, что действительно наибольшие вероятности отвечают значениям $k = 1$ и $k = 2$.

2) $s = 5$; $p = \frac{2}{5}$ и $(s+1)p = 2{,}4$.

Согласно ранее сказанному $k_0 = 2$.

Пользуясь формулой (2.4.1), в этом случае получаем:

$$\mathbf{P}(5, 0) = \frac{243}{3125}; \quad \mathbf{P}(5, 1) = \frac{810}{3125}; \quad \mathbf{P}(5, 2) = \frac{1080}{3125};$$

$$\mathbf{P}(5, 3) = \frac{720}{3125}; \quad \mathbf{P}(5, 4) = \frac{240}{3125} \quad \text{и} \quad \mathbf{P}(5, 5) = \frac{32}{3125}.$$

Таким образом, на самом деле наибольшая вероятность отвечает значению $k = 2$.

2.4.3. Распределение Пуассона. Во многих важных случаях, когда имеют дело с редко наступающими событиями, оказывается применимым для описания массового явления еще одно распределение, могущее быть поставленным в определенную связь с рассматриваемой схемой независимых испытаний. К этому распределению мы подходим следующим образом. Пусть в некоторой области T, наиболее распространенным примером которой служит просто период времени, случайным образом и независимо друг от друга появляется M «точек», каждую

из которых мы ассоциируем с появлением некоторого события A. Обозначим через a среднее число точек, появляющихся в единицу времени; тогда, очевидно,

$$M = aT.$$

Нас интересует вероятность появления ровно m точек за промежуток времени t, представляющий часть периода T, причем мы имеем основания сделать следующие допущения.

Появление M точек мы будем рассматривать как M последовательных независимых испытаний, причем вероятность каждой точке появиться в промежутке времени t равна

$$p = \frac{t}{T}.$$

Тогда на основании (2.4.1) получим для любого числа m точек:

$$\mathbf{P}(M,\ m) = C_M^m p^m q^{M-m} = \frac{M!}{m!\,(M-m)!}\,p^m q^{M-m} =$$

$$= \frac{M(M-1)\dots(M-m+1)}{m!}\left(\frac{t}{T}\right)^m\left(1-\frac{t}{T}\right)^{M-m}, \qquad (2.4.3)$$

где $q = 1 - p$.

Заменяя M через aT, будем иметь:

$$\mathbf{P}(M,\ m) = \frac{aT(aT-1)(aT-2)\dots(aT-m+1)}{m!}\left(\frac{t}{T}\right)^m\left(1-\frac{t}{T}\right)^{aT-m} =$$

$$= \frac{(aT)^m}{m!}\left(1-\frac{1}{aT}\right)\left(1-\frac{2}{aT}\right)\dots\left(1-\frac{m-1}{aT}\right)\left(\frac{t}{T}\right)^m\left(1-\frac{t}{T}\right)^{aT-m} =$$

$$= \frac{(at)^m}{m!}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{aT-m} R_T,$$

где

$$R_T = \left(1-\frac{1}{aT}\right)\left(1-\frac{2}{aT}\right)\dots\left(1-\frac{m-1}{aT}\right).$$

Если теперь T устремится к бесконечности, то R_T устремится к единице, тогда как пределом $\left(1-\frac{t}{T}\right)^{aT-m}$ при $T\to\infty$ будет e^{-at}.

Поэтому оказывается

$$\lim_{T\to\infty}\mathbf{P}(M,\ m) = \frac{(at)^m e^{-at}}{m!} = \mathbf{P}(m). \qquad (2.4.4)$$

Распределение величины X, принимающей целые значения ($m = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$) с вероятностями $\mathbf{P}(m)$ (2.4.4), называется *распределением Пуассона*.

Часто произведение at (среднее число появлений события A за время t) обозначают символом λ и тогда закону распределения Пуассона придается вид

$$\mathbf{P}_\lambda(m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}. \qquad (2.4.5)$$

Заметим, что сумма вероятностей всех значений $X = m$ будет равна единице, каково бы ни было λ. В самом деле, как известно из анализа,

$$\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{\lambda^m}{m!} = e^\lambda,$$

откуда

$$\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = 1.$$

Вычисление вероятностей по формуле (2.4.5) представляет некоторые неудобства.

Для облегчения вычислений применяются таблицы вероятностей $\mathbf{P}_\lambda(m)$.

Такой таблицей является, в частности, табл. I приложений. В ней приведены вероятности $\mathbf{P}_\lambda(m)$ для значений λ от 0,1 до 20. Значения m табл. I доведены до таких пределов, вероятность превышения которых ничтожно мала. Поэтому сумма вероятностей чисел m, отвечающих приведенным в табл. I значениям m, практически равна единице. Табл. I будет нами использоваться далее при решении соответствующих примеров.

Часто при решении задач, наряду с вероятностью $\mathbf{P}_\lambda(m)$, требуется определять еще интегральную вероятность

$$\mathbf{P}_\lambda(m \geqslant k) = \sum_{m=k}^{m=\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \tag{2.4.6}$$

т. е. вероятность того, что событие A произойдет не менее k раз.

Эти вероятности приведены в табл. II приложений для значений λ от 0,1 до 20 и для таких значений k, для которых интегральные вероятности (2.4.6) не менее $1 \cdot 10^{-5}$. Примером явлений, следующих закону Пуассона, могут служить: радиоактивный распад, телефонные соединения, станки, требующие экстренного ремонта, и т. д.

Пусть, например, среднее число вызовов дежурной бригады ремонтников на некоторый производственный участок составляет 600 за год при двухсменной работе при 300 рабочих днях в году, причем условия распределения Пуассона предполагаются выполненными. Требуется подсчитать вероятность двух вызовов ремонтников на данный участок за одну и ту же смену.

Общая продолжительность работы участка за год (считая продолжительность смены $t = 8$ часов) составляет:

$$T = 300 \cdot 16 = 4800 \text{ часов.}$$

Среднее число вызовов в час равно

$$a = \frac{M}{T} = \frac{600}{4800} = \frac{1}{8}.$$

Тогда

$$\lambda = at = \frac{1}{8} 8 = 1,$$

и по формуле (2.4.5) мы получаем:

$$\mathbf{P}_1(2) = \frac{1^2 \cdot e^{-1}}{2!} = \frac{1}{2 \cdot 2{,}72} \approx 0{,}184.$$

Приведем еще два примера.

Пример 2.4.3. Пусть требуется определить вероятность попадания за пределы контрольных границ не менее 2 деталей из пробы в 5 деталей, если автомат, из продукции которого берутся пробы, обрабатывает 2 детали в минуту и за смену в его продукции оказывается 38 деталей, выходящих по своим размерам за контрольные границы. Предполагается возможным использовать закон Пуассона.

В среднем в одну минуту за пределами контрольных границ оказывается

$$a = \frac{38}{480} \approx 0{,}08 \text{ детали.}$$

Промежуток времени, за который будет обработана на автомате проба, равен

$$t = \frac{5}{2} = 2{,}5 \text{ мин.}, \quad \lambda = at = 0{,}08 \cdot 2{,}5 = 0{,}2.$$

Тогда по формуле (2.4.5) получаем:

$$\mathbf{P}_{0,2}(m) = \frac{0{,}2^m e^{-0,2}}{m!}.$$

Искомая вероятность представляет собой интегральную вероятность, т. е. сумму вида

$$\sum_{m=2}^{5} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}.$$

По табл. II приложений при $\lambda = 0{,}2$ и $k = 2$ находим:

$$\sum_{m=2}^{5} \frac{0{,}2^m e^{-0{,}2}}{m!} = 1{,}7523 \cdot 10^{-2} = 0{,}0175.$$

Формула Пуассона может быть использована как приближенная в условиях схемы независимых испытаний, как это видно из (2.4.3) и (2.4.4), когда точное распределение бывает биномиальным. Переход к распределению Пуассона в этом случае значительно упрощает вычисления. Такой переход бывает законным всякий раз, когда при большом числе испытаний s вероятность p появления события A бывает порядка малости $\frac{1}{s}$ или $p \leqslant 0{,}1$ (т. е. событие редко появляется), однако среднее число появлений за длинную серию испытаний, равное

$$\lambda = sp,$$

не мало, но и не велико. В табл. 2.4.2 даются сравнения значений вероятностей, вычисленных по формулам (2.4.5) при $\lambda = 1$ и (2.4.1) при $s = 100$ и $p = \frac{1}{100}$. Сравнение показывает, что приближение является достаточно хорошим.

Таблица 2.4.2

k	$\mathbf{P}(100, k)$	$\mathbf{P}_1(k)$
0	0,366032	0,367879
1	0,369730	0,367879
2	0,184865	0,183940
5	0,002898	0,003066
9	0,000001	0,000001

Пример 2.4.4. Пусть при приемочном контроле из партии в 1000 штук изделий производится безвозвратная выборка объема 50 штук и требуется определить вероятность того, что в выборке не окажется дефектных изделий, если во всей партии содержится 4 дефектных изделия. Точное значение этой вероятности определяется по формуле (2.2.7) в виде

$$\mathbf{P}_{1000,4}(50,\ 0) = \frac{C_{996}^{50}}{C_{1000}^{50}} = \frac{996!\ 50!\ 950!}{50!\ 946!\ 1000!} = \frac{950 \cdot 949 \cdot 948 \cdot 947}{1000 \cdot 999 \cdot 998 \cdot 997} = 0{,}814.$$

Вычисление по этой формуле довольно громоздко.

Приближенное значение искомой вероятности можно получить по формуле (2.4.5) Пуассона. Здесь $a = \frac{4}{1000} = 0{,}004$, $t = 50$ и $\lambda = 0{,}004 \cdot 50 = 0{,}2$, поэтому

$$\mathbf{P}_{1000,4}(50,\ 0) \approx \mathbf{P}_{\lambda}(0) = \frac{0{,}2^0 \cdot e^{-0{,}2}}{0!} = 0{,}819.$$

Вероятность эту мы берем по табл. I приложений при $\lambda = 0{,}2$ и $k = 0$.

Ошибка при пользовании асимптотической формулой (2.4.5) в нашем примере составила около 0,6%. Ошибка всегда получается небольшой, когда p одного порядка с $\frac{1}{s}$. В нашем примере $p = \frac{4}{1000} = 0{,}004$, а $\frac{1}{s} = \frac{1}{50} = 0{,}020$, т. е. являются величинами одного порядка.

При аналогичном условии ($\frac{K}{S} = p$ — мало, менее 0,1, sp — ни мало, ни велико) формула Пуассона может быть использована для приближенного вычисления вероятностей гипергеометрического распределения (см. пример 3.1.1).

Еще одна интерпретация закона Пуассона будет дана в специальной части этой книги в связи с теорией вероятностных процессов.

2.4.4. Уточнение формулы Пуассона. Формула (2.4.5) Пуассона в случае биномиального распределения, как мы указывали в **2.4.3**, дает достаточно точные результаты при сравнительно больших s и малых p; в противном случае вычисление по этой формуле приводит к значительной погрешности. Чтобы получить более точное приближение, можно использовать «уточненную» формулу Пуассона, предложенную А. Н. Колмогоровым. Вероятность $\mathbf{P}_\lambda(m)$ появления события m раз ($m \geqslant 2$) в этом случае определяется следующим приближенным равенством:

$$\mathbf{P}_\lambda(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} - \frac{b}{2}\frac{\lambda^{m-2}e^{-\lambda}}{(m-2)!}\left(\frac{\lambda^2}{(m-1)\,m} - \frac{2\lambda}{m-1} + 1\right). \qquad (2.4.7)$$

Эта формула применима и в тех случаях, когда вероятности появления события A в отдельных независимых между собой испытаниях различны, изменяясь по величине от испытания к испытанию. При этом, обозначая через p_i вероятность появления события A в i-м по порядку испытании, полагаем:

$$\lambda = p_1 + p_2 + \ldots + p_s,$$
$$b = p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_s^2.$$

В частном случае, когда

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_s = p,$$

имеем:

$$\lambda = sp \quad \text{и} \quad b = sp^2.$$

Вычисление вероятностей значительно упрощается при $m < 2$. Так, например, при $m = 1$ будем иметь:

$$\mathbf{P}_\lambda(1) = e^{-\lambda}\left(\lambda - \frac{b(\lambda - 2)}{2}\right)$$

и при $m = 0$

$$\mathbf{P}_\lambda(0) = e^{-\lambda}\left(1 - \frac{b}{2}\right).$$

Пусть теперь для примера $s = 5$, $p = 0{,}3$. Тогда

$$\lambda = sp = 5 \cdot 0{,}3 = 1{,}5 \quad \text{и} \quad b = 5 \cdot 0{,}3^2 = 0{,}45.$$

Обозначим через $\mathbf{P}_m$ вероятность, вычисленную по формуле (2.4.1), через $\mathbf{P}'_m$ — вероятность, вычисленную по формуле (2.4.5), и через $\mathbf{P}''_m$ — вероятность, вычисленную по формуле (2.4.7).

Результаты вычислений сведены в табл. 2.4.3.

Таблица 2.4.3

m	$\mathbf{P}_m$	$\mathbf{P}'_m$	$\mathbf{P}_m - \mathbf{P}'_m$	$\mathbf{P}_m - \mathbf{P}'_m$ в % к $\mathbf{P}_m$	$\mathbf{P}''_m$	$\mathbf{P}_m - \mathbf{P}''_m$	$\mathbf{P}_m - \mathbf{P}''_m$ в % к $\mathbf{P}_m$
0	0,16807	0,22313	— 0,05506	— 32,8	0,17293	— 0,00486	— 2,9
1	0,36015	0,33470	+ 0,02545	+ 7,1	0,35980	+ 0,00035	+ 0,1
2	0,30870	0,25102	+ 0,05768	+ 18,7	0,29495	+ 0,01375	+ 4,5
3	0,13230	0,12551	+ 0,00679	+ 5,1	0,13492	— 0,00267	— 2,0
4	0,02835	0,04707	— 0,01872	— 66,0	0,03648	— 0,00813	— 28,7
5	0,00243	0,01412	— 0,01169	— 481,1	0,00388	— 0,00145	— 59,7

Из табл. 2.4.3 видно, что при пользовании формулой (2.4.7) погрешность получается в 2,5 ÷ 70 раз меньшей, чем при пользовании асимптотической формулой (2.4.5).

ГЛАВА III

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

§ 1. Законы распределения случайных величин

3.1.1. Распределение дискретной случайной величины. В начале II главы мы уже упоминали о случайной величине как о переменной, могущей принять в результате испытания то или иное числовое значение в зависимости от случайного исхода испытания. Теперь мы из различных типов случайных величин выделим:

1) дискретные случайные величины и

2) непрерывные случайные величины.

Дискретными случайными величинами называются такие, которые могут принимать лишь конечное или счетное множество значений. В машиностроении чаще всего встречаются простейшие из дискретных величин, могущие принимать лишь изолированные, большей частью целочисленные значения и не могущие принимать значения, промежуточные между ними.

Непрерывные случайные величины в отличие от дискретных величин могут принимать любые значения в границах известного интервала.

В качестве примеров дискретных случайных величин из области техники можно, в частности, привести следующие:

1) число деталей, выходящих по своим размерам за контрольные границы, в пробе из n штук при статистическом методе контроля качества продукции;

2) число испытаний с определенным эффектом при проведении эксперимента (разрушение образца и т. п.).

Весьма часто мы приходим к случайным величинам следующим образом. Пусть мы рассматриваем испытание с некоторой полной группой S' элементарных и несовместимых исходов E так, что каждое событие может быть представлено как сумма некоторых из этих исходов. Пусть теперь каждому элементарному исходу поставлено в соответствие число X, другими словами, на множестве S' определена функция $X(E)$ случайного события.

Эта функция и будет случайной величиной.

Так, например, если мы из партии деталей в S штук, среди которых K деталей имеют отклонения в плюс от номинального размера, производим безвозвратную выборку в s штук, то в каждом испытании у нас может быть C_S^s элементарных равновероятных и несовместимых исходов (C_S^s — число сочетаний из S элементов по s), как это мы видели при рассмотрении задачи о статистической безвозвратной выборке.

Если теперь каждому элементарному исходу E поставить в соответствие число X «плюсовых» деталей, оказавшихся в выборке, то, очевидно, мы получим функцию $X(E)$ от случайного события (исхода).

Заметим, что для каждого значения $X = 0, 1, 2, \ldots, s$ этой случайной величины мы ранее подсчитали вероятность его получения при условиях выборки. Именно $\mathbf{P}(X=k) = \dfrac{C_K^k C_{S-K}^{s-k}}{C_S^s}$.

Точно так же мы могли поставить в соответствие каждому элементарному исходу E не число X «плюсовых» деталей, а какое-нибудь другое число, например, число $Y = s - k$ «минусовых» деталей и т. п. Тогда мы имели бы другую случайную величину Y, также являющуюся функцией исходов нашего испытания.

Для того чтобы задать дискретную случайную величину, нужно задать последовательность всех ее возможных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и вероятности $P_1, P_2, \ldots, P_n$ того, что она будет принимать эти значения, т. е. вероятности событий $X = k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Она может быть задана, например, таблицей распределения вероятностей в виде (табл. 3.1.1):

Таблица 3.1.1

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	
$\mathbf{P}(X = x_i)$	$\mathbf{P}(x_1)$	$\mathbf{P}(x_2)$	$\ldots$	$\mathbf{P}(x_n)$	$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(x_i) = 1$

Сумма вероятностей всех значений случайной величины равна 1, так как события $X = k$ представляют полную группу несовместимых событий, а сумма вероятностей всех событий, между которыми распределились элементарные исходы нашего основного множества, как мы видели ранее, равна единице. Мы можем представить сейчас наглядно распределение вероятностей случайной величины X как распределение некоторой массы, равной единице, в точках оси x с абсциссами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причем в этих точках соответственно помещены массы, равные $P_1, P_2, \ldots, P_n$, в сумме составляющие единицу.

Зная таблицу распределения, легко подсчитать, какова вероятность попадания величины в любые заданные границы, какова вероятность ее значений, не превышающих заданный предел, и т. п.

Обозначим, например, через X число появлений события A в s последовательных, независимых испытаниях, производимых по схеме Я. Бернулли, т. е. при постоянной в каждом испытании вероятности p.

Тогда X будет дискретной случайной величиной, принимающей значения $0, 1, 2, \ldots, x, \ldots, s$; при этом

$$\mathbf{P}(X = x) = \mathbf{P}(x) = \mathbf{P}(s, x) = C_s^x p^x q^{s-x}.$$

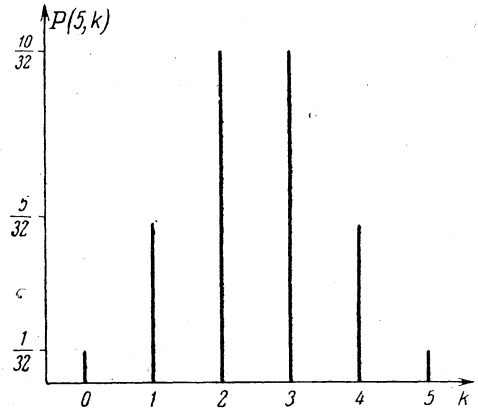
При такой зависимости $\mathbf{P}(x)$ от x говорят, что случайная величина имеет *биномиальное распределение*.

Легко убедиться, что сумма вероятностей всех возможных в каждом испытании значений случайной величины X равна единице. Например, если $s = 5$ и $p = \frac{1}{2}$, то может быть составлена следующая таблица распределения вероятностей (табл. 3.1.2):

Таблица 3.1.2

$X = x$	0	1	2	3	4	5	
$\mathbf{P}(x)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(x_i) = \frac{32}{32} = 1$

График распределения вероятностей для данных условий будет иметь вид, показанный на черт. 7; s и p — параметры данного распределения, т. е. постоянные для данных условий величины; следовательно, биномиальное распределение является двухпараметрическим.



Черт. 7. График распределения вероятностей дискретной случайной величины, имеющей биномиальное распределение $\left(p=\frac{1}{2},\ s=5\right)$.

Пример 3.1.1. Обозначим теперь через X число «плюсовых» деталей в безвозвратной выборке объема (т. е. численностью) 10 штук из партии в 200 штук деталей, из которых 26 штук «плюсовых».

Тогда X будет дискретной случайной величиной, принимающей значения 0, 1, 2, ..., 10 с вероятностями, подсчитываемыми по формуле

$$\mathbf{P}_{200,\ 26}(10,\ k)=\frac{C_{26}^{k}C_{174}^{10-k}}{C_{200}^{1}}.$$

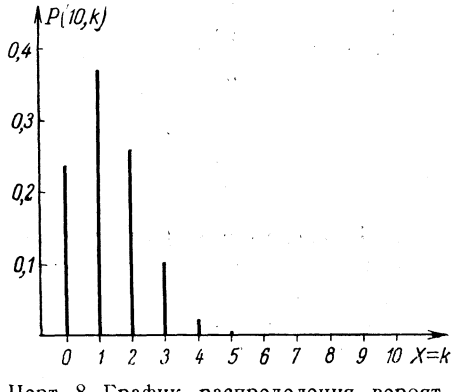
При такой зависимости $\mathbf{P}(x)$ от $x=k$ говорят, что случайная величина имеет *гипергеометрическое* распределение.

Таблица распределения вероятностей для данных условий будет иметь вид (табл. 3.1.3):

Таблица 3.1.3

$X=k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathbf{P}(k)$	0,24	0,38	0,26	0,10	0,02	0	0	0	0	0	0

График распределения вероятностей для этих же условий будет иметь вид, показанный на черт. 8. s, p, S — параметры данного распределения. Следовательно, гипергеометрическое распределение зависит от трех параметров.



Черт. 8. График распределения вероятностей дискретной случайной величины, имеющей гипергеометрическое распределение ($p=0{,}13$; $s=10$; $S=200$).

Пример 3.1.2. Пусть случайная величина X принимает значения

$$m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

с вероятностями $\mathbf{P}(X=m)$

$$\mathbf{P}(X=m)=\frac{\lambda^{m}e^{-\lambda}}{m!}\quad(m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

где λ — положительное число.

Распределение, задаваемое указанной формулой, носит название *распределения Пуассона или распределения редких событий*. Этому распределению следует, в частности, как мы уже упоминали, радиоактивный распад.

Пусть, например, нам требуется подсчитать в условиях примера 3.1.1 вероятность того, что в выборке из 10 штук будет не больше двух «плюсовых» деталей. Эту вероятность мы легко находим, используя табл. 3.1.3 распределения; она равна $\mathbf{P}(X\leqslant 2)=0{,}24+0{,}38+0{,}26=0{,}88$.

Если произвести длинную серию из N независимых испытаний, в каждом из которых величина X принимает одно из возможных для нее значений, и подсчитать затем частости $w_1 = \frac{k_1}{N}$, $w_2 = \frac{k_2}{N}$, ..., $w_n = \frac{k_n}{N}$ реализовавшихся при этих испытаниях значений x_1, x_2, ..., x_n, то мы получим эмпирическую таблицу распределений частостей, аналогичную табл. 3.1.1 распределения вероятностей. По свойству вероятностей таблица частостей будет приближенно воспроизводить распределение вероятностей с тем большей точностью, чем большее число испытаний было произведено.

Так, например, в известном опыте Розерфорда, Чедвика и Эллиса радиоактивное вещество наблюдали в течение $N = 2608$ промежутков времени, каждый длиной в 7,5 сек., и для каждого интервала регистрировали число частиц, достигших счетчика. В табл. 3.1.4 приведены во втором столбце результаты этих наблюдений, в третьем столбце — отвечающие им частости, а в четвертом — вероятности, подсчитанные по формуле Пуассона, причем параметр λ, представляющий среднее число частиц за промежуток времени $t = 7{,}5$ сек., был равен

$$\lambda = \frac{10\,094}{2608} = 3{,}870,$$

где 10 094 — общее число частиц. Мы видим, что, действительно, здесь частости лишь незначительно отличаются от вероятностей; это становится понятным, если принять во внимание значительное число наблюдений (2608).

Таблица 3.1.4

Радиоактивный распад

Число частиц, достигших счетчика	Число наблюдений, в которых такое число частиц имело место	Частость данного числа частиц	Вероятность
0	57	0,022	0,021
1	203	0,078	0,081
2	383	0,147	0,156
3	525	0,201	0,201
4	532	0,204	0,195
5	408	0,156	0,151
6	273	0,105	0,097
7	139	0,053	0,054
8	45	0,017	0,026
9	27	0,010	0,011
$m \geqslant 10$	16	0,006	0,007
Итого	2608	0,999	1,000

3.1.2. Непрерывные случайные величины. Интегральная функция распределения и плотность вероятности. Квантили. Кроме рассмотренных нами дискретных случайных величин, определяемых таблицей распределения, на практике обычно встречаются еще такие случайные величины, которые могут принимать любые значения в некотором интервале. Эти величины, как мы уже упоминали, называются *непрерывными*.

К числу непрерывных случайных величин относятся, например, следующие:

1) отклонения размеров деталей от номинального размера;

2) высота микропрофиля в данной точке поверхности;

3) погрешности измерения и т. п.

При описании распределения всякой непрерывной случайной величины мы сталкиваемся прежде всего с тем затруднением, что выписать в последовательность и занумеровать все ее значения, хотя бы лежащие в весьма узком интер-

вале, мы не можем. В наблюдениях же на практике такой величины, вследствие ограниченной точности измерений, мы получаем результат, в сущности указывающий лишь границы некоторого более или менее узкого интервала, внутри которого содержится ее значение.

Таким образом, в задании самой величины всегда имеется доля неопределенности: так, например, вряд ли имеет реальный смысл различать отклонения от номинального размера $+0{,}05$ *мм* и $+0{,}050007$ *мм*.

Получаемые в результате многократных измерений непрерывной величины таблицы распределения обычно указывают частости попадания величины в смежные интервалы, на которые мы разбиваем весь диапазон ее измерения. Примером такой таблицы может служить следующая сводка данных о размерах обработанных на токарном автомате втулок (табл. 3.1.5).

Таблица 3.1.5

Интервалы в *мм*	Частота	Частость
7,897—7,899	1	0,003
7,899—7,901	3	0,008
7,901—7,903	6	0,017
7,903—7,905	27	0,075
7,905—7,907	35	0,097
7,907—7,909	48	0,133
7,909—7,911	68	0,189
7,911—7,913	68	0,189
7,913—7,915	33	0,092
7,915—7,917	36	0,100
7,917—7,919	27	0,075
7,919—7,921	5	0,014
7,921—7,923	3	0,008
Итого	360	1,000

Подобный прием мы можем использовать при любом непрерывном распределении. Однако такое табличное описание предполагает уже выбор определенной системы интервалов, что в известной степени зависит от нашего усмотрения и от точности измерений. Для того чтобы избежать этих затруднений в описании случайных величин, при их теоретическом изучении, мы вводим новое понятие — понятие *функции распределения*. Пусть x — какое-нибудь действительное число, а X — случайная величина. Рассмотрим событие $X < x$. Пусть ему в нашем поле событий отвечает вероятность $\mathbf{P}(X < x)$, являющаяся, очевидно, функцией x. Полагая

$$F(x) = \mathbf{P}(X < x), \tag{3.1.1}$$

называют функцию $F(x)$ *функцией распределения* вероятностей случайной величины или *интегральной функцией распределения*.

Таким образом, *интегральная функция распределения определяет вероятность того, что случайная величина X при испытании примет значение, меньшее произвольно изменяемого действительного числа x ($-\infty < x < \infty$).*

Случайную величину мы будем считать заданной, если известна ее функция распределения.

Если величина дискретна и задана таблицей распределения вида 3.1.1, то функцию $\mathbf{P}(X < x) = F(x)$ легко определить для каждого значения x, а именно $F(x)$ в этом случае представится суммой вероятностей тех значений X, которые лежат влево от точки x.

Рассмотрим свойства введенной нами функции распределения. Возьмем на оси абсцисс произвольную точку с абсциссой x_1.

Ордината интегральной кривой распределения в данной точке x_1 представляет собой вероятность случайного события, заключающегося в том, что значение случайной величины X при испытании окажется меньше x_1, т. е.

$$F(x_1) = \mathbf{P}(X < x_1).$$

Отсюда следует, что ордината на графике интегральной кривой всегда неотрицательна (как всякая вероятность), т. е.

$$F(x) \geqslant 0. \tag{3.1.2}$$

Так как вероятность не может быть больше единицы, то

$$0 \leqslant F(x) \leqslant 1. \tag{3.1.3}$$

Возьмем теперь на оси абсцисс вторую точку с абсциссой $x_2 (x_2 > x_1)$. Ордината интегральной кривой в точке x_2 аналогично предыдущему будет

$$F(x_2) = \mathbf{P}(X < x_2).$$

Найдем вероятность того, что случайная величина X при испытании окажется в границах от x_1 до x_2 (включая x_1 и исключая x_2), т. е. вероятность $\mathbf{P}(x_1 \leqslant X < x_2)$.

Очевидно, что событие $X < x_2$ подразделяется на два частных случая: $X < x_1$ и $x_1 \leqslant X < x_2$.

Тогда на основании правила сложения вероятностей получим:

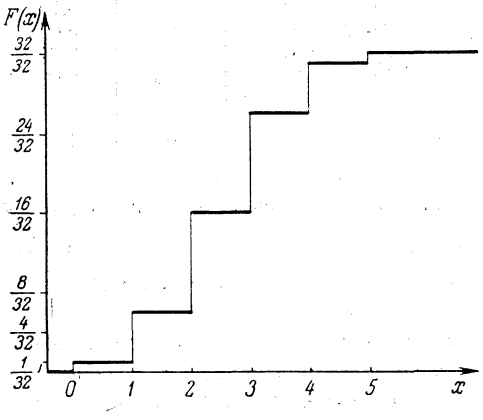
$$\mathbf{P}(X < x_2) = \mathbf{P}(X < x_1) + \mathbf{P}(x_1 \leqslant X < x_2),$$

откуда

$$\mathbf{P}(x_1 \leqslant X < x_2) = \mathbf{P}(X < x_2) - \mathbf{P}(X < x_1) = F(x_2) - F(x_1), \qquad (3.1.4)$$

т. е. вероятность того, что случайная величина X при испытании окажется в границах от x_1 до x_2 равна приращению интегральной функции распределения на этом участке, а так как вероятность неотрицательна, то $F(x)$ будет неубывающей функцией.

Заметим теперь, что в том случае, когда все возможные значения величины X лежат на каком-либо отрезке (a, b), то мы будем иметь, очевидно, равенства $F(x) = 0$ при $x \leqslant a$ и $F(x) = 1$ при $x > b$, так как, с одной стороны, значения X, меньшие a, невозможны и, с другой стороны, достоверно, что все значения X не больше b.



Черт. 9. График интегральной функции распределения дискретной случайной величины, следующей биномиальному закону.

В общем случае, когда величина может быть неограниченной, мы будем иметь следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} F(-\infty) &= \lim_{n\to\infty} F(-n) = 0, \\ F(+\infty) &= \lim_{n\to\infty} F(n) = 1. \end{aligned}\right\} \qquad (3.1.5)$$

Таким образом, предельное значение функции распределения при $x = -\infty$ равно нулю, а при $x = +\infty$ равно единице.

В случае дискретной величины вероятность $\mathbf{P}(X < x) = F(x)$ увеличивается скачками всякий раз, когда x при своем изменении проходит через одно из возможных значений x_k величины X. Между двумя соседними значениями величины X функция $F(x)$ постоянна. Поэтому графиком функции $F(x)$ в этом случае будет ступенчатая кривая вида, указанного на черт. 9.

Этот график отвечает табл. 3.1.2 распределения вероятностей. Случайная величина X здесь может принимать шесть дискретных значений: 0, 1, 2, 3, 4 и 5. Ординаты кривой функции $F(x)$ в этих точках скачками возрастают на величины соответствующих вероятностей, т. е. на $\frac{1}{32}, \frac{5}{32}, \frac{10}{32}, \frac{10}{32}, \frac{5}{32}$ и $\frac{1}{32}$.

В практически важных случаях интегральная функция распределения непрерывной величины будет дифференцируемой функцией. График интегральной функции в этом случае не будет иметь скачков и представляет монотонно возрастающую кривую, имеющую касательную в каждой точке (черт. 10).

Возьмем на оси произвольные точки x_0 и $x_0 + \Delta x$. Ординаты функции в этих точках будут $F(x_0)$ и $F(x_0 + \Delta x)$.

Для приращения функции $F(x)$ на участке от x_0 до $x_0+\Delta x$ согласно (3.1.4) имеем:

$$F(x_0+\Delta x)-F(x_0)=\mathbf{P}(x_0\leqslant X<x_0+\Delta x).$$

Если представим теперь, что Δx стремится к нулю, то разность $F(x_0+\Delta x)-F(x)_0$ также будет стремиться к нулю ($F(x)$ непрерывна в точке x_0) и в силу очевидного неравенства

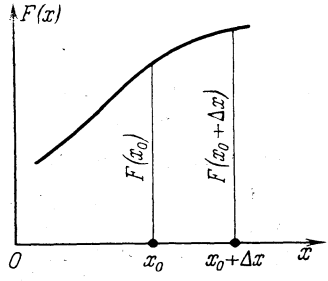
$$0\leqslant\mathbf{P}(X=x_0)<\mathbf{P}(x_0\leqslant X<x_0+\Delta x)$$

будем иметь:

$$\mathbf{P}(X=x_0)=0. \qquad (3.1.6)$$

Таким образом, вероятность того, что непрерывная случайная величина X при испытании окажется в точности равной произвольному действительному числу x_0, равна нулю.

Это обстоятельство связано с тем, что при непрерывных распределениях, как мы видим, имеет физический смысл рассматривать вероятности не отдельных значений величины, а лишь вероятности попадания ее в любые заданные (хотя теоретически и сколь угодно узкие) границы.



Черт. 10. График интегральной функции распределения непрерывной случайной величины.

На основании равенств (3.1.4) и (3.1.6) вероятность попадания в интервал будет

$$\mathbf{P}(a\leqslant X<b)=\mathbf{P}(a<X<b)=\mathbf{P}(a\leqslant X\leqslant b)=F(b)-F(a). \qquad (3.1.4')$$

Первая производная от интегральной функции называется *дифференциальной функцией распределения* или *плотностью вероятности*. Условимся обозначать ее через $\varphi(x)$.

По определению производной имеем:

$$\varphi(x)=F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$

и на основании равенства (3.1.4') будем иметь:

$$\varphi(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathbf{P}(x\leqslant X<x+\Delta x)}{\Delta x}. \qquad (3.1.7)$$

Из (3.1.7) следует, что *плотность вероятности $\varphi(x)$ есть предел отношения вероятности того, что случайная величина X при испытании примет значение, лежащее в границах от x до $x+\Delta x$, к величине интервала Δx, когда величина Δx стремится к нулю.*

Происхождение термина «плотность вероятности» делается понятным, если учесть наглядное представление распределения вероятностей случайной величины X в виде массы, равной единице, расположенной некоторым непрерывным образом вдоль оси x.

Так как $F(x)$ является первообразной функцией по отношению к $\varphi(x)$, то по формуле Ньютона-Лейбница, принимая во внимание формулу (3.1.4'), будем иметь:

$$\mathbf{P}(a\leqslant X\leqslant b)=F(b)-F(a)=\int_a^b F'(x)\,dx=\int_a^b\varphi(x)\,dx. \qquad (3.1.8)$$

Таким образом, вероятность того, что случайная величина X при испытании примет значение, лежащее в границах от a до b, равна определенному интегралу в пределах от a до b от плотности вероятности.

Очевидно, что на графике дифференциальной кривой распределения (плотности вероятности) вероятность $\mathbf{P}(a\leqslant X<b)$ будет представлять площадь

криволинейной трапеции с основанием от a до b, ограниченную сверху дифференциальной кривой распределения, как это следует из геометрической интерпретации определенного интеграла.

Из формулы (3.1.7) следует также, что при малом Δx

$$\Delta F(x) \approx \varphi(x)\,dx = dF(x)$$

и

$$\varphi(x)\,dx \approx \mathbf{P}(x \leqslant X < x + \Delta x). \tag{3.1.9}$$

Заметим, что плотность вероятности $\varphi(x)$ вовсе не представляет вероятности значения x. Размерность плотности вероятности является обратной размерности самой случайной величины X. Например, если случайная величина X задана в *мм*, то плотность вероятности будет иметь размерность $\frac{1}{мм}$.

Но из формулы (3.1.9) следует, что произведение $\varphi(x)\Delta x$ с точностью до бесконечно малых высшего порядка относительно Δx представляет вероятность попадания величины X в интервал $(x,\ x+\Delta x)$.

Из формулы (3.1.7) следует, что плотность вероятности $\varphi(x)$ неотрицательна, так как она представляет предел отношения неотрицательной величины $\mathbf{P}(x \leqslant X < x + \Delta x)$ к существенно положительной величине Δx. Итак,

$$\varphi(x) \geqslant 0. \tag{3.1.10}$$

Из формул (3.1.8) и (3.1.5) следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = F(+\infty) - F(-\infty) = 1, \tag{3.1.11}$$

т. е. на графике дифференциальной функции распределения вся площадь, ограниченная осью абсцисс и дифференциальной кривой распределения, равна единице.

Из формул (3.1.1) и (3.1.8) следует также, что

$$F(x) = \mathbf{P}(X < x) = \mathbf{P}(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)\,dx. \tag{3.1.12}$$

Другими словами, интегральная функция распределения равна определенному интегралу от $-\infty$ до x от плотности вероятности, т. е. площади под кривой $\varphi(x)$ на этом участке оси x. Таким образом, знание функции $\varphi(x)$ равносильно знанию самой интегральной функции распределения $F(x)$.

Заметим еще, что

$$\mathbf{P}(X \geqslant x_0) = 1 - F(x_0) = 1 - \int_{-\infty}^{x_0} \varphi(x)\,dx = \int_{x_0}^{\infty} \varphi(x)\,dx. \tag{3.1.13}$$

Таким образом, площадь под кривой $\varphi(x)$ справа от ординаты $y_0 = \varphi(x_0)$ изображает вероятность превзойти заданный предел x_0.

Вообще для произвольного множества A (например, для совокупности интервалов оси x) вероятность попадания в это множество в результате испытания выразится как интеграл по этому множеству

$$\int_A \varphi(x)\,dx.$$

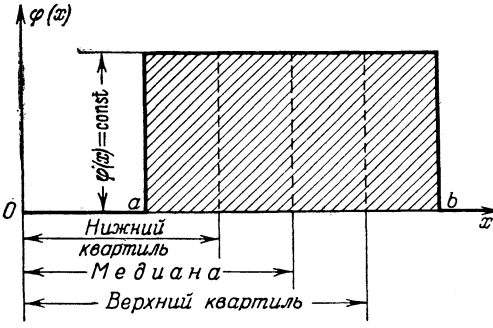
Всякий раз, когда вероятность попадания величины X на произвольное множество (из достаточно широкого класса) определена, говорят, что задан *закон распределения* этой величины.

Для дискретной величины для задания закона распределения достаточно знать ее таблицу распределения. Для непрерывных величин закон распределения обычно задают с помощью плотности вероятности или функции распределения.

Поэтому плотность вероятности называют еще *дифференциальным законом распределения*, а функцию распределения — *интегральным законом распределения*.

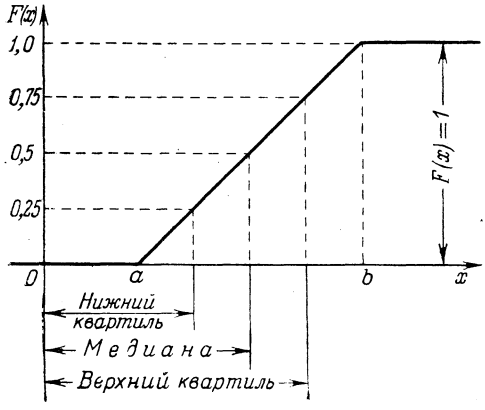
При описании непрерывного распределения часто используют еще так называемые *квантили*. Квантилем, отвечающим заданному уровню вероятности p, называют такое значение $x = x_p$, при котором функция распределения принимает значение, равное p, т. е.

$$F(x_p) = p. \qquad (3.1.14)$$



Черт. 11. График дифференциальной кривой распределения (плотности вероятности) величины, распределенной по закону равной вероятности.

Некоторые квантили получили особые названия. Так, например, *медианой* распределения называют квантиль, отвечающий значению $p = \frac{1}{2}$; квантили, соответствующие значениям $p = \frac{1}{4}$ и $p = \frac{3}{4}$, называются *нижним и верхним квартилями*. Если положить $p = 0{,}90$; 0,95 и т. д., то получим соответственно 90%, 95% и т. д. квантили. Эти квантили иногда называют также соответственно 10%, 5% и т. д. «верхними» точками данного распределения. Аналогично квантили, отвечающие значениям $p = 0{,}10$; 0,05 и т. д., называют 10%, 5% и т. д. «нижними» точками распределения. Зная значения достаточного числа квантилей, мы можем легко представить себе ход возрастания функции распределения.



Черт. 12. График интегральной кривой равномерного распределения.

Приведем несколько примеров.

Пример 3.1.3. Погрешности от округления до ближайшего целого деления при измерениях партии изделий подчиняются *закону равной вероятности* (равномерного распределения). Такое название носит закон распределения в том случае, когда плотность вероятности в данном отрезке (a, b) постоянна и равна нулю вне его.

График плотности вероятности для этого закона показан на черт. 11. Здесь случайная величина может принимать значения в пределах от a до b. Область, в которой возможны значения погрешности от округления, совпадает с интервалом $-0{,}5 \div +0{,}5$ цены деления измерительного инструмента. Постоянное значение плотности вероятности на отрезке (a, b) легко определить.

Из (3.1.11) следует, что площадь прямоугольника с основанием $b - a$ и высотой $\varphi(x) = c$ должна быть равна единице, т. е.

$$(b - a) \cdot c = 1,$$

откуда

$$\varphi(x) = c = \frac{1}{b - a}. \qquad (3.1.15)$$

Кроме того,

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{при} \quad x < a \quad \text{и при} \quad x > b.$$

График ингегральной кривой равномерного распределения имеет вид, показанный на черт. 12.

Медиана равномерного распределения равна

$$a+\frac{b-a}{2}=\frac{a+b}{2},$$

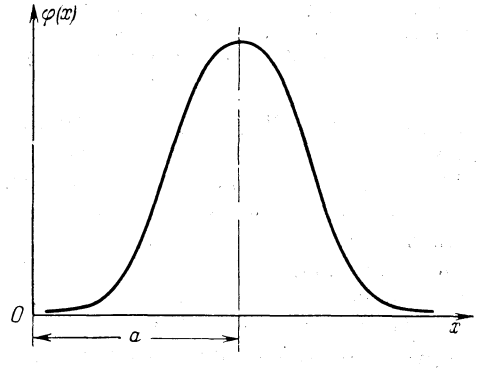
нижний квартиль $a+\frac{b-a}{4}$; верхний квартиль $a+\frac{3(b-a)}{4}$.

Пример 3.1.4. Погрешности обработки при работе по методу автоматического получения размеров в большинстве случаев следуют *нормальному закону распределения*, плотность вероятности для которого выражается формулой

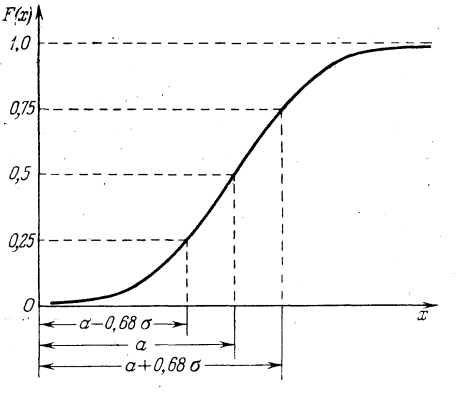
$$\varphi(x)=n(x;\ a,\ \sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (3.1.16)$$

где a и σ — постоянные числа (параметры).

График дифференциальной кривой (плотности вероятности) при нормальном законе распределения имеет вид, показанный на черт. 13.



Черт. 13. График дифференциальной кривой (плотности вероятности) нормального распределения.



Черт. 14. График интегральной функции нормального распределения.

График интегральной кривой нормального распределения представлен на черт. 14. Медиана его равна a; нижний квартиль равен $a-0{,}68\,\sigma$, верхний равен $a+0{,}68\,\sigma$.

Этот закон будет подробно рассмотрен ниже.

§ 2. Двумерные случайные величины

3.2.1. Дискретная двумерная величина и ее условные законы распределения. До сих пор мы рассматривали одномерные случайные величины, т. е. такие величины, каждое значение которых определяется только одним числом, таковы диаметральный размер, высота микронеровностей и т. п.

В различных приложениях теории вероятностей, кроме одномерных случайных величин, рассматриваются еще двумерные, трехмерные и вообще многомерные величины, представляющие системы соответственно из двух, трех или многих случайных величин.

Простейшим примером двумерной величины может быть случайная точка на плоскости, скажем, наносимая при разметке; трехмерной величиной является, например, пространственная ошибка механизма.

Уже в простейшем случае, когда нас интересует одновременно несколько размеров детали, обрабатываемой на станке, мы встречаемся с многомерной величиной, число измерений которой равно числу контролируемых размеров

детали. Ниже будет дан пример, в котором двумерной величиной является система, образованная отклонением от номинального размера и овальностью втулок.

Каждую двумерную случайную величину (X, Y) можно рассматривать как случайный вектор с компонентами X и Y или точку плоскости со случайными координатами X и Y.

Дискретная двумерная величина в простейшем случае может быть задана в виде двумерной таблицы распределения (табл. 3.2.1).

Таблица 3.2.1

Y \ X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n	
y_1	$\mathbf{P}(x_1, y_1)$	$\mathbf{P}(x_2, y_1)$	$\cdots$	$\mathbf{P}(x_i, y_1)$	$\cdots$	$\mathbf{P}(x_n, y_1)$	$\mathbf{P}(y_1)$
y_2	$\mathbf{P}(x_1, y_2)$	$\mathbf{P}(x_2, y_2)$	$\cdots$	$\mathbf{P}(x_i, y_2)$	$\cdots$	$\mathbf{P}(x_n, y_2)$	$\mathbf{P}(y_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_j	$\mathbf{P}(x_1, y_j)$	$\mathbf{P}(x_2, y_j)$	$\cdots$	$\mathbf{P}(x_i, y_j)$	$\cdots$	$\mathbf{P}(x_n, y_j)$	$\mathbf{P}(y_j)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_m	$\mathbf{P}(x_1, y_m)$	$\mathbf{P}(x_2, y_m)$	$\cdots$	$\mathbf{P}(x_i, y_m)$	$\cdots$	$\mathbf{P}(x_n, y_m)$	$\mathbf{P}(y_m)$
	$\mathbf{P}(x_1)$	$\mathbf{P}(x_2)$	$\cdots$	$\mathbf{P}(x_i)$	$\cdots$	$\mathbf{P}(x_n)$	

В табл. 3.2.1 вероятность $\mathbf{P}(x_i, y_j)$ $(i = 1,2, \ldots, n;\ j = 1,2, \ldots, m)$ представляет вероятность того, что случайная величина X примет значение x_i и одновременно с этим случайная величина Y примет значение y_j. Эти вероятности определяют двумерное распределение величин X и Y или, как иногда говорят, двумерное рассеивание.

Из того, что все возможные комбинации

$$(X = x_i;\quad Y = y_j)$$

составляют полную группу событий, следует, что

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mathbf{P}(x_i, y_j) = 1. \tag{3.2.1}$$

Но в системе двух величин мы можем рассматривать каждую из них в отдельности, не учитывая одновременной вариации другой величины. Тогда нашему рассмотрению будут подвергнуты соответствующие одномерные распределения каждой из величин X и Y. При этом распределение величины X будет задаваться, как обычно, значениями $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с соответствующими им вероятностями $\mathbf{P}(x_1), \mathbf{P}(x_2), \ldots, \mathbf{P}(x_n)$, а распределение величины Y — значениями $y_1, y_2, \ldots, y_m$ с вероятностями $\mathbf{P}(y_1), \mathbf{P}(y_2), \ldots, \mathbf{P}(y_m)$. Здесь $\mathbf{P}(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ представляет вероятность того, что случайная величина X примет значение x_i, каково бы ни было при этом значение величины Y. Легко заметить, что вероятность $\mathbf{P}(x_i)$ может быть получена путем суммирования всех тех вероятностей двумерной таблицы, которые расположены в i-м столбце, т. е.

$$\sum_{j=1}^{m} \mathbf{P}(x_i, y_j) = \mathbf{P}(x_i) \tag{3.2.2}$$

и аналогично

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(x_i, y_j) = \mathbf{P}(y_j).$$

В двумерных распределениях мы встречаемся еще с вероятностями вида $\mathbf{P}(x_i | y_j)$ — это есть условная вероятность события $X = x_i$, вычисленная в предположении, что событие $Y = y_j$ наступило.

Как мы видели в **2.2.5**, условные вероятности $\mathbf{P}(x_i | y_j)$ и $\mathbf{P}(y_j | x_i)$ могут быть выражены следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{P}(x_i | y_j) &= \frac{\mathbf{P}(x_i, y_j)}{\mathbf{P}(y_j)}, \\ \mathbf{P}(y_j | x_i) &= \frac{\mathbf{P}(x_i, y_j)}{\mathbf{P}(x_i)}. \end{aligned}\right\} \tag{3.2.3}$$

Совокупность условных вероятностей $\mathbf{P}(y_j | x_i)$, отвечающих всем возможным значениям случайной величины Y при данном значении величины $X = x_i$, называется *условным законом распределения величины* Y.

При этом мы всегда имеем равенство

$$\sum_{j=1}^{m} \mathbf{P}(y_j | x_i) = 1, \tag{3.2.4}$$

так как достоверно, что при данном значении $X = x_i$ величина Y примет одно из возможных значений $y_1, y_2, \ldots, y_m$.

Аналогично этому

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(x_i | y_j) = 1. \tag{3.2.5}$$

Таким образом, каждому значению величины $X = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ отвечает свой условный закон распределения величины Y. Существо зависимости между величинами X и Y находит отражение именно в изменении условных законов распределения величины Y с переходом от одного значения величины X к другому ее значению. Если условные законы распределения величины Y неизменны при всех значениях величины X, то они совпадают с безусловным распределением этой величины, таким образом, при любых i и j

$$\mathbf{P}(y_j | x_i) = \mathbf{P}(y_j).$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{P}(x_i, y_j) = \mathbf{P}(x_i)\,\mathbf{P}(y_j | x_i) = \mathbf{P}(x_i)\,\mathbf{P}(y_j), \tag{3.2.6}$$

т. е. вероятности, стоящие в клетках двумерной табл. 3.2.1, при этом представляют произведения вероятностей соответствующих значений каждой из величин в отдельности.

Из (3.2.6), кроме того, имеем:

$$\mathbf{P}(x_i | y_j) = \frac{\mathbf{P}(x_i, y_j)}{\mathbf{P}(y_j)} = \mathbf{P}(x_i).$$

Таким образом, условный закон распределения величины X также оказывается независимым от Y. В этом случае величины X и Y являются *независимыми* друг от друга.

В общем случае из (3.2.3) следует, что

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{P}(x_i, y_j) &= \mathbf{P}(y_j) \cdot \mathbf{P}(x_i | y_j), \\ \mathbf{P}(x_i, y_j) &= \mathbf{P}(x_i) \cdot \mathbf{P}(y_j | x_i). \end{aligned}\right\} \tag{3.2.7}$$

Суммируя $\mathbf{P}(x_i, y_j)$ по всем значениям величины Y (т. е. производя суммирование по j при фиксированном значении i) и используя второе равенство (3.2.7), получим:

$$\sum_{j=1}^{m} \mathbf{P}(x_i, y_j) = \mathbf{P}(x_i) \sum_{j=1}^{m} \mathbf{P}(y_j \mid x_i) \tag{3.2.8}$$

и ввиду (3.2.4)

$$\sum_{j=1}^{m} \mathbf{P}(x_i, y_j) = \mathbf{P}(x_i).$$

Аналогично этому

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(x_i, y_j) = \mathbf{P}(y_j),$$

т. е. мы пришли к (3.2.2).

Мы видим, что двумерное распределение, заданное табл. 3.2.1, однозначно определяет каждое из одномерных распределений рассматриваемых в отдельности величин X и Y.

Пример 3.2.1. Изготавливаемые в цехе втулки сортируются с помощью контрольно-сортировочных устройств по отклонению их внутреннего диаметра от номинального размера на четыре группы со значениями

0,01; 0,02; 0,03 и 0,04 *мм*

и по овальности на четыре группы со значениями

0,002; 0,004; 0,006 и 0,008 *мм*.

На основании длительного опыта установлено, что при настройке отделочного станка на середину допуска изготовленные втулки следующим образом распределяются по их отклонениям и овальности:

Таблица 3.2.2

Овальность	Отклонения				
	$x_1 = 0{,}01$	$x_2 = 0{,}02$	$x_3 = 0{,}03$	$x_4 = 0{,}04$	
$y_4 = 0{,}008$	$\mathbf{P}(x_1,y_4) = 0{,}02$	$\mathbf{P}(x_2,y_4) = 0{,}04$	$\mathbf{P}(x_3,y_4) = 0{,}03$	$\mathbf{P}(x_4,y_4) = 0{,}02$	$\sum_x \mathbf{P}(x_i, y_4) = \mathbf{P}(y_4) = 0{,}11$
$y_3 = 0{,}006$	$\mathbf{P}(x_1,y_3) = 0{,}04$	$\mathbf{P}(x_2,y_3) = 0{,}10$	$\mathbf{P}(x_3,y_3) = 0{,}08$	$\mathbf{P}(x_4,y_3) = 0{,}08$	$\sum_x \mathbf{P}(x_i,y_3) = \mathbf{P}(y_3) = 0{,}30$
$y_2 = 0{,}004$	$\mathbf{P}(x_1,y_2) = 0{,}03$	$\mathbf{P}(x_2,y_2) = 0{,}24$	$\mathbf{P}(x_3,y_2) = 0{,}15$	$\mathbf{P}(x_4,y_2) = 0{,}06$	$\sum_x \mathbf{P}(x_i,y_2) = \mathbf{P}(y_2) = 0{,}48$
$y_1 = 0{,}002$	$\mathbf{P}(x_1,y_1) = 0{,}01$	$\mathbf{P}(x_2,y_1) = 0{,}02$	$\mathbf{P}(x_3,y_1) = 0{,}04$	$\mathbf{P}(x_4,y_1) = 0{,}04$	$\sum_x \mathbf{P}(x_i,y_1) = \mathbf{P}(y_1) = 0{,}11$
	$\sum_y \mathbf{P}(x_1,y_j) = \mathbf{P}(x_1) = 0{,}10$	$\sum_y \mathbf{P}(x_2,y_j) = \mathbf{P}(x_2) = 0{,}40$	$\sum_y \mathbf{P}(x_3,y_j) = \mathbf{P}(x_3) = 0{,}30$	$\sum_y \mathbf{P}(x_4,y_j) = \mathbf{P}(x_4) = 0{,}20$	$\sum_x \sum_y \mathbf{P}(x_i,y_j) = 1{,}00$

Из двумерной табл. 3.2.2 распределения величины X — отклонения от номинального размера — и Y — овальности деталей — можно непосредственно

получить каждое из одномерных распределений рассматриваемых в отдельности величин X и Y.

Так, беря нижнюю строчку двумерной табл. 3.2.2, мы получаем распределение величины X и, беря крайнюю правую колонку, получаем распределение величины Y.

Таблица 3.2.3

Отклонения X	0,01	0,02	0,03	0,04	Σ
Вероятность $\mathbf{P}(x)$	0,1	0,4	0,3	0,2	1,0
Овальность Y	0,008	0,006	0,004	0,002	Σ
Вероятность $\mathbf{P}(y)$	0,11	0,30	0,48	0,11	1,0

Зная вероятности $\mathbf{P}(x, y)$ двумерного распределения и вероятности $\mathbf{P}(x)$ и $\mathbf{P}(y)$ одномерных распределений X и Y, легко по формулам (3.2.3) получить условные распределения величин X и Y.

Таблица 3.2.4

		$x_1 = 0{,}01$		$x_2 = 0{,}02$		$x_3 = 0{,}03$		$x_4 = 0{,}04$		$\sum_x \mathbf{P}(x \mid y)$
			$\mathbf{P}(y \mid x_1)$		$\mathbf{P}(y \mid x_2)$		$\mathbf{P}(y \mid x_3)$		$\mathbf{P}(y \mid x_4)$	
$y_4 = 0{,}008$	$\mathbf{P}(x \mid y_4)$	$\frac{2}{11}$		$\frac{4}{11}$		$\frac{3}{11}$		$\frac{2}{11}$		$\frac{11}{11} = 1$
			$\frac{2}{10}$		$\frac{4}{40}$		$\frac{3}{30}$		$\frac{2}{20}$	
$y_3 = 0{,}006$	$\mathbf{P}(x \mid y_3)$	$\frac{4}{30}$		$\frac{10}{30}$		$\frac{8}{30}$		$\frac{8}{30}$		$\frac{30}{20} = 1$
			$\frac{4}{10}$		$\frac{10}{40}$		$\frac{8}{30}$		$\frac{8}{20}$	
$y_2 = 0{,}004$	$\mathbf{P}(x \mid y_2)$	$\frac{3}{48}$		$\frac{24}{48}$		$\frac{15}{48}$		$\frac{6}{48}$		$\frac{48}{48} = 1$
			$\frac{3}{10}$		$\frac{24}{40}$		$\frac{15}{30}$		$\frac{6}{20}$	
$y_1 = 0{,}002$	$\mathbf{P}(x \mid y_1)$	$\frac{1}{11}$		$\frac{2}{11}$		$\frac{4}{11}$		$\frac{4}{11}$		$\frac{11}{11} = 1$
			$\frac{1}{10}$		$\frac{2}{40}$		$\frac{4}{30}$		$\frac{4}{20}$	
	$\sum_y \mathbf{P}(y \mid x)$		$\frac{10}{10} = 1$		$\frac{40}{40} = 1$		$\frac{30}{30} = 1$		$\frac{20}{20} = 1$	

В таблице условных вероятностей 3.2.4, например, $\mathbf{P}(x_2 \mid y_4)$ означает вероятность того, что втулка, имеющая овальность в 0,008 *мм*, будет иметь вместе с тем отклонение от номинального размера в 0,02 *мм*. Эта вероятность равна $\frac{4}{11}$. Следовательно, можно ожидать, что в достаточно большой партии $\frac{4}{11}$

от общего числа втулок, имеющих овальность в 0,008 *мм*, будет иметь отклонение в 0,02 *мм*.

Вероятность $\mathbf{P}(x_2 \mid y_4)$ получена следующим образом:

$$\mathbf{P}(x_2 \mid y_4) = \frac{\mathbf{P}(x_2, y_4)}{\mathbf{P}(y_4)} = \frac{0{,}04}{0{,}11} = \frac{4}{11}.$$

Соотношения (3.2.2), (3.2.6), (3.2.7) и (3.2.8) проверяются по числам двумерной табл. 3.2.2 и табл. 3.2.4 условных вероятностей.

В частности:

$$\sum_y \mathbf{P}(x_2, y) = 0{,}4, \quad \sum_y \mathbf{P}(y)\,\mathbf{P}(x_2 \mid y) = 0{,}4 \quad \text{и} \quad \mathbf{P}(x_2) = 0{,}4.$$

Случайные величины X и Y в данном случае мы не можем считать независимыми, потому что

$$\mathbf{P}(X = x,\ Y = y) \neq \mathbf{P}(X = x) \cdot \mathbf{P}(Y = y).$$

Так, например, $\mathbf{P}(x_2, y_3) = 0{,}1$; $\mathbf{P}(x_2) = 0{,}4$ и $\mathbf{P}(y_3) = 0{,}3$; $\mathbf{P}(x_2)\ \mathbf{P}(y_3) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12$, откуда $0{,}1 = \mathbf{P}(x_2, y_3) \neq \mathbf{P}(x_2) \cdot \mathbf{P}(y_3) = 0{,}12$.

Обнаруженная нами связь между случайными величинами X и Y по распределениям их вероятностей носит название *вероятностной* или *стохастической связи*. В дальнейшем мы рассмотрим способы оценки тесноты и формы этой связи.

3.2.2. Непрерывные двумерные величины, их функции распределения и плотности вероятности. Непрерывная двумерная случайная величина задается своей функцией распределения $F(x, y)$, которая по аналогии с одномерным случаем определяется равенством

$$F(x, y) = \mathbf{P}(X < x, \quad Y < y). \tag{3.2.9}$$

Точно так же по аналогии с одномерным случаем вводится понятие о двумерной плотности вероятности.

Плотность вероятности непрерывного двумерного распределения $\varphi(x, y)$ представляет такую неотрицательную функцию, интегрируя которую по какой-либо области G в плоскости xy, мы найдем вероятность случайной точке $Q(X, Y)$, изображающей значение двумерной величины, попасть в эту область:

$$\mathbf{P}[Q(X, Y) \subset G] = \iint_G \varphi(x, y)\, dx\, dy. \tag{3.2.10}$$

Мы будем считать эту функцию определенной во всей плоскости xy, полагая ее равной нулю в тех частях плоскости, в которые случайная точка $Q(X, Y)$ попасть не может.

Интегральная функция распределения двумерной случайной величины может быть выражена через плотность вероятности этой величины совершенно аналогично тому, как это имеет место для одномерной случайной величины, а именно:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} \varphi(x, y)\, dx\, dy. \tag{3.2.11}$$

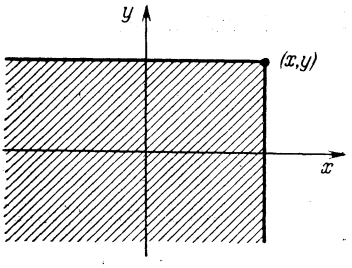
Таким образом, $F(x, y)$ есть вероятность того, что случайная точка $Q(X, Y)$ попадет на часть плоскости, заштрихованной на черт. 15.

Плотность вероятности $\varphi(x, y)$ при двумерном распределении определяет так называемую поверхность распределения $z = \varphi(x, y)$, имеющую аналогичный смысл с кривой распределения для одномерной случайной величины. Объем в пространстве (x, y, z), ограниченный поверхностью распределения и коорди-

натной плоскостью (x, y), представляет вероятность нахождения случайной точки $Q(X, Y)$ в пределах всей координатной плоскости и поэтому равен единице, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x, y)\,dx\,dy = 1. \tag{3.2.12}$$

Если мы в формуле (3.2.11) положим $y=\infty$, т. е. проинтегрируем по всей оси y (что аналогично суммированию по всем значениям этой величины при дискретном распределении), то получим, естественно:



Черт. 15. Геометрическая интерпретация непрерывной двумерной случайной величины.

$$F(x, \infty) = \int_{-\infty}^{x} dx \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x, y)\,dy = \mathbf{P}(X < x) = F_1(x) \tag{3.2.13}$$

и аналогично

$$F_2(y) = F(\infty, y) = \mathbf{P}(Y < y),$$

где $F_1(x)$ и $F_2(y)$ — функции одномерных распределений величин X и Y.

Понятие независимости случайных величин получает при этом простое и достаточно общее выражение.

Случайные величины X, Y и Z называются *независимыми*, если имеет место равенство

$$\mathbf{P}(X < x;\ Y < y;\ Z < z) = \mathbf{P}(X < x)\cdot\mathbf{P}(Y < y)\cdot\mathbf{P}(Z < z), \tag{3.2.14}$$

откуда следует

$$F(x, y, z) = F_1(x)\cdot F_2(y)\cdot F_3(z), \tag{3.2.15}$$

т. е. *случайные величины X, Y и Z называются независимыми в том случае, когда функция распределения системы этих трех величин равна произведению функций распределения каждой из этих величин в отдельности.*

Для плотности $\varphi(x, y, z)$ трехмерной величины в случае независимости имеем следующее равенство:

$$\varphi(x, y, z) = \varphi_1(x)\cdot\varphi_2(y)\cdot\varphi_3(z), \tag{3.2.16}$$

аналогичное (3.2.15).

Для непрерывных величин мы имеем соотношения, аналогичные тем, которые имеют место для дискретных величин, а именно:

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x, y)\,dy &= \varphi_1(x),\\ \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x, y)\,dx &= \varphi_2(y),\end{aligned}\right\} \tag{3.2.17}$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(y)$ — одномерные плотности вероятности соответственно величин X и Y.

При непрерывных распределениях величин X и Y, так же как и при дискретных, мы встречаемся с понятиями условных распределений, которые определяются совершенно аналогично. При этом мы используем вместо вероятности $\mathbf{P}(x, y)$ двумерную плотность $\varphi(x, y)$.

Для условной плотности вероятности Y при данном x и аналогично условной плотности вероятности X при данном y по определению имеем:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(y \mid x) &= \frac{\varphi(x, y)}{\varphi_1(x)}, \\ \varphi(x \mid y) &= \frac{\varphi(x, y)}{\varphi_2(y)}. \end{aligned}\right\} \tag{3.2.18}$$

Эти формулы вполне аналогичны формулам (3.2.3) для дискретного случая; смысл их легко обнаружить, если записать, например, первое равенство (3.2.18) в следующем виде:

$$\varphi(y \mid x)\, dy = \frac{\varphi(x, y)\, dx\, dy}{\varphi_1(x)\, dx},$$

и заметить, что числитель в правой части эквивалентен при малых dx и dy вероятности

$$\mathbf{P}\begin{pmatrix} x < X < x + dx \\ y < Y < y + dy \end{pmatrix}$$

совместного выполнения неравенств $x < X < x + dx$ и $y < Y < y + dy$, а знаменатель эквивалентен вероятности

$$\mathbf{P}(x < X < x + dx).$$

Таким образом, отношение, стоящее в правой части при малых dx и dy, действительно можно рассматривать как главную часть условной вероятности

$$\mathbf{P}(y < Y < y + dy \mid x < X < x + dx).$$

Разделив это выражение на dy и переходя к пределу, мы и получим

$$\varphi(y \mid x),$$

которую естественно рассматривать как условную плотность распределения Y при фиксированном значении $X = x$. Из (3.2.18) легко видеть, что

$$\varphi(y \mid x) \geqslant 0 \tag{3.2.19}$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y \mid x)\, dy = 1. \tag{3.2.20}$$

Следовательно, $\varphi(y \mid x)$ удовлетворяет всем обычным требованиям к функциям, описывающим плотность распределения.

Аналогичное утверждение справедливо и для $\varphi(x \mid y)$.

§ 3. Числовые характеристики положения центра группирования

3.3.1. Математическое ожидание (среднее значение). Рассмотренные в предыдущих параграфах законы распределения наиболее полно характеризуют случайные величины, так как указывают, какие значения (или из каких интервалов) может принимать соответствующая случайная величина и каковы вероятности этих значений. Однако в ряде случаев для выполнения инженерных расчетов о случайной величине требуется знать гораздо меньше, а именно:

1) Знать примерное расположение того сравнительно узкого интервала значений, в котором находится основная масса вероятности случайной величины, иначе говоря, знать некоторое «среднее» из значений случайной величины, вокруг которого группируются остальные значения, т. е. знать положение «центра группирования» на числовой оси.

Наличие такого «центра группирования» в распределении многих случайных величин вытекает из самого характера явления рассеивания. Так, например, отдельные результаты измерений, проведенных одним инструментом одного объекта

в одинаковых условиях, обнаруживают рассеивание под действием случайных погрешностей измерения, группируясь около истинного значения измеряемого объекта как центра.

Точки поражения выстрелами, естественно, будут группироваться около центра цели. Размеры отдельных деталей будут группироваться около того размера, на который настроен станок, и т. п.

2) Знать, как разбросана масса вероятности около центра группирования, иными словами, знать, каково рассеивание массы вероятности относительно некоторого центра, т. е. знать числовую характеристику рассеивания.

Из самого назначения числовой характеристики положения центра группирования следует, что она может быть построена различными способами. И действительно, существует не одна, а несколько более или менее равноправных таких числовых характеристик, имеющих одинаковое назначение, но различное построение и как следствие последнего различные свойства.

Наиболее часто употребляются в технике следующие числовые характеристики положения центра группирования:

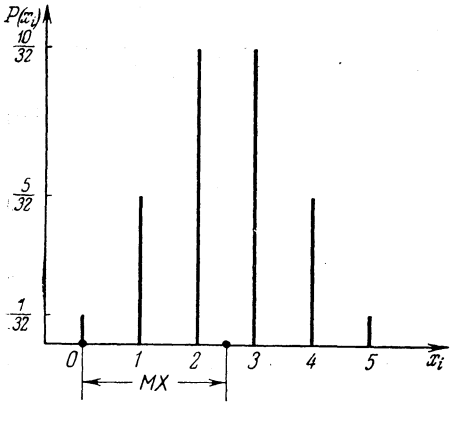
1) *математическое ожидание или среднее значение* случайной величины X, обозначаемое символом $\mathbf{M}X$,

2) *медиана* случайной величины X, обозначаемая символом M_eX, и

3) *мода* случайной величины X, обозначаемая символом M_oX.

Здесь у нас идет речь о теоретических или вероятностных (стохастических) числовых характеристиках, основанных на распределении массы вероятности случайной величины, которое мы будем считать установленным.

Заметим, что каждой теоретической (вероятностной) числовой характеристике может быть поставлена в соответствие аналогичная и иногда имеющая такое же название эмпирическая (статистическая) характеристика, представляющая приближенную оценку по данным наблюдения соответствующей теоретической характеристики, точное значение которой, вообще говоря, остается при этом неизвестным. Подобно тому, как для случайных событий вероятность $\mathbf{P}(A)$ рассматривалась как постоянное число, около которого колеблются получаемые непосредственно из наблюдений частоты $\mathbf{W}(A)$, так и теоретические числовые характеристики величин следует рассматривать как постоянные для данных условий числа (параметры), около которых колеблются надлежащим образом построенные статистические характеристики центра группирования (средняя арифметическая, эмпирическая медиана, эмпирическая мода).



Черт. 16. Математическое ожидание дискретной случайной величины.

Вопрос об оценке теоретических характеристик по данным наблюдения будет рассмотрен в дальнейшем. Сказанное относится в равной мере как к характеристикам положения центра группирования, так и к характеристикам рассеивания.

Перейдем теперь к рассмотрению *математического ожидания* или *среднего значения*.

Ранее мы указывали на возможность наглядного представления вероятности случайной величины в виде массы, равной единице, распределенной некоторым образом на числовой оси в тех местах, где случайная величина X может принимать при испытании свои значения.

На графике (черт. 16) показано распределение вероятностей дискретной случайной величины X, представляющей собой, например, число появлений отсче-

тов в плюс при пяти повторных арретированиях наконечника оптиметра. Эти вероятности были приведены в табл. 3.1.2.

Величина X принимает шесть дискретных значений 0, 1, 2, 3, 4 и 5. Ординаты в этих точках на графике (черт. 16) пропорциональны сосредоточенным в них массам. Так, в точке $x_1 = 0$ сосредоточена $\frac{1}{32}$ всей массы вероятности, т. е. $\mathbf{P}(0) = \frac{1}{32}$; в точке $x_2 = 1$ сосредоточено $\frac{5}{32}$, т. е. $\mathbf{P}(1) = \frac{5}{32}$ и т. д. В таком случае естественно поставить вопрос о положении центра тяжести данного распределения массы по числовой оси.

Известно, что абсцисса центра тяжести в данном случае может быть найдена весьма просто путем подсчета средневзвешенного арифметического абсцисс данных точек (заметим, что «взвешивание» значений величины означает умножение каждого значения на его «вес» — вероятность с последующим делением суммы таких произведений на сумму «весов», т. е. сумму вероятностей).

$$\mathbf{M}X = \frac{\frac{1}{32}\cdot 0 + \frac{5}{32}\cdot 1 + \frac{10}{32}\cdot 2 + \frac{10}{32}\cdot 3 + \frac{5}{32}\cdot 4 + \frac{1}{32}\cdot 5}{\frac{1}{32} + \frac{5}{32} + \frac{10}{32} + \frac{10}{32} + \frac{5}{32} + \frac{1}{32}} = \frac{\frac{80}{32}}{\frac{32}{32}} = 2{,}5.$$

Таким образом, центр тяжести данного распределения массы расположен в точке, абсцисса которой равна 2,5. Эта абсцисса и будет математическим ожиданием (средним значением) данной случайной величины X.

В общем виде математическое ожидание дискретной случайной величины X может быть выражено следующей формулой:

$$\mathbf{M}X = \frac{\mathbf{P}(x_1)\,x_1 + \mathbf{P}(x_2)\,x_2 + \ldots + \mathbf{P}(x_n)\,x_n}{\mathbf{P}(x_1) + \mathbf{P}(x_2) + \ldots + \mathbf{P}(x_n)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{P}(x_i)\,x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{P}(x_i)}.$$

Так как сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{P}(x_i)$ всегда равна единице (это есть сумма вероятностей событий, составляющих полную группу), то окончательно получим:

$$\mathbf{M}X = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{P}(x_i). \qquad (3.3.1)$$

Таким образом, *математическое ожидание (среднее значение) дискретной случайной величины X при конечном числе n ее возможных значений есть сумма произведений каждого из этих значений на его вероятность.* Оно представляет абсциссу центра тяжести распределения «масс» вероятностей отдельных значений случайной величины или взвешенную по вероятностям среднюю арифметическую из возможных значений случайной величины.

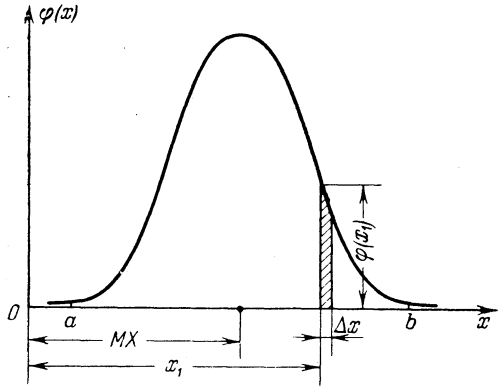
Если возможные значения дискретной случайной величины составляют счетное множество, т. е. множество это может быть выписано в последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, в которой каждый элемент получает свой номер (как это, например, имеет место в ранее приводившемся распределении Пуассона), то *математическое ожидание* равно сумме

$$\mathbf{M}X = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \mathbf{P}(x_n), \qquad (3.3.2)$$

причем предполагается, что этот ряд сходится абсолютно.

Математическое ожидание непрерывной случайной величины определяется аналогично.

Обратимся к графику плотности вероятности случайной величины X (черт. 17). График этот наглядно выражает непрерывное распределение массы вероятности по числовой оси x. Разделим эту ось на элементарные отрезки $(x, x+\Delta x)$. Вероятность того, что случайная величина X примет значение из этого отрезка с точностью до бесконечно малых высшего порядка, равна $\varphi(x)\Delta x$. Мы можем считать, что этой «массой» нагружена точка x и тогда по аналогии с предыдущим случаем положение центра тяжести системы этих масс выразится отношением сумм



Черт. 17. Математическое ожидание непрерывной случайной величины.

$$\frac{\sum\limits_x x\varphi(x)\,\Delta x}{\sum\limits_x \varphi(x)\,\Delta x}.$$

Для получения точной абсциссы центра тяжести, которую и примем за математическое ожидание, перейдем к пределу, уменьшая длины промежутков деления. Тогда будем иметь:

$$MX = \frac{\int\limits_a^b x\varphi(x)\,dx}{\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx},$$

если величина распределена на участке (a, b). В этом случае интеграл $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$ равен единице и потому

$$MX = \int\limits_a^b x\varphi(x)\,dx.$$

В общем случае математическое ожидание определяется с помощью равенства

$$MX = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\,dx, \qquad (3.3.3)$$

где $\varphi(x)$ — плотность вероятности случайной величины. При этом мы предполагаем, что интеграл (3.3.3) сходится абсолютно, т. е. существует интеграл [1])

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|\,\varphi(x)\,dx.$$

Формула (3.3.3) содержит предыдущую формулу как частный случай, получающийся тогда, когда $\varphi(x) = 0$ при $x < a$ и при всяком $x > b$.

Таким образом, *математическое ожидание (среднее значение) непрерывной случайной величины есть определенный интеграл от произведения плотности*

[1]) Если бы интеграл (3.3.3) сходился неабсолютно, то его значение как предела

$$\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}} \int\limits_a^b x\varphi(x)\,dx$$

зависело бы от того, с какой быстротой мы стремим a и b в отдельности к $-\infty$ и к $+\infty$. Таким образом, значение этого интеграла не имело бы определенного физического смысла.

вероятности $\varphi(x)$ на действительное переменное x, взятый в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ (предполагается, что такой интеграл сходится).

Математическое ожидание совпадает также с абсциссой центра тяжести площади фигуры, ограниченной дифференциальной кривой распределения и осью x.

Математическое ожидание (среднее значение) представляет собой то постоянное для данных условий число (параметр распределения), около которого будут колебаться средние арифметические, подсчитанные по результатам многочисленных наблюдений. Так, например, при вполне устойчивом технологическом процессе математическим ожиданием действительного размера детали будет тот размер, на который настроен в данном случае станок. Известно, что размеры отдельных деталей при этом будут различны между собой. Но если взять во время работы станка большое число проб из некоторого числа n деталей, то окажется, что: 1) средние арифметические размеры деталей, подсчитанные по этим пробам, колеблются около постоянного числа MX, являющегося математическим ожиданием, и 2) с увеличением числа n деталей в пробе средняя арифметическая в пробе приближается к математическому ожиданию, т. е. случайные колебания как бы затухают при увеличении числа наблюдений. В этом заключается действие закона больших чисел, о котором мы подробнее скажем далее.

Рассмотрим примеры на вычисление математических ожиданий.

Пример 3.3.1. При обработке втулок на токарном автомате на основе анализа точности технологического процесса подсчитаны следующие вероятности получения в пробе из 10 штук числа втулок, выходящих по своим размерам из контрольной зоны с границами, отстоящими на $\pm\frac{1}{4}\delta$ (δ — допуск) от середины допуска (назовем такие втулки «внезональными»):

Таблица 3.3.1

Число x «внезональных» втулок в пробе из 10 штук	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Вероятность получения данного числа	0,24	0,38	0,26	0,10	0,02	~ 0	~ 0	~ 0	~ 0	~ 0	~ 0	$\sum_{k=0}^{10} P(x_k) = 1{,}00$

Пусть пробы по 10 штук отбирались 10 раз в день при двухсменной работе, т. е. примерно через каждые 1,5 часа.

Станок был настроен на середину допуска. Были получены по дням следующие распределения проб по числу «внезональных» втулок за 5 дней работы станка (табл. 3.3.2).

Таблица 3.3.2

	Число «внезональных» втулок в пробе											Число проб за день	Среднее число «внезональных» втулок в пробе
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
	Число проб, имеющих данное число «внезональных» втулок												
Дни работы станка 1	2	3	3	1	1	—	—	—	—	—	—	10	1,6
Дни работы станка 2	1	5	2	2	—	—	—	—	—	—	—	10	1,5
Дни работы станка 3	2	4	2	1	1	—	—	—	—	—	—	10	1,5
Дни работы станка 4	3	4	2	1	—	—	—	—	—	—	—	10	1,1
Дни работы станка 5	3	4	3	—	—	—	—	—	—	—	—	10	1,0
Сумма за пять дней	11	20	12	5	2	—	—	—	—	—	—	50	1,34

Вычислим среднее арифметическое число «внезональных» втулок за первый день работы станка. Вычисление это можно проделать следующими тремя эквивалентными способами:

1) $\bar{x} = \dfrac{0+0+1+1+1+2+2+2+3+4}{10} = \dfrac{16}{10} = 1{,}6$ шт.

2) $\bar{x} = \dfrac{2\cdot 0+3\cdot 1+3\cdot 2+1\cdot 3+1\cdot 4}{10} = \dfrac{16}{10} = 1{,}6$ шт.

3) $\bar{x} = \dfrac{2}{10}\cdot 0 + \dfrac{3}{10}\cdot 1 + \dfrac{3}{10}\cdot 2 + \dfrac{1}{10}\cdot 3 + \dfrac{1}{10}\cdot 4 = 0{,}2\cdot 0 + 0{,}3\cdot 1 + 0{,}3\cdot 2 + 0{,}1\cdot 3 + 0{,}1\cdot 4 = 1{,}6$ шт.

Вычислим теперь математическое ожидание числа «внезональных» втулок по формуле (3.3.1):

$$\mathbf{M}X = 0{,}24\cdot 0 + 0{,}38\cdot 1 + 0{,}26\cdot 2 + 0{,}10\cdot 3 + 0{,}02\cdot 4 = 1{,}28 \text{ шт.}$$

Легко заметить, что математическое ожидание $\mathbf{M}X$ вычисляется совершенно аналогично вычислению средней арифметической по третьему способу, только здесь вместо частостей, полученных в конкретных наблюдениях, применяются вероятности, представляющие собой постоянные числа, около которых колеблются соответствующие частости.

Если бы число наблюдений n было велико, то каждое значение частости мало отличалось бы от соответствующей вероятности и тогда средняя арифметическая была бы близка к математическому ожиданию $\mathbf{M}X$.

Подсчитаем, например, средние арифметические за остальные дни и потом общую (суммарную) среднюю арифметическую за все 5 дней. Применяя те же способы вычислений, получим:

$$\bar{x}_1 = 1{,}6,\quad \bar{x}_2 = 1{,}5,\quad \bar{x}_3 = 1{,}5,\quad \bar{x}_4 = 1{,}1,\quad \bar{x}_5 = 1{,}0 \quad \text{и} \quad \bar{x}_\Sigma = 1{,}34.$$

Из этих цифр видно, что средняя арифметическая за 5 дней ($\bar{x}_\Sigma = 1{,}34$ шт.) оказалась довольно близкой к математическому ожиданию ($\mathbf{M}X = 1{,}28$ шт.).

Пример 3.3.2. Пусть непрерывная случайная величина X распределена равномерно в пределах от $x_н = -1$ до $x_к = +3$. Тогда $\varphi(x) = c = \dfrac{1}{4}$ и

$$\mathbf{M}X = \frac{1}{4}\int_{-1}^{+3} x\,dx = \frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{+3} = 1.$$

Понятно без вычислений, что поскольку распределение представляет симметричную фигуру, то абсцисса ее центра тяжести находится в середине основания, причем середина совпадает со значением $x = 1$, и поэтому $\mathbf{M}X = 1$.

При двумерном распределении, заданном плотностью вероятности, математическое ожидание можно рассматривать как центр тяжести массы, распределенной на плоскости xy с плотностью $\varphi(x, y)$. Это будет точка, координаты которой представляют математические ожидания каждой из величин X и Y. Мы можем также исходить из следующего определения: *математическим ожиданием двумерной случайной величины* (X, Y) *называется точка* $\mathbf{M}(X, Y)$ *с координатами*:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{P}(x_i, y_j),\quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j \mathbf{P}(x_i, y_j) \tag{3.3.4}$$

для дискретных случайных величин, или с координатами

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x, y)\,dx\,dy;\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y\varphi(x, y)\,dx\,dy \tag{3.3.5}$$

для непрерывных случайных величин.

При рассмотрении двумерного рассеивания в § 2 настоящей главы мы видели, что

$$\sum_{j=1}^{m} \mathbf{P}(x_i,\ y_j) = \mathbf{P}(x_i)$$

и аналогично

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,\ y)\,dy = \varphi_1(x).$$

Поэтому формулам (3.3.4) и (3.3.5) может быть придан следующий простой вид:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{P}(x_i) = \mathbf{M}X; \quad \sum_{j=1}^{m} y_j \mathbf{P}(y_j) = \mathbf{M}Y \tag{3.3.6}$$

для дискретных случайных величин и

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\varphi_1(x)\,dx = \mathbf{M}X; \quad \int_{-\infty}^{\infty} y\varphi_2(y)\,dy = \mathbf{M}Y \tag{3.3.7}$$

для непрерывных случайных величин.

Таким образом, оба определения математического ожидания двумерной случайной величины эквивалентны.

Пусть, например, требуется определить среднюю овальность втулок и их среднее отклонение от номинального размера по табл. 3.2.2.

Пользуясь формулой (3.3.6), находим:

$$\mathbf{M}X = 0{,}01 \cdot 0{,}10 + 0{,}02 \cdot 0{,}40 + 0{,}03 \cdot 0{,}30 + 0{,}04 \cdot 0{,}20 = 0{,}026,$$

$$\mathbf{M}Y = 0{,}008 \cdot 0{,}11 + 0{,}006 \cdot 0{,}30 + 0{,}004 \cdot 0{,}48 + 0{,}002 \cdot 0{,}11 = 0{,}00482.$$

Таким образом, математическое ожидание отклонения и овальности втулки в данных производственных условиях может быть охарактеризовано точкой H с координатами $x = 0{,}026$ и $y = 0{,}00482$.

Наряду с математическими ожиданиями и дисперсиями случайных величин приходится часто рассматривать математические ожидания и дисперсии различных функций $Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ этих величин.

Рассмотрим сначала одномерный случай. Пусть $Y = f(X)$.

Если величина X принимает какое-либо из возможных значений x, то величина Y принимает значение $f(x)$.

Пусть величина X дискретна и ее распределение задано табл. 3.3.3.

Таблица 3.3.3

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$\mathbf{P}(x_i)$	$\mathbf{P}(x_1)$	$\mathbf{P}(x_2)$	$\cdots$	$\mathbf{P}(x_n)$

Тогда величина $Y = f(X)$ также дискретна, ее распределение остается таким же и описывается табл. 3.3.4.

Таблица 3.3.4

Y	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\cdots$	$f(x_n)$
$\mathbf{P}(x_i)$	$\mathbf{P}(x_1)$	$\mathbf{P}(x_2)$	$\cdots$	$\mathbf{P}(x_n)$

Математическое ожидание такой величины выражается следующим образом:

$$\mathbf{M}[f(X)] = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(x_i) f(x_i). \tag{3.3.8}$$

Если величина X распределена непрерывно с плотностью $\varphi_X(x)$, то для математического ожидания $Y = f(X)$ будем иметь аналогичное выражение

$$\mathbf{M}[f(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi_X(x)\,dx \tag{3.3.9}$$

(при этом предполагается, что стоящий в правой части интеграл сходится абсолютно).

Аналогичным образом, рассматривая двумерное распределение, можно определить математическое ожидание $f(X, Y)$ — функцию двух случайных величин.

Пример 3.3.3. Пусть $Y = X^8$ и плотность вероятности величины X есть $\varphi_X(x)$.

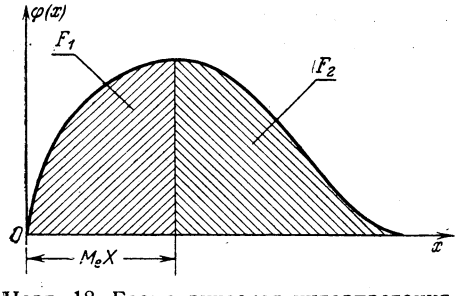
Тогда по формуле (3.3.9) получим:

$$\mathbf{M}Y = \mathbf{M}X^8 = \int_{-\infty}^{\infty} x^8 \varphi_X(x)\,dx.$$

Пусть теперь $Y = X^3$ и величина X распределена в пределах от 0 до 2 с плотностью $\frac{1}{2}$. Тогда

$$\mathbf{M}Y = \mathbf{M}(X^3) = \int_0^2 x^3 \frac{1}{2}\,dx = 2.$$

3.3.2. Медиана. *Теоретической медианой* $M_e x$, как мы указывали, называется квантиль, отвечающий значению $F(x_p) = p = \frac{1}{2}$, т. е. такое значение, для которого функция распределения равна $\frac{1}{2}$. А это в свою очередь означает, что вероятность случайной величине X принять значение, меньшее $M_e X$, в точности равна вероятности принять значение, большее $M_e X$.



Черт. 18. Геометрическая интерпретация медианы $M_e X$ непрерывной случайной величины ($F_1 = F_2$).

Медиана непрерывной случайной величины определяется, следовательно, из соотношения

$$\int_{-\infty}^{M_e X} \varphi(x)\,dx = \int_{M_e X}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = \frac{1}{2}. \tag{3.3.10}$$

Геометрически (черт. 18) медиана есть абсцисса такой точки кривой плотности вероятности $\varphi(x)$, ордината которой делит площадь под кривой на две равновеликие части.

Соотношение (3.3.10) не всегда однозначно определяет медиану. Если, например, кривая распределения $\varphi(x)$ имеет вид, показанный на черт. 19, то медианой может служить любое значение, взятое из промежутка (α, β).

Легко заметить, что при симметричных законах распределения, т. е. при таких законах, которые образуют на графике плотности вероятности симметричную фигуру, медиана совпадает с абсциссой точки пересечения оси симметрии этой фигуры с осью абсцисс.

В случае дискретного закона распределения в качестве теоретической медианы может быть принято:

1) любое значение, промежуточное между x_{m-1} и x_m, если имеет место условие

$$\sum_{i=1}^{m-1} \mathrm{P}(x_i) = \sum_{i=m}^{n} \mathrm{P}(x_i),$$

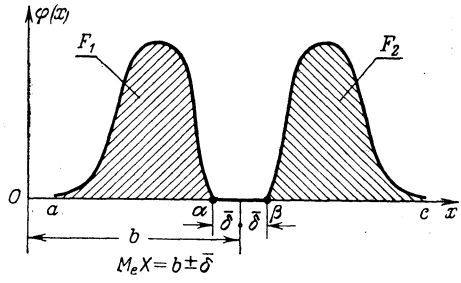
2) любое значение, промежуточное между x_{m-1} и x_m, если имеют место условия:

$$\sum_{i=1}^{m-1} \mathrm{P}(x_i) < \sum_{i=m}^{n} \mathrm{P}(x_i)$$

и

$$\sum_{i=1}^{m} \mathrm{P}(x_i) > \sum_{i=m+1}^{n} \mathrm{P}(x_i),$$

при этом предполагается, что значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ расположены в порядке возрастания их величины.



Черт. 19. Кривая плотности вероятности $\varphi(x)$, при которой медиана M_eX определяется неоднозначно ($F_1 = F_2$).

Отсюда видно, что медиана дискретной величины не может быть определена однозначно. В обоих указанных случаях она (правда, без достаточных к тому оснований) определяется иногда путем линейного интерполирования.

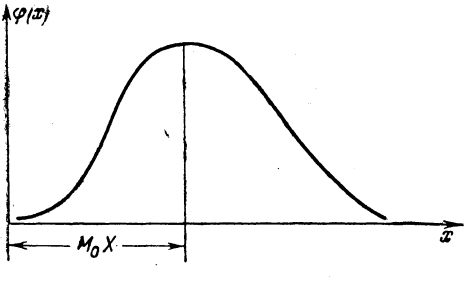
Аналогичным образом строится эмпирическая медиана.

Пусть, например, мы имеем «пробу» из 5 штук обработанных на станке деталей с размерами в миллиметрах: 10,12; 10,01; 9,98; 10,07 и 10,03.

Если полученные размеры расположить в порядке возрастания (9,98; 10,01; 10,03; 10,07; 10,12) и считать, что каждому из них отвечает равная масса $p(x_1) = p(x_2) = \ldots = p(x_5) = \frac{1}{5}$, то согласно правилу 2) мы можем считать медианой любое число, промежуточное между $x_2 = 10{,}01$ и $x_3 = 10{,}03$. Обычно при нечетном числе данных n берут в качестве медианы число, занимающее срединное положение, т. е. $\frac{n+1}{2}$ — по порядку, в данном примере при $n = 5$ — третье: $m_e = x_3 = 10{,}03$ *мм*. Если бы мы оперировали лишь с четырьмя первыми членами, то в качестве медианы брали бы среднее арифметическое из двух членов: $x_2 = 10{,}01$ и $x_3 = 10{,}03$, занимающих срединное положение

$$m_e = \frac{x_2 + x_3}{2} = \frac{10{,}01 + 10{,}03}{2} = 10{,}02.$$

Аналогично этому поступают при любом четном n.



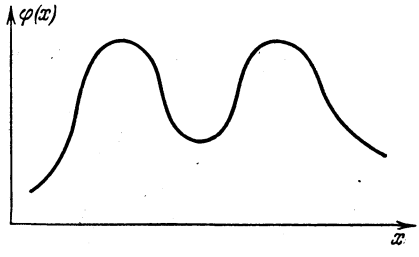
Черт. 20. Одномодальная кривая распределения.

3.3.3. Мода. *Теоретической модой* M_0X называется наиболее вероятное значение x_i случайной величины X, т. е. такое ее значение, для которого в случае дискретного распределения вероятность $\mathrm{P}(x_i)$ или в случае непрерывного распределения плотность вероятности $\varphi(x)$ имеют наибольшее значение (черт. 20).

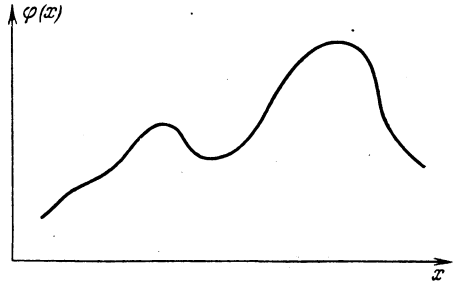
Если кривая распределения имеет два или несколько одинаковых максимумов, то она называется соответственно *двухмодальной* или *многомодальной* (черт. 21).

Если максимумы резко выражены, но различны по величине, то кривая называется *многовершинной* (черт. 22).

Если в центральной части кривой распределения имеется минимум, по обе стороны от которого происходит непрерывное возрастание кривой до границ



Черт. 21. Двухмодальная кривая распределения.



Черт. 22. Двухвершинная кривая распределения.

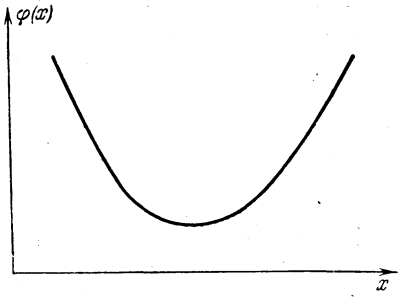
области значений случайной величины, то такая кривая называется *антимодальной* (черт. 23).

Между перечисленными характеристиками положения центра группирования нет определенных соотношений.

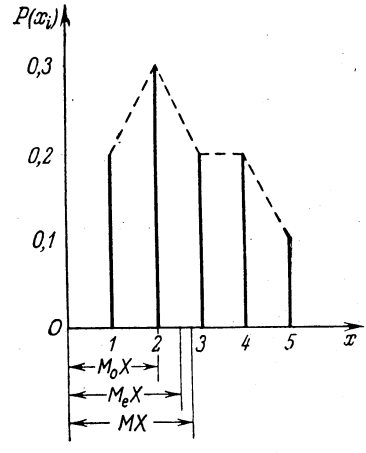
Это ясно в отношении $\mathbf{M}X$ и M_0X без всяких пояснений.

Следует заметить, что, как легко сообразить, медиана не изменится, если мы будем изменять распределение массы вероятности вдоль числовой оси, сохраняя равенство масс справа и слева от медианы.

Медиана не поддается так легко, как математическое ожидание, аналитическим операциям.



Черт. 23. Антимодальная кривая распределения.



Черт. 24. График первоначального распределения вероятностей дискретной случайной величины.

При симметричных одномодальных распределениях, как легко понять из определений, все три характеристики положения центра группирования — математическое ожидание, медиана и мода — равны между собой.

Ясно также, что размерности всех их совпадают с размерностью случайной величины.

Пример 3.3.4. Возьмем распределение вероятностей (черт. 24).

Для данного распределения:

1) $M_0X = 2$ *мк*, так как значение 2 *мк* имеет наибольшую вероятность, а именно, $\mathbf{P}(2) = 0{,}3$,

2) $M_eX = 2{,}5$, так как $\sum_{i=1}^{2} \mathbf{P}(x_i) = \sum_{i=2+1}^{5} \mathbf{P}(x_i) = \frac{1}{2}$ и медиана лежит между значениями 2 *мк* и 3 *мк*, а в этом случае условно принимают

$$M_eX = \frac{1}{2}(x_m + x_{m+1}) = \frac{1}{2}(2+3) = 2{,}5 \text{ мк},$$

3) $\mathbf{M}X = \sum_{i=1}^{5} x_i \mathbf{P}(x_i) = 0{,}2 \cdot 1 + 0{,}3 \cdot 2 + 0{,}2 \cdot 3 + 0{,}2 \cdot 4 + 0{,}1 \cdot 5 = 0{,}2 + 0{,}6 + 0{,}6 + 0{,}8 + 0{,}5 = 2{,}7$ *мк*.

Изменим график следующим образом:

1) примем, что вероятности значений 4 *мк* и 5 *мк* равны нулю:

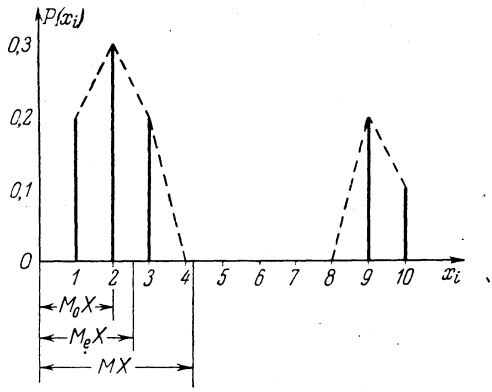
$$\mathbf{P}(4) = \mathbf{P}(5) = 0,$$

2) примем также, что вероятность значения 9 *мк* равна 0,2 и вероятность значения 10 *мк* равна 0,1; $\mathbf{P}(9) = 0{,}2$ и $\mathbf{P}(10) = 0{,}1$.

Тогда график примет вид, показанный на черт. 25; в этом случае попрежнему

1) $M_0X = 2$ *мк*,

2) $M_eX = 2{,}5$ *мк*, но $\mathbf{M}X = 0{,}2 \cdot 1 + 0{,}3 \cdot 2 + 0{,}2 \cdot 3 + 0{,}2 \cdot 9 + 0{,}1 \cdot 10 = 4{,}2$ *мк*.



Черт. 25. График измененного распределения вероятностей дискретной случайной величины.

3.3.4. Теоремы о математических ожиданиях (средних значениях). При вычислении математических ожиданий имеет важное значение ряд теорем.

Теорема 1. *Математическое ожидание постоянной есть сама эта постоянная*:

$$\mathbf{M}(C) = C, \qquad (3.3.11)$$

где C *— постоянная.*

Доказательство. Постоянную C можно рассматривать как дискретную случайную величину, которая может принять только одно значение C с вероятностью, равной единице $\mathbf{M}(C) = C \cdot 1 = C$.

Теорема 2. *Математическое ожидание произведения постоянной величины на случайную величину равно произведению постоянной на математическое ожидание случайной величины*:

$$\mathbf{M}(CX) = C \cdot \mathbf{M}X. \qquad (3.3.12)$$

Доказательство.

$\mathbf{M}(CX) = \sum_x x\mathbf{P}(x \cdot C) = C\sum_x x\mathbf{P}(x) = C \cdot \mathbf{M}X$ (для дискретных случайных величин),

$\mathbf{M}(CX) = \int_{-\infty}^{\infty} Cx\varphi(x)\,dx = C\int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)\,dx = C \cdot \mathbf{M}X$ (для непрерывных случайных величин).

Аналогичными свойствами обладают и средние арифметические из ряда наблюдений.

Теорема 3. *Математическое ожидание суммы нескольких случайных величин* X_i *равно сумме математических ожиданий этих величин*:

$$\mathbf{M}\left(\sum_i X_i\right) = \sum_i \mathbf{M}X_i. \qquad (3.3.13)$$

Доказательство. Докажем справедливость равенства

$$\mathbf{M}(X+Y)=\mathbf{M}X+\mathbf{M}Y.$$

Имеем:

$$\mathbf{M}(X+Y)=\sum_x\sum_y(x+y)\,\mathbf{P}(x,y)=\sum_x x\left[\sum_y \mathbf{P}(x,y)\right]+\sum_y y\left]\sum_x \mathbf{P}(x,y)\right]. \quad (3.3.14)$$

Здесь $\mathbf{P}(x,\ y)$ — вероятность того, что случайные величины X и Y принимают определенные значения x и y; следовательно, мы считаем заданным двумерное распределение величин X и Y. При рассмотрении двумерного рассеивания мы видели из (3.2.2), что в этом случае одномерные вероятности также определены, а именно:

$$\sum_y \mathbf{P}(x,\ y)=\mathbf{P}(x) \quad \text{и} \quad \sum_x \mathbf{P}(x,\ y)=\mathbf{P}(y).$$

Поэтому из (3.3.14) следует:

$$\mathbf{M}(X+Y)=\sum_x x\mathbf{P}(x)+\sum_y y\mathbf{P}(y)=\mathbf{M}X+\mathbf{M}Y.$$

Аналогично для непрерывных случайных величин имеем:

$$\mathbf{M}(X+Y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x+y)\,\varphi(x,\ y)\,dx\,dy=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x\,dx\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,\ y)\,dy+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}y\,dy\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,\ y)\,dx.$$

При рассмотрении двумерных случайных величин мы видели, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,\ y)\,dy=\varphi_1(x) \quad \text{и} \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,\ y)\,dx=\varphi_2(y).$$

Поэтому

$$\mathbf{M}(X+Y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x\varphi_1(x)\,dx+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}y\varphi_2(y)\,dy=\mathbf{M}X+\mathbf{M}Y.$$

С помощью метода полной индукции распространяем полученный результат на любое число слагаемых.

Теорема 3 о математических ожиданиях имеет чрезвычайно широкое применение благодаря тому, что она не накладывает каких-либо ограничительных условий на величины, входящие в сумму, — они могут, например, как угодно зависеть друг от друга.

Теорема 4. *Математическое ожидание суммы постоянной и случайной величин равно сумме постоянной величины и математического ожидания случайной величины*:

$$\mathbf{M}(C+X)=C+\mathbf{M}X. \quad (3.3.15)$$

Доказательство. На основании (3.3.11) и (3.3.13) получим:

$$\mathbf{M}(C+X)=\mathbf{M}C+\mathbf{M}X=C+\mathbf{M}X,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 5. *Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий*:

$$\mathbf{M}\left(\prod_{i=1}^{n}X_i\right)=\prod_{i=1}^{n}\mathbf{M}X_i. \quad (3.3.16)$$

Доказательство. Докажем сначала справедливость равенства

$$\mathbf{M}(XY) = \mathbf{M}X\,\mathbf{M}Y.$$

Имеем:

$$\mathbf{M}(XY) = \sum_x \sum_y xy\mathbf{P}(x, y).$$

Так как случайные величины независимы, то, как мы видели при рассмотрении двумерных случайных величин,

$$\mathbf{P}(x, y) = \mathbf{P}(x)\,\mathbf{P}(y).$$

Поэтому

$$\mathbf{M}(XY) = \sum_x \sum_y xy\mathbf{P}(x)\,\mathbf{P}(y) = \Big[\sum_x x\mathbf{P}(x)\Big]\Big[\sum_y y\mathbf{P}(y)\Big] = \mathbf{M}X\,\mathbf{M}Y.$$

Теорема может быть расширена с помощью метода полной индукции.

Для непрерывных случайных величин имеем:

$$\mathbf{M}(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\varphi(x, y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\varphi_1(x)\,\varphi_2(y)\,dx\,dy =$$

$$= \Big[\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi_1(x)\,dx\Big]\Big[\int_{-\infty}^{+\infty} y\varphi_2(y)\,dy\Big] = \mathbf{M}X\,\mathbf{M}Y.$$

В противоположность теореме 3 теорема 5 о математических ожиданиях предполагает независимость множителей. Поэтому ее следует применять, проверив предварительно, что условие независимости выполнено.

Было бы, например, *неверным* такое преобразование $\mathbf{M}X^2 = \mathbf{M}(XX) = \mathbf{M}X\,\mathbf{M}X = (\mathbf{M}X)^2$, так как оба множителя взаимно зависимы, и теорема умножения здесь неприменима. На самом деле, как мы увидим далее, $\mathbf{M}X^2 \geqslant (\mathbf{M}X)^2$.

Пример 3.3.5. Размерная цепь состоит из трех составляющих положительных звеньев X, Y и Z с математическими ожиданиями: $\mathbf{M}X = 20{,}5$ *мм*, $\mathbf{M}Y = 30{,}2$ *мм* и $\mathbf{M}Z = 50{,}1$ *мм*. Требуется определить математическое ожидание замыкающего звена K.

На основании теоремы о математическом ожидании суммы случайных величин находим:

$$\mathbf{M}K = \mathbf{M}(X + Y + Z) = \mathbf{M}X + \mathbf{M}Y + \mathbf{M}Z = 20{,}5 + 30{,}2 + 50{,}1 = 100{,}8 \text{ мм}.$$

Пример 3.3.6. Математическое ожидание отклонения X диаметра втулки от номинального размера равно $\mathbf{M}X = +20$ *мк*. Математическое ожидание отклонения Y диаметра валика от номинального размера равно $\mathbf{M}Y = -10$ *мк*. Требуется найти математическое ожидание отклонения Δ зазора.

На основании теоремы о математическом ожидании суммы нескольких случайных величин находим:

$$\mathbf{M}\Delta = \mathbf{M}(X - Y) = \mathbf{M}X - \mathbf{M}Y = 20 - (-10) = 30 \text{ мк}.$$

Пример 3.3.7. В примере 2.3.2 упоминалось о предложениях советских инженеров, относящихся к оценке зернистой структуры металлов с помощью так называемой «задачи Бюффона об игле», и было найдено, что вероятность $\mathbf{P}(A)$ пересечения бросаемой на плоскость иглой длины $2l$ одной из параллельных, нанесенных на плоскости на расстоянии $2a$ друг от друга прямых линий равна

$$\mathbf{P}(A) = \frac{2l}{a\pi} \qquad (l < a).$$

Для использования «задачи об игле» в указанных целях необходимо найти математическое ожидание числа пересечений полигонального контура с параллельными прямыми, нанесенными на плоскости.

Найдем сначала математическое ожидание числа пересечений иглы длиной $2l$ ($l > a$), брошенной на разграфленную прямыми линиями плоскость. Пусть расстояние между прямыми равно $2a$. Разобьем длину $2l$ иглы на s частей $2l_i$ ($i = 1, 2, \ldots, s$) таких, что длина $2l_i$ каждой части меньше $2a$. Таким образом, $l_i < a$ ($i = 1, 2, \ldots, s$) и $\sum_{i=1}^{s} l_i = l$. Обозначим через $X_1, X_2, \ldots, X_s$ дискретные случайные величины, представляющие собой число пересечений с проведенными прямыми соответственно частей иглы $2l_1, 2l_2, \ldots, 2l_s$.

При этом, очевидно, каждая из случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_s$ может принимать лишь два значения: 0 и 1. В нашей задаче требуется найти математическое ожидание суммы

$$X_0 = \sum_{i=1}^{s} X_i.$$

По теореме о математическом ожидании суммы нескольких случайных величин находим:

$$\mathbf{M}X_0 = \mathbf{M}\left(\sum_{i=1}^{s} X_i\right) = \sum_{i=1}^{s} \mathbf{M}X_i.$$

Поскольку каждая из величин $X_1, X_2, \ldots, X_s$ может принимать лишь два значения 0 и 1 и при этом она принимает значение 1 с вероятностью $\frac{2l_i}{a\pi}$, то

$$\mathbf{M}X_i = 1 \cdot \frac{2l_i}{a\pi} + 0\left(1 - \frac{2l_i}{a\pi}\right) = \frac{2l_i}{a\pi}, \tag{3.3.17}$$

откуда

$$\mathbf{M}X_0 = \sum_{i=1}^{s} \frac{2l_i}{a\pi} = \frac{2}{a\pi} \sum_{i=1}^{s} l_i = \frac{2l}{a\pi}. \tag{3.3.18}$$

Эта задача может быть распространена на полигональный контур. Пусть требуется найти математическое ожидание $\mathbf{M}X$ числа пересечений с проведенными на плоскости прямыми полигонального контура, составленного из s отрезков, длины которых равны $2l_i$ ($i = 1, 2, \ldots, s$), так, что $\sum_{i=1}^{s} 2l_i = 2l$. Обозначим через $X_1, X_2, \ldots, X_s$ числа пересечений прямых линий соответственно отрезками $2l_1, 2l_2, \ldots, 2l_s$. Тогда на основании предыдущего получим:

$$\mathbf{M}X = \sum_{i=1}^{s} \mathbf{M}X_i = \sum_{i=1}^{s} \frac{2l_i}{a\pi} = \frac{1}{a\pi} \sum_{i=1}^{s} 2l_i = \frac{2l}{a\pi}. \tag{3.3.19}$$

§ 4. Характеристики рассеивания

3.4.1. Дисперсия и среднее квадратическое отклонение. Для того чтобы охарактеризовать случайную величину, недостаточно одной только числовой характеристики положения центра группирования, так как она не характеризует того, как различные значения разбросаны около центра. Так, например, если мы имеем две равномерно распределенные непрерывные случайные величины и одна из них распределена по области от -1 до $+1$, а другая — от -100 до $+100$, то они имеют одинаковые математические ожидания, но резко различаются по характеру рассеивания. Первая из них во много раз компактнее распределена, чем вторая. Характеристика, показывающая насколько тесно сгруппированы возможные значения случайной величины около центра группирования, называется числовой характеристикой рассеивания. Очевидно, что таких характеристик с одинаковым назначением может быть несколько.

В технике наиболее часто употребляются следующие характеристики рассеивания:

1) *дисперсия*, обозначаемая символом $\mathbf{D}X$,

2) *среднее квадратическое отклонение*, обозначаемое через σ_X и

3) *коэффициент вариации*, обозначаемый символом v_X.

Здесь идет речь о теоретических (вероятностных) характеристиках рассеивания. Об эмпирических (статистических) характеристиках будет сказано в дальнейшем.

Во всех этих характеристиках за центр рассеивания принимается математическое ожидание величины.

Мы видели, что основная характеристика положения центра группирования — математическое ожидание представляет абсциссу центра «массы» вероятности. Как известно, в механике для характеристики расположения масс относительно их центра используют понятие момента инерции. Аналогичную характеристику рассеивания значений случайной величины около центра группирования называют *дисперсией*.

Рассмотрим сначала дискретную величину

$$X\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \\ \mathbf{P}(x_1), & \mathbf{P}(x_2), & \ldots, & \mathbf{P}(x_n) \end{pmatrix}.$$

Ее центр группирования будет лежать в точке $\mathbf{M}X = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{P}(x_i)$. Вспомогательную величину $Y = X - \mathbf{M}X$ называют *отклонением случайной величины* X. Эта величина будет иметь следующую таблицу распределения:

$$Y\begin{pmatrix} x_1 - \mathbf{M}X, & x_2 - \mathbf{M}X, & \ldots, & x_n - \mathbf{M}X \\ \mathbf{P}(x_1), & \mathbf{P}(x_2), & \ldots, & \mathbf{P}(x_n) \end{pmatrix}. \tag{3.4.1}$$

Заметим прежде всего, что центр группирования величины Y лежит в точке с координатой, равной нулю. В самом деле, так как $\mathbf{M}X$ — постоянная величина, то

$$\mathbf{M}Y = \mathbf{M}(X - \mathbf{M}X) = \mathbf{M}X - \mathbf{M}X = 0. \tag{3.4.2}$$

Таким образом, средняя величина отклонения равна нулю.

Естественно в качестве меры рассеивания, по аналогии с механикой, рассмотреть среднюю величину квадрата отклонений

$$\mathbf{M}Y^2 = \mathbf{M}(X - \mathbf{M}X)^2. \tag{3.4.3}$$

Эта величина получила название *дисперсии* величины X и обозначается через $\mathbf{D}X$.

Ее можно рассматривать как момент инерции отдельных «масс вероятности» $\mathbf{P}(x_i)$, помещенных в точках x_i, относительно оси, проходящей через центр тяжести этих масс

$$\mathbf{D}X = \mathbf{M}(X - \mathbf{M}X)^2 = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(x_i)(x_i - \mathbf{M}X)^2. \tag{3.4.4}$$

Таким образом, *дисперсия дискретной случайной величины, имеющей конечное число значений, определяется так: квадрат отклонения каждого значения умножается на вероятность этого значения и все произведения складываются.*

Если дискретная случайная величина принимает счетное множество возможных значений, то дисперсия ее представляет сумму ряда

$$\mathbf{D}X = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(x_n)(x_n - \mathbf{M}X)^2. \tag{3.4.5}$$

Дисперсия непрерывной случайной величины определяется совершенно аналогично. На графике плотности вероятности масса вероятности, как мы видели, изображается плоской фигурой, ограниченной числовой осью x и кривой $\varphi(x)$. Дисперсия представляет собой момент инерции этой плоской фигуры относительно оси $x = \mathbf{M}X$, и потому

$$\mathbf{D}X = \mathbf{M}(X - \mathbf{M}X)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)(x - \mathbf{M}X)^2\, dx. \tag{3.4.6}$$

Очевидно, что дисперсия уменьшается с уменьшением рассеивания случайной величины. Чем уже тот участок, на котором сосредоточены значения случайной величины, тем меньше ее дисперсия. Если величина всегда принимает одно единственное значение (с вероятностью, равной единице), т. е. является не случайной и ее рассеивание полностью отсутствует, то в этом случае дисперсия ее равна нулю. В случае дискретной величины, очевидно, верно и обратное предложение, если $\mathbf{D}X = 0$, то величина неслучайная.

Иногда при вычислениях дисперсии пользуются не формулами (3.4.3), (3.4.5) и (3.4.6), а более удобной формулой

$$\mathbf{D}X = \mathbf{M}X^2 - (\mathbf{M}X)^2. \tag{3.4.7}$$

Формула (3.4.7) выводится непосредственно из формул (3.4.4) и (3.4.6):

$$\mathbf{D}X = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(x_i)(x_i - \mathbf{M}X)^2 = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(x_i)[x_i^2 - 2x_i\mathbf{M}X + (\mathbf{M}X)^2] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(x_i)\, x_i^2 - 2\mathbf{M}X \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(x_i)\, x_i + (\mathbf{M}X)^2 \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(x_i).$$

Так как

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(x_i)\, x_i = \mathbf{M}X \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(x_i) = 1,$$

то

$$\mathbf{D}X = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(x_i)\, x_i^2 - 2(\mathbf{M}X)^2 + (\mathbf{M}X)^2 = \mathbf{M}X^2 - (\mathbf{M}X)^2.$$

Аналогично этому для непрерывной величины

$$\mathbf{D}X = \mathbf{M}X^2 - (\mathbf{M}X)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, x^2\, dx - \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, x\, dx\right]^2.$$

Из формул (3.43), (3.45) и (3.46) видно, что дисперсия имеет размерность, представляющую квадрат размерности самой случайной величины, что не совсем удобно на практике.

Поэтому в технике чаще пользуются не самой дисперсией, а корнем квадратным из нее, взятым с положительным знаком, называемым *средним квадратическим отклонением* и обозначаемым символом σ_X.

Итак,

$$\sigma_X = +\sqrt{\mathbf{D}X}. \tag{3.4.8}$$

Реже эту характеристику, а не ее квадрат, называют дисперсией.

Понятно, что размерность среднего квадратического отклонения совпадает с размерностью самой случайной величины X.

3.4.2. Коэффициент вариации. В качестве относительной характеристики рассеивания используется еще *коэффициент вариации*, обозначаемый через v_X, представляющий среднее квадратическое отклонение в процентах к математическому ожиданию.

Следовательно:

$$v_X = \frac{\sigma_X}{\mathbf{M}X} 100. \qquad (3.4.9)$$

Здесь предполагается, что $\mathbf{M}X \neq 0$, а σ_X мало.

Коэффициент вариации показывает, насколько велико рассеивание, характеризующееся средним квадратическим отклонением, по сравнению со средним значением случайной величины.

Теоретическим числовым характеристикам рассеивания может быть дана приближенная оценка по выборочным данным с помощью эмпирических (статистических) числовых характеристик рассеивания (эмпирической дисперсии, эмпирического среднего квадратического отклонения, эмпирического коэффициента вариации, размаха варьирования, крайних значений), о которых подробнее будет сказано дальше.

Пример 3.4.1. Требуется вычислить числовые характеристики рассеивания — дисперсию, среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации числа «внезональных» втулок в пробах из 10 штук по условиям примера 3.3.1.

Как было подсчитано в примере 3.3.1, математическое ожидание

$$\mathbf{M}X = 1{,}28 \text{ штук.}$$

Вычисляем дисперсию по формуле (3.4.4):

$$\mathbf{D}X = 0{,}24\,(0-1{,}28)^2 + 0{,}38\,(1-1{,}28)^2 + 0{,}26\,(2-1{,}28)^2 + 0{,}10(3-1{,}28)^2 + \\ + 0{,}02\,(4-1{,}28)^2 = 0{,}24 \cdot 1{,}64 + 0{,}38 \cdot 0{,}08 + 0{,}26 \cdot 0{,}52 + \\ + 0{,}10 \cdot 2{,}96 + 0{,}02 \cdot 7{,}40 = 1{,}00 \text{ шт.}^2.$$

Проще дисперсию вычислить по формуле (3.4.7):

$$\mathbf{D}X = 0{,}24 \cdot 0^2 + 0{,}38 \cdot 1^2 + 0{,}26 \cdot 2^2 + 0{,}10 \cdot 3^2 + 0{,}02 \cdot 4^2 - 1{,}28^2 = \\ = 0{,}38 + 1{,}04 + 0{,}90 + 0{,}32 - 1{,}64 = 1{,}00 \text{ шт.}^2.$$

Вычисляем среднее квадратическое отклонение по формуле (3.4.8):

$$\sigma_X = +\sqrt{1} = 1 \text{ шт.}$$

Вычисляем коэффициент вариации по формуле (3.4.9):

$$v_X = \frac{1}{1{,}28} 100 = 78{,}1\%.$$

Пример 3.4.2. Требуется вычислить дисперсию и среднее квадратическое отклонение равномерно распределенной непрерывной величины с областью значений от -1 до $+3$ *мм*.

В данном случае $\varphi(x) = c = \frac{1}{4}\frac{1}{мм}$ и ввиду симметрии распределения относительно середины промежутка $(-1, +3)$

$$\mathbf{M}X = \frac{-1+3}{2} = 1.$$

Вычисляем дисперсию по формуле (3.4.6):

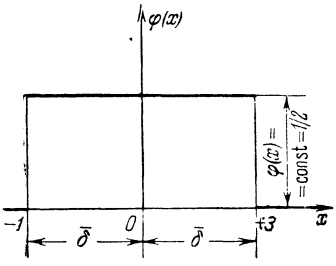
$$\mathbf{D}X = \frac{1}{4}\int_{-1}^{+3} (x-1)^2\,dx = \frac{1}{4}\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_{-1}^{+3} = \frac{4}{3} \text{ мм}^2.$$

Дисперсию можно вычислить также по формуле (3.4.7):

$$\mathbf{D}X = \frac{1}{4}\int_{-1}^{+3} x^2\,dx - 1^2 = \frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{+3} - 1 = \frac{4}{3} \text{ мм}^2.$$

В данном случае дисперсию можно вычислить еще, воспользовавшись известной формулой для осевого момента инерции прямоугольника (черт. 26) относительно оси, проходящей через его центр тяжести:

$$J_{MX} = \frac{bh^3}{12}.$$



Черт. 26. График непрерывной случайной величины, следующей закону равной вероятности.

Здесь основанием прямоугольника будет $\varphi(x) = c = \frac{1}{4}\frac{1}{мм}$ и высотой — область значений, равная $R = x_{нб} - x_{нм} = 3 - (-1) = 4$ *мм*. Тогда получим:

$$DX = J_{MX} = \frac{bh^3}{12} = \frac{\frac{1}{4}4^3}{12} = \frac{4}{3}\ мм^2.$$

Среднее квадратическое отклонение вычисляем по формуле (3.4.8):

$$\sigma_X = +\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{1{,}73} = 1{,}15\ мм.$$

Если выразить дисперсию и среднее квадратическое отклонение в долях половины $\bar{\delta}$ поля рассеивания, то получим:

$$DX = \frac{1}{2\bar{\delta}} \cdot \frac{(2\bar{\delta})^3}{12} = \frac{\bar{\delta}^2}{3}, \quad \sigma_X = \frac{\bar{\delta}}{\sqrt{3}},$$

откуда

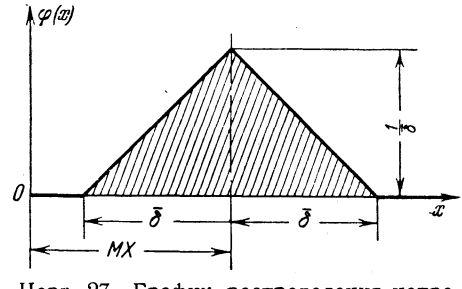
$$\bar{\delta} = \sqrt{3}\,\sigma_X = 1{,}73\sigma_X. \qquad (3.4.10)$$

Пример 3.4.3. Возьмем распределение по закону равнобедренного треугольника (Симпсона) (черт. 27).

Как известно,

$$J_{MX} = J'_{MX} + J''_{MX},$$

где J'_{MX} — момент инерции левой половины фигуры относительной оси, проходящей через MX, J''_{MX} — момент инерции правой половины фигуры относительно той же оси.



Черт. 27. График распределения непрерывной случайной величины, следующей закону равнобедренного треугольника (Симпсона).

Тогда, воспользовавшись тем, что дисперсия представляет момент инерции относительно вертикальной оси, проходящей через точку с абсциссой MX и известным соотношением для моментов инерции треугольника относительно его основания, получим:

$$DX = J_{MX} = 2\frac{bh^3}{12} = \frac{2\frac{1}{\bar{\delta}}\bar{\delta}^3}{12} = \frac{\bar{\delta}^2}{6};$$

$$DX = \frac{\bar{\delta}^2}{6}, \qquad (3.4.11)$$

$$\sigma_X = \sqrt{DX} = \frac{\bar{\delta}}{\sqrt{6}} = \frac{\bar{\delta}}{2{,}45}, \qquad (3.4.12)$$

$$\bar{\delta} = 2{,}45\sigma_X. \qquad (3.4.13)$$

3.4.3. Теоремы о дисперсиях. Теорема 1. *Дисперсия постоянной величины равна нулю*

$$D(C) = 0. \qquad (3.4.14)$$

Доказательство. Если величина $X = C$ постоянна, то ее математическое ожидание совпадает с единственным ее значением. Отклонение этой величины $Y = X - \mathbf{M}X = C - C = 0$ тождественно, и потому

$$\mathbf{D}X = \mathbf{M}Y^2 = 0.$$

Теорема 2. *Дисперсия произведения постоянной величины C на случайную величину X равна произведению квадрата постоянной величины C на дисперсию случайной величины*:

$$\mathbf{D}(CX) = C^2\,\mathbf{D}X. \tag{3.4.15}$$

Доказательство. На основании теоремы о математическом ожидании произведения постоянной C на случайную величину X (3.3.12) получим:

$$\mathbf{D}(CX) = \mathbf{M}[CX - \mathbf{M}(CX)]^2 = \mathbf{M}[C(X - \mathbf{M}X)]^2 =$$
$$= \mathbf{M}[C^2(X - \mathbf{M}X)^2] = C^2\mathbf{M}(X - \mathbf{M}X)^2 = C^2\mathbf{D}X.$$

Теорема 3. *Дисперсия суммы постоянной C и случайной величины X равна дисперсии случайной величины X*:

$$\mathbf{D}(C + X) = \mathbf{D}X. \tag{3.4.16}$$

Доказательство. На основании определения дисперсии (3.4.4) и теоремы о математическом ожидании суммы постоянной и случайной величин (3.3.15) имеем:

$$\mathbf{D}(C + X) = \mathbf{M}[C + X - \mathbf{M}(C + X)]^2 = \mathbf{M}(C + X - C - \mathbf{M}X)^2 = \mathbf{M}(X - \mathbf{M}X)^2 = \mathbf{D}X.$$

Теорема 4. *Дисперсия суммы нескольких независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ равна сумме дисперсий этих величин*:

$$\mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{D}X_i. \tag{3.4.17}$$

Доказательство. Докажем справедливость равенства

$$\mathbf{D}(X + Y) = \mathbf{D}X + \mathbf{D}Y.$$

Если величины X и Y независимы, то независимы, очевидно, и их отклонения от средних значений $X - \mathbf{M}X$ и $Y - \mathbf{M}Y$. Следовательно, по теореме о математическом ожидании произведения независимых случайных величин (3.3.16) получим:

$$\mathbf{M}[(X - \mathbf{M}X)(Y - \mathbf{M}Y)] = \mathbf{M}(X - \mathbf{M}X)\,\mathbf{M}(Y - \mathbf{M}Y) = 0,$$

так как ранее мы видели, что математическое ожидание отклонения величины от ее математического ожидания всегда равно нулю. Это обстоятельство часто упрощает выкладки. Учитывая, что дисперсия есть математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее среднего значения, получим:

$$\mathbf{D}(X + Y) = \mathbf{M}[(X + Y) - \mathbf{M}(X + Y)]^2.$$

На основании теоремы о математическом ожидании суммы случайных величин (3.3.13) получим:

$$\mathbf{D}(X + Y) = \mathbf{M}(X + Y - \mathbf{M}X - \mathbf{M}Y)^2 = \mathbf{M}[(X - \mathbf{M}X) + (Y - \mathbf{M}Y)]^2 =$$
$$= \mathbf{M}[(X - \mathbf{M}X)^2 + 2(X - \mathbf{M}X)(Y - \mathbf{M}Y) + (Y - \mathbf{M}Y)^2] =$$
$$= \mathbf{M}(X - \mathbf{M}X)^2 + 2\mathbf{M}[(X - \mathbf{M}X)(Y - \mathbf{M}Y)] + \mathbf{M}(Y - \mathbf{M}Y)^2. \tag{3.4.18}$$

Как мы упоминали, математическое ожидание произведения отклонений обращается в нуль и потому

$$\mathbf{D}(X + Y) = \mathbf{M}(X - \mathbf{M}X)^2 + \mathbf{M}(Y - \mathbf{M}Y)^2 = \mathbf{D}X + \mathbf{D}Y.$$

Доказанная теорема может быть распространена на любое число слагаемых с помощью метода полной индукции.

Следствия из теоремы о дисперсии суммы нескольких независимых случайных величин:

1. *Среднее квадратическое отклонение суммы нескольких независимых случайных величин равно корню квадратному из суммы квадратов средних квадратических отклонений этих величин, т. е.*

$$\sigma_{\sum_i X_i} = \sqrt{\sum_i \sigma^2_{X_i}}. \tag{3.4.19}$$

2. *Теоретическая дисперсия среднего арифметического из n независимых одинаково распределенных (т. е. имеющих один и тот же закон распределения, а следовательно, одинаковые математические ожидания и дисперсии) величин равна дисперсии какой-либо из этих величин (они между собой равны), деленной на общее число величин*:

$$\mathbf{D}\overline{X} = \mathbf{D}\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{\mathbf{D}X}{n}. \tag{3.4.20}$$

Это вытекает из следующего:

$$\mathbf{D}\overline{X} = \mathbf{D}\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = \mathbf{D}\left[\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)\right] =$$

$$= \frac{1}{n^2}\mathbf{D}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n).$$

А так как величины X_1, X_2, ..., X_n независимы и одинаково распределяются, то

$$\frac{1}{n^2}\mathbf{D}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \frac{\mathbf{D}X_1 + \mathbf{D}X_2 + \ldots + \mathbf{D}X_n}{n^2} = \frac{n\mathbf{D}X}{n^2} = \frac{\mathbf{D}X}{n}.$$

Здесь $\mathbf{D}X$ — значение дисперсии любой из величин X_i.

3. *Среднее квадратическое отклонение средней арифметической из n независимых и одинаково распределенных случайных величин X_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) равно среднему квадратическому отклонению каждой из величин (они имеют одинаковые средние квадратические отклонения), деленному на корень квадратный из числа величин, т. е.*

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}. \tag{3.4.21}$$

Действительно, согласно следствию 2 имеем:

$$\sigma_{\overline{X}} = \sqrt{\mathbf{D}\overline{X}} = \sqrt{\frac{\mathbf{D}X}{n}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}.$$

Таким образом, дисперсия среднего арифметического из n одинаково распределенных независимых величин в n раз, а среднее квадратическое отклонение в $\sqrt{n}$ раз меньше соответственно дисперсии и среднего квадратического отклонения каждого слагаемого.

Иными словами, при увеличении числа слагаемых дисперсия уменьшается, т. е. уменьшается рассеивание.

Такой случай мы имеем, когда, например, производим n измерений некоторого объекта. Если ошибки измерения считать независимыми, то последовательные измерения можно рассматривать как значения независимых и одинаково распределенных величин.

Средняя квадратическая ошибка выведенного на основании n измерений среднего арифметического будет выражаться формулой (3.4.21). При этом σ_X будет обозначать среднюю квадратическую ошибку одного измерения.

Пример 3.4.4. Размерная цепь имеет три составляющих положительных независимых звена X, Y и Z. При этом

$$\mathbf{D}X = 100 \text{ мк}^2, \ \mathbf{D}Y = 144 \text{ мк}^2 \text{ и } \mathbf{D}Z = 400 \text{ мк}^2.$$

Требуется определить дисперсию и среднее квадратическое отклонение замыкающего звена K.

По формуле (3.4.17) находим:

$$\mathbf{D}K = \mathbf{D}X + \mathbf{D}Y + \mathbf{D}Z = 100 + 144 + 400 = 644 \text{ мк}^2.$$

По формуле (3.4.19) находим:

$$\sigma_K = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + \sigma_Z^2} = \sqrt{100 + 144 + 400} = \sqrt{644} = 25{,}4 \text{ мк}.$$

Пример 3.4.5. При анализе технологического процесса установлено, что дисперсия наружного диаметра кольца, обрабатываемого на токарном автомате, $\sigma_X^2 = 0{,}36$ мм^2.

Предполагается при текущем статистическом контроле качества продукции этого автомата за каждый час брать пробу объема 9 штук.

Требуется определить теоретические дисперсию и среднее квадратическое отклонение средней арифметической указанной пробы.

По формуле (3.4.20) находим:

$$\mathbf{D}\bar{X} = \frac{\mathbf{D}X}{n} = \frac{0{,}36}{9} = 0{,}04 \text{ мм}^2.$$

По формуле (3.4.21) определяем

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{0{,}36}}{\sqrt{9}} = 0{,}20 \text{ мм}.$$

3.4.4. Ковариация. Коэффициент корреляции. В общем случае дисперсия суммы двух величин может быть записана на основании (3.4.18) следующим образом:

$$\mathbf{D}(X+Y) = \mathbf{D}X + \mathbf{D}Y + 2\mathbf{M}[(X - \mathbf{M}X)(Y - \mathbf{M}Y)]$$

или при переходе к средним квадратическим отклонениям

$$\sigma_{(X+Y)}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\mu_{xy}, \tag{3.4.22}$$

где положено

$$\mu_{xy} = \mathbf{M}[(X - \mathbf{M}Y)(Y - \mathbf{M}Y)]. \tag{3.4.23}$$

Эта последняя величина носит название *ковариации* или *смешанного второго момента величин* X и Y.

Ковариация μ_{xy} может быть преобразована так:

$$\mu_{xy} = \mathbf{M}[(X - \mathbf{M}X)(Y - \mathbf{M}Y)] = \mathbf{M}(XY - Y \cdot \mathbf{M}X - X \cdot \mathbf{M}X + \mathbf{M}X \cdot \mathbf{M}Y) =$$
$$= \mathbf{M}(XY) - \mathbf{M}X \cdot \mathbf{M}Y - \mathbf{M}X \cdot \mathbf{M}Y + \mathbf{M}X \cdot \mathbf{M}Y$$

и окончательно

$$\mu_{xy} = \operatorname{cov}(XY) = \mathbf{M}(XY) - \mathbf{M}X \cdot \mathbf{M}Y. \tag{3.4.24}$$

Введем теперь еще понятие *нормирования* случайных величин.

Нормирование заключается в переходе от случайной величины X к ее отклонению от центра группирования $\mathbf{M}X$, деленному на среднее квадратическое отклонение σ_X, т. е. к

$$Z = \frac{X - a}{\sigma_X}, \tag{3.4.25}$$

где $a = \mathbf{M}X$.

Нормирование приводит к тому, что новая величина будет иметь математическое ожидание, равное нулю, так как

$$\mathbf{M}Z = \mathbf{M}\left(\frac{X-a}{\sigma_X}\right) = \frac{\mathbf{M}(X-a)}{\sigma_X} = \frac{\mathbf{M}X - \mathbf{M}X}{\sigma_X} = 0$$

и, кроме того, дисперсия $\mathbf{D}Z$, а также среднее квадратическое отклонение σ_Z будут равны единице, т. е.

$$\mathbf{D}Z = 1 \quad \text{и} \quad \sigma_Z = 1.$$

В самом деле, на основании (3.4.15) и (3.4.16)

$$\mathbf{D}Z = \frac{1}{\sigma_X^2}\mathbf{D}(X-a) = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2} = 1 \quad \text{и} \quad \sigma_Z = \sqrt{\mathbf{D}Z} = 1.$$

Пусть теперь X и Y—случайные величины с математическими ожиданиями $\mathbf{M}X$ и $\mathbf{M}Y$ и дисперсиями σ_X^2 и σ_Y^2. Рассмотрим нормированные случайные величины X' и Y', определяемые аналогично (3.4.25). Вычисляя по формуле (3.4.24) их ковариацию, получим:

$$\rho_{XY} = \operatorname{cov}(X'Y') = \mathbf{M}\left(\frac{X-\mathbf{M}X}{\sigma_X}\cdot\frac{Y-\mathbf{M}Y}{\sigma_Y}\right) =$$

$$= \frac{\mathbf{M}[(X-\mathbf{M}X)(Y-\mathbf{M}Y)]}{\sigma_X\cdot\sigma_Y} = \frac{\operatorname{cov}(XY)}{\sigma_X\cdot\sigma_Y} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_X\cdot\sigma_Y}. \qquad (3.4.26)$$

Ковариация $\operatorname{cov}(X'Y')$ нормированных величин X' и Y' называется *коэффициентом корреляции* величин X и Y.

Этот коэффициент по абсолютной величине всегда меньше единицы и достигает значения $+1$ или -1 лишь при наличии точной линейной зависимости между величинами X и Y.

Доказательство этому будет дано в главе VII, посвященной теории корреляции.

Если величины X и Y независимы, то, как видно из (3.4.24) и (3.3.16), их ковариация, а следовательно, и коэффициент корреляции равны нулю. Обратное заключение о независимости величин при условии $\rho_{XY} = 0$ несправедливо.

Теперь, используя коэффициент корреляции, мы можем дать расширенную формулировку двум ранее доказанным теоремам.

3.4.5. Теорема о математическом ожидании произведения двух случайных величин в общем случае. *Математическое ожидание произведения двух случайных величин равно сумме произведения их математических ожиданий и коэффициента корреляции, умноженного на произведение средних квадратических отклонений этих величин*:

$$\mathbf{M}(XY) = \mathbf{M}X\,\mathbf{M}Y + \rho_{xy}\cdot\sigma_X\cdot\sigma_Y. \qquad (3.4.27)$$

Это положение непосредственно следует из (3.4.24) и (3.4.26).

3.4.6. Теорема о дисперсии суммы. *Дисперсия суммы нескольких случайных величин равна сумме их дисперсий и сумме произведений коэффициентов попарной корреляции величин на соответствующие пары средних квадратических отклонений*:

$$\mathbf{D}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \mathbf{D}X_1 + \mathbf{D}X_2 + \ldots + \mathbf{D}X_n + \sum_{i\neq k}\rho_{x_ix_k}\sigma_{X_i}\sigma_{X_k}. \qquad (3.4.28)$$

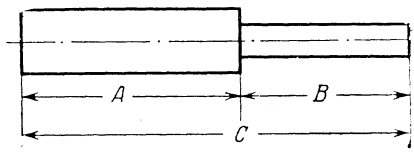
Для двух слагаемых X и Y формула (3.4.28) непосредственно следует из (3.4.22) и (3.4.26), так что

$$\left.\begin{aligned}\sigma^2_{(X+Y)} &= \sigma^2_X + \sigma^2_Y + 2\rho_{xy}\sigma_X\sigma_Y,\\ \sigma^2_{(X-Y)} &= \sigma^2_X + \sigma^2_Y - 2\rho_{xy}\sigma_X\sigma_Y.\end{aligned}\right\} \qquad (3.4.29)$$

Точно так же эту формулу можно доказать для любого числа слагаемых с тем, однако, что в этом случае вместо равенства $(X+Y)^2 = X^2 + Y^2 + 2XY$ мы будем иметь равенство

$$(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)^2 = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2 + \sum_{i \neq k} X_i X_k,$$

что и приводит к (3.4.28).



Черт. 28. Размерная цепь с независимыми звеньями A и B.

Пример 3.4.6. Пусть мы имеем простейшую размерную цепь (см. **4.6.1**), состоящую из двух независимых положительных составляющих звеньев A и B и замыкающего звена C, причем размер C получается в результате случайного сочетания звеньев A и B (черт. 28). Требуется определить дисперсию суммы $A+B$ и дисперсию разности $C-B$ для этой цепи.

Для суммы $A+B=C$ по формуле (3.4.29) находим:

$$\sigma^2_{(A+B)} = \sigma^2_A + \sigma^2_B + 2\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B = \sigma^2_A + \sigma^2_B,$$

так как ввиду независимости A и B $\rho_{AB} = 0$.

Для разности $C-B=A$ по той же формуле находим:

$$\sigma^2_{(C-B)} = \sigma^2_C + \sigma^2_B - 2\rho_{CB}\sigma_C\sigma_B = \sigma^2_A + 2\sigma^2_B - 2\frac{\sigma^2_B}{\sigma_C\sigma_B}\sigma_C\sigma_B = \sigma^2_A + 2\sigma^2_B - 2\sigma^2_B = \sigma^2_A,$$

так как C и B зависимы и

$$\rho_{CB} = \frac{\mathbf{M}(CB) - \mathbf{M}C \cdot \mathbf{M}B}{\sigma_C\sigma_B} = \frac{\mathbf{M}(AB + B^2) - (\mathbf{M}A + \mathbf{M}B)\,\mathbf{M}B}{\sigma_C \cdot \sigma_B} = \frac{\mathbf{M}B^2 - (\mathbf{M}B)^2}{\sigma_C\sigma_B} = \frac{\sigma^2_B}{\sigma_C\sigma_B}.$$

3.4.7. Корреляция между двумя событиями. Рассмотрим еще один простой, но важный для практики случай применения коэффициента корреляции для оценки силы (тесноты) связи между величинами, когда исследуется связь между двумя признаками A и B, которые могут носить качественный характер. Это будет также случай связи между двумя событиями.

Таблица распределения при этом, подобно таблице 2.2.1, рассмотренной в **2.2.5**, будет состоять из четырех клеток, отвечающих случаям появления комбинаций AB, $A\bar{B}$, $\bar{A}B$ и $\bar{A}\bar{B}$ (табл. 3.4.1):

Таблица 3.4.1

	B	$\bar{B}$	
A	$p_{11} = \mathbf{P}(AB)$	$p_{10} = \mathbf{P}(A\bar{B})$	$p_{11} + p_{10} = p_{1.} = \mathbf{P}(A)$
$\bar{A}$	$p_{01} = \mathbf{P}(\bar{A}B)$	$p_{00} = \mathbf{P}(\bar{A}\bar{B})$	$p_{01} + p_{00} = p_{0.} = \mathbf{P}(\bar{A})$
	$p_{11} + p_{01} = p_{.1} = \mathbf{P}(B)$	$p_{10} + p_{00} = p_{.0} = \mathbf{P}(\bar{B})$	

Мы можем связать с событием A величину X, принимающую два значения 1 и 0 соответственно тому, появляется ли в данном испытании A или не появляется. Аналогичную величину Y свяжем с событием B. Закон распределения величин XY будет описываться табл. 3.4.2.

Таблица 3.4.2

X \ Y	1	0	Σ
1	p_{11}	p_{10}	$\mathbf{P}(X=1)=p_{11}+p_{10}=p_{1\cdot}$
0	p_{01}	p_{00}	$\mathbf{P}(X=0)=p_{01}+p_{00}=p_{0\cdot}$
Σ	$\mathbf{P}(Y=1)=p_{11}+p_{01}=p_{\cdot 1}$	$\mathbf{P}(Y=0)=p_{10}+p_{00}=p_{\cdot 0}$	$\mathbf{P}(X=1)+\mathbf{P}(X=0)=$ $=\mathbf{P}(Y=1)+\mathbf{P}(Y=0)=1.$

Вероятности $p_{1\cdot}$ и $p_{0\cdot}$ значений 1 и 0 для величины X и вероятности $p_{\cdot 1}$ и $p_{\cdot 0}$ значений 1 и 0 для величины Y определяют законы распределения соответственно X и Y. При этом

$$p_{1\cdot}+p_{0\cdot}=1$$

и

$$p_{\cdot 1}+p_{\cdot 0}=1.$$

Математические ожидания и дисперсии будут определяться следующими формулами:

$$\mathbf{M}X=p_{1\cdot}\cdot 1+p_{0\cdot}\cdot 0=p_{1\cdot},$$

$$\mathbf{M}Y=p_{\cdot 1}\cdot 1+p_{\cdot}\cdot 0=p_{\cdot 1}.$$

Далее

$$\sigma_X^2=(1-p_{1\cdot})^2\cdot p_{1\cdot}+(0-p_{1\cdot})^2 p_{0\cdot}=p_{0\cdot}^2 p_{1\cdot}+p_{1\cdot}^2 p_{0\cdot}=p_{0\cdot}p_{1\cdot}$$

и

$$\sigma_X=\sqrt{p_{0\cdot}p_{1\cdot}}=\sqrt{(p_{01}+p_{00})(p_{11}+p_{10})}.$$

Аналогично

$$\sigma_Y=\sqrt{p_{\cdot 0}p_{\cdot 1}}=\sqrt{(p_{10}+p_{00})(p_{11}+p_{1})}.$$

Пользуясь (3.3.1), получим:

$$\mathbf{M}(XY)=p_{11}\cdot 1\cdot 1+p_{10}\cdot 1\cdot 0+p_{01}\cdot 0\cdot 1+p_{00}\cdot 0\cdot 0=p_{11}$$

и

$$\mu_{xy}=\operatorname{cov}(XY)=\mathbf{M}(XY)-\mathbf{M}X\cdot\mathbf{M}Y=p_{11}-p_{1\cdot}\cdot p_{\cdot 1}=p_{11}-(p_{11}+p_{10})(p_{11}+p_{01})=$$

$$=p_{11}(p_{11}+p_{10}+p_{01}+p_{00})-(p_{11}+p_{10})(p_{11}+p_{01})=p_{11}p_{00}-p_{01}p_{10}.$$

Поэтому коэффициент корреляции между X и Y, применяемый в качестве меры тесноты связи между событиями A и B, в данном случае оказывается равным

$$\rho=\frac{p_{11}-p_{1\cdot}p_{\cdot 1}}{\sqrt{p_{1\cdot}p_{0\cdot}p_{\cdot 1}p_{\cdot 0}}}=\frac{p_{11}p_{00}-p_{01}p_{10}}{\sqrt{(p_{11}+p_{10})(p_{01}+p_{00})(p_{11}+p_{01})(p_{10}+p_{00})}}. \quad (3.4.30)$$

При других указанных вначале обозначениях с учетом (2.2.15) будем иметь

$$\rho=\frac{\mathbf{P}(AB)-\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)}{\sqrt{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(\bar{A})\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(\bar{B})}}=[\mathbf{P}(B\mid A)-\mathbf{P}(B)]\sqrt{\frac{\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(\bar{A})\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(\bar{B})}}, \quad (3.4.31)$$

откуда следует:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{P}(B \mid A) &= \mathbf{P}(B) + \rho \sqrt{\frac{\mathbf{P}(\bar{A})\,\mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(\bar{B})}{\mathbf{P}(A)}}, \\ \mathbf{P}(B \mid \bar{A}) &= \mathbf{P}(B) - \rho \sqrt{\frac{\mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(\bar{B})}{\mathbf{P}(\bar{A})}}. \end{aligned}\right\} \tag{3.4.32}$$

При выводе второго из равенств (3.4.32) использовано (2.2.13) и (2.2.15).

Отметим некоторые свойства коэффициента корреляции между событиями или качественными признаками.

Прежде всего из (3.4.31) непосредственно следует, что:

1. Коэффициент корреляции между A и $\bar{B}$ равен по абсолютному значению и противоположен по знаку коэффициенту корреляции между A и B, так как $\mathbf{P}(B \mid A) - \mathbf{P}(B) = -[\mathbf{P}(\bar{B} \mid A) - \mathbf{P}(\bar{B})]$; коэффициент же корреляции между $\bar{A}$ и $\bar{B}$ совпадает с коэффициентом корреляции между A и B.

2. Коэффициент корреляции между двумя независимыми событиями равен нулю и в этом случае

$$\operatorname{cov}(XY) = \mu_{xy} = 0.$$

3. Если $\mathbf{P}(A)$ и $\mathbf{P}(B)$ даны, то $\mathbf{P}(B \mid A)$ возрастает вместе с алгебраическим возрастанием ρ; в противоположном случае $\mathbf{P}(B \mid A)$ уменьшается.

Кроме того, легко убедиться, что коэффициент корреляции никогда по абсолютному значению не бывает больше единицы. Если события A и B совпадают и, следовательно, $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(AB)$, то в этом и только в этом случае $\rho = 1$. Если же события A и B являются взаимными отрицаниями, т. е. совпадают события A и $\bar{B}$, то $\rho = -1$.

В самом деле, если $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(AB)$, то $\mathbf{P}(A) - [\mathbf{P}(A)]^2 = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(\bar{A})$ и, как видно из (3.4.31), $\rho = 1$. Обратно, пусть дано, что $\rho = 1$. Предположим теперь, что $\mathbf{P}(A) \neq \mathbf{P}(B)$, или для определенности $\mathbf{P}(A) > \mathbf{P}(B)$. Тогда $\mathbf{P}(\bar{A}) < \mathbf{P}(\bar{B})$ и, записав (3.4.32) в виде

$$\mathbf{P}(B \mid \bar{A}) = \mathbf{P}(B)\left[1 - \rho \sqrt{\frac{\mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(\bar{B})}{\mathbf{P}(\bar{A})\,\mathbf{P}(B)}}\right], \tag{3.4.33}$$

мы получили бы под корнем величину больше единицы и при $\rho = 1$ вероятность $\mathbf{P}(B \mid A)$ оказалась бы отрицательным числом, что невозможно, и следовательно, необходимо принять $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B)$, откуда в свою очередь следует, что $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)$. Из соотношения (3.4.33) следует, что

$$\rho \leqslant \sqrt{\frac{\mathbf{P}(\bar{A})\,\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(\bar{B})}}, \tag{3.4.34}$$

причем знак равенства отвечает случаю, когда $\mathbf{P}(B \mid \bar{A}) = 0$, т. е. $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(AB)$, а это означает, что событие A является необходимым следствием события B. Если же при этом событие B не является также обязательным следствием события A и потому $\mathbf{P}(A \mid \bar{B}) \neq 0$, т. е. $\mathbf{P}(AB) \neq \mathbf{P}(A)$, то из (3.4.34) видно, что, несмотря на то что событие A является следствием события B, коэффициент корреляции может оказаться значительно меньше единицы.

Так, например, обозначив при бросании игральной кости выпадение 4 очков через B и появление четного числа очков через A, мы получим по формуле (3.4.31):

$$\rho = \sqrt{\frac{1}{5}} = 0{,}45,$$

хотя событие A является обязательным следствием события B.

Пример 3.4.7. Пусть мы располагаем полученными на основе обширных наблюдений данными о вероятностях распределения валиков по двум признакам — конусности и овальности в следующем виде (табл. 3.4.3):

Таблица 3.4.3

Конусность	Овальность		
	Имеется	Не имеется	Итого
Имеется	0,06	0,01	0,07
Не имеется	0,03	0,90	0,93
Итого	0,09	0,91	1,00

Требуется оценить тесноту связи между получаемой при данном технологическом процессе конусностью и овальностью валиков. Определяем коэффициент корреляции между конусностью и овальностью валиков по (3.4.30):

$$\rho = \frac{0{,}06 - 0{,}07 \cdot 0{,}09}{\sqrt{0{,}07 \cdot 0{,}93 \cdot 0{,}09 \cdot 0{,}91}} = 0{,}76.$$

Мы видим, что коэффициент корреляции получился довольно значительным, что указывает на существенную связь между конусностью и овальностью валиков, т. е. позволяет предполагать наличие таких производственных факторов, вызывающих конусность, которые вместе с тем способны вызвать и овальность.

Более подробно вопрос о тесноте и форме связи между величинами будет рассмотрен в главе VII.

§ 5. Приближенное определение случайных величин

3.5.1. Приближенное определение математического ожидания функции. В тех случаях, когда известны математическое ожидание и дисперсия самой величины X, а функция $f(x)$ вблизи точки $x = \mathbf{M}X$ является гладкой, оказывается достаточным приближенное вычисление математического ожидания и дисперсии функции $Y = f(X)$ непрерывной случайной величины X. Формулы для таких вычислений могут быть выведены следующим путем.

Как правило, обычно бо́льшая часть массы вероятности случайной величины X лежит внутри интервала

$$(\mathbf{M}X - \gamma\sigma_X,\ \mathbf{M}X + \gamma\sigma_X) \tag{3.5.1}$$

при надлежащим образом подобранном коэффициенте γ. Предположим, например, что γ является небольшим положительным числом. Так как вероятность значений случайной величины X, отклоняющихся от $\mathbf{M}X$ больше чем на $\gamma\sigma_X$, предполагается малой, то достаточно принять во внимание только значения X, лежащие внутри упомянутого интервала. Разлагая

$$Y = f(X) \tag{3.5.2}$$

по формуле Тейлора около точки $X = \mathbf{M}X$, получим:

$$Y = f(X) = f(\mathbf{M}X) + (X - \mathbf{M}X) f'(\mathbf{M}X) + \frac{(X - \mathbf{M}X)^2}{2} f''(\xi), \tag{3.5.3}$$

где ξ — есть некоторое значение между $\mathbf{M}X$ и X.

Обычно внутри рассматриваемой узкой области Y является мало изменяющейся функцией, так что можно пренебречь членом второго порядка и написать

$$Y \approx f(\mathbf{M}X) + (X - \mathbf{M}X) f'(\mathbf{M}X). \tag{3.5.4}$$

Из (3.5.4) получаем приближенные значения математического ожидания и дисперсии величины Y. Используя (3.5.4), на основании теорем 2, 3 и 4 о математических ожиданиях, получим:

$$\mathbf{M}Y = \mathbf{M}[f(X)] \approx \mathbf{M}[f(\mathbf{M}X) + (X - \mathbf{M}X) f'(\mathbf{M}X)] =$$
$$= \mathbf{M}[f(\mathbf{M}X)] + \mathbf{M}[(X - \mathbf{M}X) f'(\mathbf{M}X)] = f(\mathbf{M}X) + f'(\mathbf{M}X)\,\mathbf{M}(X - \mathbf{M}X),$$

откуда окончательно получим:

$$\mathbf{M}Y = \mathbf{M}[f(X)] \approx f(\mathbf{M}X). \tag{3.5.5}$$

Таким образом, математическое ожидание функции непрерывной случайной величины X приближенно равно значению этой функции в точке $\mathbf{M}X$.

3.5.2. Дисперсия функции случайной величины. На основании теорем 2 и 3 о дисперсиях из соотношения (3.5.4) получим:

$$\mathbf{D}Y = \mathbf{D}[f(X)] \approx \mathbf{D}[f(\mathbf{M}X) + (X - \mathbf{M}X) f'(\mathbf{M}X)] =$$
$$= \mathbf{D}[(X - \mathbf{M}X) f'(\mathbf{M}X)] = [f'(\mathbf{M}X)]^2\,\mathbf{D}(X - \mathbf{M}X) = [f'(\mathbf{M}X)]^2\,\mathbf{D}X.$$

Окончательно будем иметь:

$$\mathbf{D}Y = \mathbf{D}[f(X)] \approx [f'(\mathbf{M}X)]^2\,\mathbf{D}X. \tag{3.5.6}$$

Дисперсия функции случайной величины X приближенно равна произведению квадрата значения производной функции в точке $\mathbf{M}X$ на дисперсию X.

Из соотношений (3.5.6) и (3.4.7) легко найти среднее квадратическое отклонение функции случайной величины X:

$$\sigma_Y = \sigma_{f(X)} \approx |f'(\mathbf{M}X)|\,\sigma_X, \tag{3.5.7}$$

т. е. среднее квадратическое отклонение функции случайной величины X равно произведению ее среднего квадратического отклонения на абсолютное значение производной функции в точке $\mathbf{M}X$.

Пример 3.5.1. Пусть $Y = \frac{1}{X}$. Математическое ожидание величины X есть $\mathbf{M}X$ и ее среднее квадратическое отклонение есть σ_X.

Требуется определить математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации величины Y. По соотношению (3.5.5) находим:

$$\mathbf{M}Y \approx \frac{1}{\mathbf{M}X}.$$

По формуле (3.5.7) получаем:

$$\sigma_Y \approx \frac{\sigma_X}{(\mathbf{M}X)^2},$$

откуда

$$v_Y = \frac{\sigma_Y}{\mathbf{M}Y}\,100 \approx \frac{\sigma_X}{\mathbf{M}X} \cdot 100 = v_X.$$

Мы предполагаем, конечно, что $\mathbf{M}X \neq 0$ и дисперсия величины сравнительно мала.

3.5.3. Математическое ожидание и дисперсия функции двух случайных величин. Пусть теперь $Z = f(X, Y)$ есть функция, мало изменяющаяся внутри той области, в которой сосредоточена бо́льшая часть массы вероятности, и поверхность $Z = f(X, Y)$ может быть аппроксимирована своей касательной плоскостью в точке $(\mathbf{M}X, \mathbf{M}Y)$.

Тогда, обобщая соотношение (3.5.4) для некоторой достаточно малой окрестности точки $(\mathbf{M}X, \mathbf{M}Y)$, будем иметь:

$$Z \approx f(\mathbf{M}X, \mathbf{M}Y) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (X - \mathbf{M}X) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (Y - \mathbf{M}Y), \tag{3.5.8}$$

где значок $(\ )_0$ указывает, что частные производные берутся в точке $(\mathbf{M}X, \mathbf{M}Y)$.

Из (3.5.8) следует далее

$$\mathbf{M}Z \approx f(\mathbf{M}X,\ \mathbf{M}Y), \tag{3.5.9}$$

так как попрежнему $\mathbf{M}(X-\mathbf{M}X)=\mathbf{M}(Y-\mathbf{M}Y)=0$;

$$\mathbf{D}Z \approx \mathbf{M}[Z-f(\mathbf{M}X,\ \mathbf{M}Y)]^2 \approx \mathbf{M}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (X-\mathbf{M}X)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (Y-\mathbf{M}Y)\right]^2 =$$

$$=\mathbf{M}\left\{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (X-\mathbf{M}X)\right]^2+2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (X-\mathbf{M}X)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (Y-\mathbf{M}Y)+\right.$$

$$\left.+\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (Y-\mathbf{M}Y)\right]^2\right\}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0^2 \mathbf{M}(X-\mathbf{M}X)^2+$$

$$+2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \mathbf{M}[(X-\mathbf{M}X)\ (Y-\mathbf{M}Y)]+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \mathbf{M}(Y-\mathbf{M}Y)^2 =$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0^2 \mathbf{D}X+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0^2 \mathbf{D}Y+2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \mu_{xy}, \tag{3.5.10}$$

где

$$\mu_{xy}=\mathbf{M}[(X-\mathbf{M}X)(Y-\mathbf{M}Y)]=\operatorname{cov}XY,$$

$$\sigma_Z \approx \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0^2 \sigma_X^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0^2 \sigma_Y^2+2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \mu_{xy}}. \tag{3.5.11}$$

Пример 3.5.2. Пусть $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ и $\mathbf{M}X$ и $\mathbf{M}Y$ — математические ожидания соответственно величин X и Y, а $\mathbf{D}X$, $\mathbf{D}Y$ — их дисперсии. Требуется определить математическое ожидание и дисперсию величины Z, если между X и Y нет вероятностной связи.

На основании формулы (3.5.9) получим:

$$\mathbf{M}Z \approx \sqrt{(\mathbf{M}X)^2+(\mathbf{M}Y)^2}.$$

По соотношению формулы (3.5.10) будем иметь:

$$\mathbf{D}Z=\frac{(\mathbf{M}X)^2}{(\mathbf{M}X)^2+(\mathbf{M}Y)^2}\mathbf{D}X+\frac{(\mathbf{M}Y)^2}{(\mathbf{M}X)^2+(\mathbf{M}Y)^2}\mathbf{D}Y.$$

§ 6. Моменты высших порядков и производящая функция

3.6.1. Начальные и центральные моменты. В теории вероятностей широко используются моменты, введенные Чебышевым.

Моментом r-го порядка случайной величины называется математическое ожидание величины $(X-a)^r$ (где a — любое вещественное число):

$$\nu_r(a)=\mathbf{M}(X-a)^r. \tag{3.6.1}$$

Если $a=0$, то момент называется *начальным*. Таким образом, начальный момент r-го порядка ν_r определяется выражением

$$\nu_r=\mathbf{M}X^r. \tag{3.6.2}$$

Если $a=\mathbf{M}X$, то момент называется *центральным*; он определяется выражением

$$\mu_r=\mathbf{M}(X-\mathbf{M}X)^r. \tag{3.6.3}$$

Математическое ожидание (среднее значение) при таком обозначении является начальным моментом первого порядка, т. е.

$$\mathbf{M}X=\nu_1. \tag{3.6.4}$$

Дисперсия является центральным моментом второго порядка, т. е.

$$\mathbf{D}X=\mu_2. \tag{3.6.5}$$

Между центральными и начальными моментами существует простая связь, а именно для первых четырех моментов имеем:

$$\mu_1 = 0; \tag{3.6.6}$$

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2; \tag{3.6.7}$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3; \tag{3.6.8}$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4. \tag{3.6.9}$$

Соотношение (3.6.6) представляет собой записанное в форме моментов соотношение (3.4.2).

Соотношение (3.6.7) представляет собой записанное в форме моментов соотношение (3.4.7).

Соотношение (3.6.8) может быть просто выведено следующим образом:

$$\mu_3 = \mathbf{M}(X - \mathbf{M}X)^3 = \mathbf{M}[X^3 - 3X^2\mathbf{M}X + 3X(\mathbf{M}X)^2 - (\mathbf{M}X)^3].$$

На основании теоремы о математическом ожидании суммы нескольких случайных величин получим:

$$\mathbf{M}[X^3 - 3X^2\mathbf{M}X + 3X(\mathbf{M}X)^2 - (\mathbf{M}X)^3] = \mathbf{M}X^3 - 3\mathbf{M}X^2\mathbf{M}X + 3(\mathbf{M}X)^3 - (\mathbf{M}X)^3 =$$
$$= \mathbf{M}X^3 - 3\mathbf{M}X^2\mathbf{M}X + 2(\mathbf{M}X)^3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3.$$

Соотношение (3.6.9) может быть аналогичным образом выведено с помощью разложения по биному Ньютона:

$$\mu_4 = \mathbf{M}(X - \mathbf{M}X)^4 = \mathbf{M}[X^4 - 4X^3\mathbf{M}X + 6X^2(\mathbf{M}X)^2 - 4X(\mathbf{M}X)^3 + (\mathbf{M}X)^4] =$$
$$= \mathbf{M}X^4 - 4\mathbf{M}X^3\mathbf{M}X + 6\mathbf{M}X^2(\mathbf{M}X)^2 - 3(\mathbf{M}X)^4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4.$$

Пример 3.6.1. В примере 3.4.1 математическое ожидание числа «внезональных» втулок в пробе равнялось $\mathbf{M}X = 1{,}28$ и дисперсия $\mathbf{D}X = 2{,}64 - 1{,}64 = 1{,}00$, где $\nu_2 = 2{,}64$ и $\nu_1^2 = 1{,}28^2 = 1{,}64$.

Требуется вычислить центральный момент третьего порядка этой случайной величины.

Вычисляем начальный момент третьего порядка

$$\nu_3 = 0{,}24 \cdot 0^3 + 0{,}38 \cdot 1^3 + 0{,}26 \cdot 2^3 + 0{,}10 \cdot 3^3 + 0{,}02 \cdot 4^3 =$$
$$= 0{,}38 + 2{,}08 + 2{,}70 + 1{,}28 = 6{,}44.$$

По формуле (3.6.8) находим:

$$\mu_3 = 6{,}44 - 3 \cdot 2{,}64 \cdot 1{,}28 + 2 \cdot 1{,}28^3 = 0{,}50.$$

3.6.2. Производящая функция. Если существуют моменты всех порядков, то часто бывает удобно характеризовать распределение с помощью так называемой производящей функции.

Производящей функцией величины X называется математическое ожидание e^{Xt}, где t является действительным числом (вспомогательным параметром).

Таким образом, обозначая производящую функцию через $m(t)$, по соотношениям (3.3.8) и (3.3.9) будем иметь:

$$m(t) = \mathbf{M}e^{Xt} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(x_i)\, e^{x_i t} \tag{3.6.10}$$

для дискретных величин и

$$m(t) = \mathbf{M}e^{Xt} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt}\varphi(x)\,dx \tag{3.6.11}$$

для непрерывно распределенных величин с плотностью вероятности $\varphi(x)$.

Мы предполагаем, что ряд (3.6.10) и интеграл (3.6.11) сходятся по крайней мере для достаточно малых значений вспомогательного параметра t.

Все дальнейшие операции дифференцирования могут быть легко обоснованы при этом предположении.

Мы покажем, что знание производящей функции $m(t)$ равносильно знанию всех моментов целых порядков.

Для этого, продифференцировав r раз обе части равенств (3.6.10) и (3.6.11) по t, получим:

$$\frac{d^r}{dt^r} m(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(x_i)\, e^{x_i t} x_i^r$$

или

$$\frac{d^r}{dt^r} m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r e^{xt} \varphi(x)\, dx$$

(законность этих операций при наших допущениях может быть строго обоснована). Положив $t = 0$ как в том, так и в другом случае, найдем:

$$\frac{d^r}{dt^r} m(0) = \mathbf{M}X^r = \nu_r, \tag{3.6.12}$$

где $\frac{d^r}{dt^r} m(0)$ представляет r-ю производную от производящей функции $m(t)$ при $t = 0$.

Таким образом, начальный момент любого целого порядка может быть получен путем дифференцирования производящей функции.

Если в равенствах (3.6.10) и (3.6.11) разложить e^{Xt} в ряд и выполнить затем суммирование или интегрирование, то получится ряд выражений для $m(t)$ в виде степенного ряда с коэффициентами, зависящими от моментов распределения [1]).

Таким образом:

$$m(t) = \mathbf{M}e^{Xt} = \mathbf{M}\left(1 + Xt + \frac{1}{2!}(Xt)^2 + \frac{1}{3!}(Xt)^3 + \ldots\right) =$$

$$= 1 + t\mathbf{M}X + \frac{1}{2!} t^2 \mathbf{M}X^2 + \frac{1}{3!} t^3 \mathbf{M}X^3 + \ldots = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} t^l \mathbf{M}X^l =$$

$$= 1 + t\nu_1 + \frac{t^2}{2!}\nu_2 + \frac{t^3}{3!}\nu_3 + \ldots = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \nu_l t^l. \tag{3.6.13}$$

В силу известных формул Маклорена для коэффициентов степенного ряда получим снова:

$$\left(\frac{d^r}{dt^r} m(t)\right)_{t=0} = \nu_r,$$

что мы имели и раньше.

Пример 3.6.2. Пусть распределение случайной величины следует закону Пуассона:

$$\mathbf{P}(X = n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

По формуле (3.6.10) находим:

$$m(t) = \mathbf{M}e^{Xt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nt} e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t},$$

[1]) Законность этих операций может быть оправдана при довольно широких условиях.

так как сумма ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{\lambda}.$$

Первые две производные от $m(t)$ будут:

$$m'(t) = e^{-\lambda}\lambda e^t e^{\lambda e^t},$$

$$m''(t) = e^{-\lambda}(\lambda e^t \lambda e^t e^{\lambda e^t} + \lambda e^t e^{\lambda e^t}) = e^{-\lambda}\lambda e^t e^{\lambda e^t}(1 + \lambda e^t),$$

откуда

$$\mathbf{M}X = \nu_1 = m'(0) = e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} = \lambda,$$

$$\nu_2 = \mathbf{M}X^2 = m''(0) = e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda}(1 + \lambda) = \lambda(1 + \lambda),$$

$$\mathbf{D}X = \mathbf{M}X^2 - (\mathbf{M}X)^2 = \mu_2 = \lambda(1 + \lambda) - \lambda^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda.$$

Таким образом, если случайная величина следует закону Пуассона, то ее математическое ожидание равно дисперсии и равно параметру λ:

$$\mathbf{M}X = \mathbf{D}X = \lambda. \tag{3.6.14}$$

При вычислении моментов случайной величины часто используется следующее свойство производящей функции суммы независимых случайных величин. Пусть X и Y — независимые случайные величины $m_1(t)$, $m_2(t)$ и $m(t)$, соответственно производящие функции X, Y и $X + Y$.

Имеем:

$$m(t) = \mathbf{M}e^{t(X+Y)} = \mathbf{M}(e^{tX}e^{tY}).$$

На основании теоремы о математическом ожидании произведения независимых случайных величин будем иметь:

$$\mathbf{M}(e^{tX}e^{tY}) = \mathbf{M}e^{tX} \cdot \mathbf{M}e^{tY} = m_1(t)\, m_2(t) = m(t).$$

Это соотношение непосредственно распространяется на случай произвольного конечного числа случайных величин: если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины с производящими функциями $m_1(t), m_2(t), \ldots, m_n(t)$, то производящая функция $m(t)$ суммы $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ равна

$$m(t) = m_1(t) \cdot m_2(t) \ldots m_n(t), \tag{3.6.15}$$

т. е. производящая функция суммы независимых случайных величин равна произведению производящих функций сомножителей.

Именно это свойство и делает применение производящих функций весьма полезным во многих вопросах, связанных с суммами независимых величин.

С другой стороны, производящая функция вполне определяет соответствующий ей закон распределения. Две различные производящие функции отвечают различным законам распределения. Это соответствие между законами распределения и производящими функциями обладает, кроме того, свойством непрерывности в следующем смысле; если какая-либо последовательность производящих функций $m_1(t), m_2(t), \ldots, m_n(t), \ldots$ случайных величин $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$ сходится к производящей функции $m(t)$ некоторой случайной величины X с функцией распределения $F(x)$, то оказывается, что законы распределения $F_1(x)$, $F_2(x), \ldots, F_n(x), \ldots$ последовательности $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$ сходятся в свою очередь к закону $F(x)$, так что в каждой точке непрерывности функции $F(x)$ будем иметь:

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = F(x).$$

Эти предложения мы не будем доказывать, но часто будем убеждаться в их справедливости.

Часто для вычислений центральных моментов используются производящие функции *нормированных* случайных величин, введенных в **3.4.4.**

Найдем производящую функцию $\overline{m}(t)$ закона распределения величины, полученной нормированием X:

$$\overline{m}(t) = \mathbf{M}e^{\frac{X-a}{\sigma}t} = \mathbf{M}(e^{\frac{Xt}{\sigma}}e^{-\frac{at}{\sigma}}) = e^{-\frac{at}{\sigma}}\mathbf{M}e^{\frac{Xt}{\sigma}} = e^{-\frac{at}{\sigma}}m\left(\frac{t}{\sigma}\right),$$

и окончательно

$$\overline{m}(t) = e^{-\frac{at}{\sigma}}m\left(\frac{t}{\sigma}\right), \tag{3.6.16}$$

т. е. производящая функция нормированного отклонения случайной величины, или, иначе, нормированная производящая функция равна произведению $e^{-\frac{at}{\sigma}}$ на производящую функцию от самой величины X, в которой параметр t следует заменить на $\frac{t}{\sigma}$ [1]).

Продифференцировав нормированную производящую функцию r раз и приравняв $t = 0$, мы получим, как и прежде, r-й начальный момент, но теперь это будет $\overline{\nu}_r$ — начальный момент r-го порядка нормированного распределения, т. е. распределения $Z = \frac{X-a}{\sigma_X}$:

$$\frac{d^r}{dt^r}\overline{m}(0) = \overline{\nu}_r = \mathbf{M}\left(\frac{X-a}{\sigma_X}\right)^r = \frac{1}{\sigma_X^r}\mathbf{M}(X-a)^r = \frac{1}{\sigma_X^r}\mathbf{M}(X-\mathbf{M}X)^r. \tag{3.6.17}$$

Но $\mathbf{M}(X-\mathbf{M}X)^r = \mu_r$ и потому

$$\overline{\nu}_r = \frac{\mu_r}{\sigma_X^r}, \tag{3.6.18}$$

т. е. нормированный начальный момент $\overline{\nu}_r$ представляет центральный момент μ_r распределения случайной величины X, выраженный в долях среднего квадратического отклонения σ_X в степени r.

§ 7. Закон больших чисел. Теорема Чебышева

3.7.1. Неравенство Чебышева. При обосновании статистических приемов существенную роль играют теоремы, связывающие определенным образом теоретические и эмпирические числовые характеристики случайных величин.

В разработке этих теорем ведущая роль принадлежит крупнейшим русским ученым П. Л. Чебышеву, А. А. Маркову и другим.

П. Л. Чебышев впервые доказал теорему, устанавливающую, что при определенных условиях средние арифметические случайных величин почти наверно будут близки к их математическим ожиданиям.

Ближайший ученик П. Л. Чебышева и продолжатель его работ академик А. А. Марков доказал эту теорему в еще более широких условиях.

Мы начнем с установления неравенства, введенного Чебышевым и играющего важную роль в доказательстве его теоремы.

Неравенство Чебышева (первая форма). *Какова бы ни была случайная величина X, которая может принимать только неотрицательные значения и имеет конечное математическое ожидание, всегда имеет место неравенство*

$$\mathbf{P}(X \geqslant 1) \leqslant \mathbf{M}X, \tag{3.7.1}$$

[1]) Вообще, рассматривая линейную функцию $Y = \alpha X + \beta$ величины X, найдем:

$$m_Y(t) = \mathbf{M}[e^{(\alpha X+\beta)t}] = e^{\beta t}\mathbf{M}e^{\alpha Xt} = e^{\beta t}m(\alpha t).$$

т. е. вероятность того, что случайная величина X примет значение, не меньшее единицы, не больше ее математического ожидания.

Доказательство. Пусть закон распределения дискретной случайной величины X есть $\mathbf{P}(x)$. Тогда

$$\mathbf{P}(X \geqslant 1) = \sum_{x \geqslant 1} \mathbf{P}(x) \leqslant \sum_{x \geqslant 1} x\mathbf{P}(x) \leqslant \sum_{x} x\mathbf{P}(x) = \mathbf{M}X,$$

что можно пояснить шаг за шагом:

1) По правилу сложения вероятность того, что величина X примет значение, не меньшее единицы, складывается из вероятностей того, что она примет то или иное из своих возможных значений, не меньших единицы, т. е.

$$\mathbf{P}(X \geqslant 1) = \sum_{x \geqslant 1} \mathbf{P}(x). \tag{3.7.2}$$

2) Сумма, стоящая в правой части равенства (3.7.2), распространяется лишь на те значения X, которые не меньше единицы. Поэтому, если мы будем умножать члены $\mathbf{P}(x)$ этой суммы на соответствующие значения x, то эти члены могут только увеличиваться; при этом и вся сумма может только увеличиваться:

$$\sum_{x \geqslant 1} \mathbf{P}(x) \leqslant \sum_{x \geqslant 1} x\mathbf{P}(x). \tag{3.7.3}$$

3) По условию величина X может принимать только неотрицательные значения x, поэтому и выражения вида $x\mathbf{P}(x)$, где x — любое возможное значение величины X, а $\mathbf{P}(x)$ — вероятность этого значения, могут быть только неотрицательными. Следовательно, заменяя сумму произведений $x\mathbf{P}(x)$, где x — значения величины X, удовлетворяющие неравенству $x \geqslant 1$ суммой всех таких произведений $x\mathbf{P}(x)$, распространенных как на значения $x \geqslant 1$, так и на значения, меньшие единицы, мы можем только увеличить сумму, стоящую в правой части неравенства (3.7.3), а поэтому

$$\sum_{x \geqslant 1} x\mathbf{P}(x) \leqslant \sum_{x} x\mathbf{P}(x). \tag{3.7.4}$$

4) Сумма, стоящая в правой части неравенства (3.7.4), представляет собой математическое ожидание случайной величины X, выражаемое формулой (3.3.1), т. е.

$$\sum_{x} x\mathbf{P}(x) = \mathbf{M}X.$$

Подобным же образом можно вывести это неравенство для непрерывных случайных величин.

Следствие. От доказанного нами неравенства можно перейти к несколько более общему. Пусть α — положительное число. Тогда, используя доказанное неравенство, получим для всякой величины, принимающей только неотрицательные значения:

$$\mathbf{P}(X \geqslant \alpha) = \mathbf{P}\left(\frac{X}{\alpha} \geqslant 1\right) \leqslant \mathbf{M}\left(\frac{X}{\alpha}\right) = \frac{\mathbf{M}X}{\alpha}$$

и, значит,

$$\mathbf{P}(X \geqslant \alpha) \leqslant \frac{\mathbf{M}X}{\alpha}. \tag{3.7.5}$$

Неравенство Чебышева (вторая форма). *Какова бы ни была случайная величина X, которая имеет конечное математическое ожидание и конечную дисперсию, и какова бы ни была положительная постоянная величина ε, всегда имеет место неравенство*

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{M}X| < \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{\mathbf{D}X}{\varepsilon^2}. \tag{3.7.6}$$

Доказательство. Рассмотрим не самое интересующее нас неравенство $|X-\mathbf{M}X|<\varepsilon$, а противоположное ему неравенство

$$|X-\mathbf{M}X|\geqslant\varepsilon. \tag{3.7.7}$$

Возведя обе стороны неравенства в квадрат, получим равносильное неравенство

$$(X-\mathbf{M}X)^2\geqslant\varepsilon^2.$$

Теперь применим неравенство Чебышева в форме (3.7.5) к неотрицательной величине $(X-\mathbf{M}X)^2$, полагая $\alpha=\varepsilon^2$; опираясь на соотношение (3.4.6), получим:

$$\mathbf{P}[(X-\mathbf{M}X)^2\geqslant\varepsilon^2]=\mathbf{P}(|X-\mathbf{M}X|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{\mathbf{M}(X-\mathbf{M}X)^2}{\varepsilon^2}=\frac{\mathbf{D}X}{\varepsilon^2},$$

т. е.

$$\mathbf{P}(|X-\mathbf{M}X|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{\mathbf{D}X}{\varepsilon^2}. \tag{3.7.8}$$

Из неравенства (3.7.8) следует:

$$1-\mathbf{P}(|X-\mathbf{M}X|\geqslant\varepsilon)\geqslant 1-\frac{\mathbf{D}X}{\varepsilon^2}. \tag{3.7.9}$$

В формуле (2.2.10) для противоположных событий $|X-\mathbf{M}X|\geqslant\varepsilon$ и $|X-\mathbf{M}X|<\varepsilon$ имеем:

$$1-\mathbf{P}(|X-\mathbf{M}X|\geqslant\varepsilon)=\mathbf{P}(|X-\mathbf{M}X|<\varepsilon). \tag{3.7.10}$$

Заменяя левую часть неравенства (3.7.9) согласно соотношению (3.7.10), получим:

$$\mathbf{P}(|X-\mathbf{M}X|<\varepsilon)\geqslant 1-\frac{\mathbf{D}X}{\varepsilon^2},$$

что и требовалось доказать.

3.7.2. Теорема Чебышева. Сформулируем и докажем теперь теорему Чебышева.

Терема Чебышева. *Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n\ldots$ — серия попарно независимых случайных величин, удовлетворяющих следующим условиям:*

1° *Все величины $X_1, X_2, \ldots, X_n\ldots$ имеют одно и то же математическое ожидание $\mathbf{M}X_1=\mathbf{M}X_2=\ldots=\mathbf{M}X_n=a$.*

2° *Дисперсии величин $X_1, X_2, \ldots, X_n\ldots$ конечны и равномерно ограничены, т. е. $\mathbf{D}X_k<C$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, где C — некоторая положительная постоянная. Тогда, какова бы ни была постоянная положительная величина ε, имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-a\right|<\varepsilon\right)=1. \tag{3.7.11}$$

Доказательство. В силу формул (3.3.12) и (3.3.13)

$$a=\frac{\mathbf{M}X_1+\mathbf{M}X_2+\ldots+\mathbf{M}X_n}{n}=\mathbf{M}\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right).$$

Применим вторую форму неравенства Чебышева к случайной величине $\dfrac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$:

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-a\right|<\varepsilon\right)\geqslant 1-\frac{\mathbf{D}\left(\dfrac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}.$$

Отсюда, опираясь на формулы (3.4.15) и (3.4.17), мы получим:

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-a\right|<\varepsilon\right)\geqslant 1-\frac{\mathbf{D}X_1+\mathbf{D}X_2+\ldots+\mathbf{D}X_n}{n^2\varepsilon^2}. \tag{3.7.12}$$

Но в силу условия 2° теоремы $\mathbf{D}X_1 + \mathbf{D}X_2 + \ldots + \mathbf{D}X_n \leqslant nC$, и потому из (3.7.12) следует

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{nC}{n^2\varepsilon^2} = 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2},$$

а так как вероятность не может быть больше единицы, то мы получаем:

$$1 - \frac{C}{n\varepsilon^2} < \mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right) \leqslant 1,$$

откуда, переходя к пределу при $n \to \infty$, получим (3.7.11).

Большое значение теоремы Чебышева можно пояснить на следующем примере.

Пусть нам предстоит измерить некоторую неизвестную физическую постоянную A.

Будем производить ряд независимых друг от друга измерений. Результаты каждого из измерений можно рассматривать как случайную величину. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — эти случайные величины. Допустим, что средние значения этих величин одинаковы, как это принимается в теории ошибок:

$$\mathbf{M}X_1 = \mathbf{M}X_2 = \ldots = \mathbf{M}X_n = a.$$

Практически это допущение означает, что наши измерения свободны от систематических ошибок.

Допустим далее, что дисперсии этих величин ограничены: $\mathbf{D}X_k < C$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, где C — постоянная.

Практически это означает, что наши измерения производятся с гарантией какой-нибудь, хотя бы и небольшой точности.

Тогда, по теореме Чебышева, увеличивая число наблюдений, можно достичь практической уверенности в том, что среднее арифметическое из результатов наблюдений будет как угодно мало отличаться от истинного значения измеряемой физической постоянной.

3.7.3. Теорема Я. Бернулли. К числу теорем того же типа, что и теорема Чебышева, относится также теорема Якова Бернулли. Эту теорему можно рассматривать как частный случай теоремы Чебышева.

Теорема Якова Бернулли относится к повторению события при постоянной его вероятности в каждом из испытаний, равной p. Это именно тот случай, к которому относится выведенная ранее формула (2.4.1), т. е. случай, называемый схемой независимых последовательных испытаний.

Эту схему называют иногда также схемой Бернулли.

Теорема Бернулли. *С вероятностью, как угодно близкой к достоверности, можно утверждать, что при достаточно большом числе испытаний частость появления события A, имеющего во всех испытаниях постоянную вероятность p, будет как угодно мало отличаться от этой вероятности.*

Теорема Бернулли может быть записана в виде:

$$\lim_{N \to \infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{k}{N} - p\right| < \varepsilon\right) = 1, \tag{3.7.13}$$

где N — число произведенных испытаний, k — число появлений событий A в N испытаниях, ε — как угодно малое положительное число.

Теорема Бернулли непосредственно следует из теоремы Чебышева.

Обозначим через $X_1, X_2, \ldots, X_N$ дискретные случайные величины, представляющие собой числа появлений события A в каждом из N испытаний; очевидно, любая из этих величин X_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ может принимать только

два значения: $x_1 = 1$ с вероятностью p, когда событие A в данном испытании появляется, и $x_2 = 0$ с вероятностью $q = 1 - p$, когда событие A не появляется.

Таблица 3.7.1

X_i	1	0
$\mathbf{P}(x_i)$	p	q

Распределение вероятностей любой из этих дискретных случайных величин X_i будет иметь вид, приведенный в табл. 3.7.1.

Так как испытания независимы, то величины X_1, X_2, ..., X_N также независимы между собой.

Очевидно, что сумма $X_1 + X_2 + \ldots + X_N = k$, т. е. числу появлений события A за все N испытаний потому, что когда событие A появляется в некоторых испытаниях, то величины X, отвечающие этим испытаниям, принимают значения, равные единице, а при непоявлениях события A в других испытаниях отвечающие им величины X принимают значения, равные нулю.

Подсчитаем математическое ожидание и дисперсию каждой из рассматриваемых величин:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{M}X_1 &= 1 \cdot p + 0 \cdot q = p, \\ \mathbf{M}X_1^2 &= 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q = p; \end{aligned}\right\} \tag{3.7.14}$$

$$\mathbf{D}X_1 = \mathbf{M}X_1^2 - (\mathbf{M}X_1)^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq. \tag{3.7.15}$$

Все дисперсии в данном случае будут ограничены, так как каждая из них равна произведению pq и, следовательно, меньше p.

Таким образом, серия величин X_1, X_2, ..., X_N удовлетворяет условиям теоремы Чебышева.

С другой стороны, как мы убедились,

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} = \frac{k}{N} = \mathbf{w}_N(A),$$

т. е. частости появления события A в N испытаниях, но

$$a = \mathbf{M}X_1 = \mathbf{M}X_2 = \ldots = \mathbf{M}X_N = p,$$

и потому

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} - a\right| < \varepsilon\right) = \lim_{N\to\infty} \mathbf{P}(|\mathbf{w}_N(A) - p| < \varepsilon) = 1,$$

что и требовалось доказать.

Опираясь на неравенство Чебышева, мы можем приближенно определить, каково должно быть N, чтобы вероятность $\mathbf{P}_N(\varepsilon)$ неравенства $|\mathbf{w}_N(A) - p| < \varepsilon$ при данном ε (например, $\varepsilon = 0{,}01$) была не меньше заданной границы α (например, $\alpha = 0{,}99$).

Заметим, что в данном случае для дисперсии частости имеем:

$$\mathbf{D}[\mathbf{w}_N(A)] = \mathbf{D}\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{N}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{N} \mathbf{D}X_i}{N^2} = \frac{Npq}{N^2} = \frac{pq}{N} \tag{3.7.16}$$

и

$$\sigma[\mathbf{w}_N(A)] = \sqrt{\frac{pq}{N}}. \tag{3.7.17}$$

Поэтому вторая форма неравенства Чебышева (3.7.6), из которого и следует теорема Бернулли, запишется следующим образом:

$$\mathbf{P}_N(A) = \mathbf{P}(|\mathbf{w}_N(A) - p| < \varepsilon) > 1 - \frac{pq}{N\varepsilon^2}. \tag{3.7.18}$$

Таким образом, $\mathbf{P}_N(A) > 1 - \alpha$, если $\frac{pq}{N\varepsilon^2} < \alpha$ и, значит, если $N > \frac{pq}{\varepsilon^2\alpha}$. Произведение $pq = p(1-p)$ всегда меньше $\frac{1}{4}$; поэтому достаточно взять N при данных ε и α большими $\frac{1}{4\varepsilon^2\alpha}$; например, для $\varepsilon = 0{,}1$ и $\alpha = 0{,}95$ достаточно взять $N > \frac{100}{4 \cdot 0{,}95} = 26$.

В дальнейшем мы укажем более точные оценки для необходимого объема наблюдения, гарантирующего заданную точность и надежность.

Формулировку многих теорем, аналогичных теоремам Чебышева и Бернулли, можно значительно упростить, если использовать понятие о *сходимости случайных величин «по вероятности»*. Под этим мы будем понимать следующее соотношение. Пусть мы имеем последовательность некоторых случайных величин $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ и некоторое постоянное число A. Мы будем говорить, что величины Z_n сходятся по вероятности к A, если при любом положительном ε

$$\mathbf{P}(|Z_n - A| > \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\to} 0, \tag{3.7.19}$$

или, что равносильно этому,

$$\mathbf{P}(|Z_n - A| \leqslant \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\to} 1.$$

Другими словами, величины Z_n почти наверное будут отклоняться меньше чем на ε от постоянной величины A (а вероятность уклонений $(Z_n - A)$ больших чем ε будет близка к нулю), если n будет достаточно велико.

В случае сходимости величин Z_n по вероятности к A мы кратко будем обозначать это обстоятельство в дальнейшем символом

$$Z_n \simeq A.$$

Используя понятие сходимости по вероятности, можно формулировать теорему Чебышева проще, а именно:

Средняя арифметическая независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ сходится по вероятности к общему для этих величин математическому ожиданию.

Аналогично теорема Я. Бернулли состоит в том, что частость при независимых испытаниях сходится по вероятности к вероятности события.

Для того чтобы последовательность величин (Z_n) сходилась по вероятности к A, достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\mathbf{M}(Z_n - A)^2 \underset{n\to\infty.}{\to} 0 \tag{3.7.20}$$

В самом деле, если это условие выполнено, то из неравенства Чебышева (3.7.8) следует

$$0 \leqslant \mathbf{P}(|Z_n - A| > \varepsilon) = \mathbf{P}[(Z_n - A)^2 > \varepsilon^2] < \frac{\mathbf{M}(Z_n - A)^2}{\varepsilon^2},$$

и потому вероятность в этом неравенстве также стремится к нулю, когда $n \to \infty$, так как при этом $\mathbf{M}(Z_n - A)^2 \to 0$ по условию.

Если A есть математическое ожидание величин Z_n, то для сходимости по вероятности к A достаточно, чтобы их дисперсии $\mathbf{D}Z_n$ стремились к нулю при $n \to \infty$.

Практически это наиболее важный достаточный признак сходимости по вероятности последовательности величин. С этим признаком мы будем встречаться в дальнейшем.

3.7.4. Понятие о законе больших чисел. Теоремы типа теорем Чебышева и Бернулли носят общее название *закона больших чисел*.

Часто под законом больших чисел понимают даже еще более общий принцип, в силу которого совокупное действие большого числа случайных факторов приводит при некоторых, достаточно широких условиях к результату, почти не зависящему от случая.

При статистическом исследовании мы опираемся на массовое наблюдение результатов данного процесса, например технологического процесса, и стараемся охарактеризовать его с помощью различных средних, надлежаще выбранных величин, отражающих основные или существенные факторы этого процесса.

Если объем «выборки» (т. е. численность произведенных наблюдений) достаточно велик, то средние согласно закону больших чисел будут приближаться к соответствующим теоретическим характеристикам (вероятность, математическое ожидание и т. п.), которые и описывают основные закономерности изучаемого процесса. Случайность выборки при этом будет погашена или компенсирована именно в силу *массовости* произведенного наблюдения. Поэтому мы получаем объективную оценку нужных нам значений неизвестных параметров.

Закон больших чисел является одним из выражений диалектической связи между случайностью и необходимостью. Он составляет принципиальную основу применения математико-статистических методов к изучению закономерностей массовых явлений.

ГЛАВА IV

НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

§ 1. Композиция законов распределения

4.1.1. Закон распределения суммы дискретных величин. Весьма часто приходится рассматривать распределения сумм независимых случайных величин. Достаточно указать на то, что, например, упоминавшееся ранее биномиальное распределение представляет распределение суммы случайных величин, каждая из которых есть число появлений события в одном испытании (т. е. принимает одно из двух возможных значений 0 или 1).

Нахождение закона распределения суммы по законам распределения независимых слагаемых называется *композицией* законов распределения слагаемых. Последние называются в этом случае *компонентами*.

Рассмотрим вначале независимые дискретные случайные величины X и Y с законами распределения $\mathbf{P}_X(x)$ и $\mathbf{P}_Y(y)$, причем $\mathbf{P}_X(x) = \mathbf{P}(X = x)$ и $\mathbf{P}_Y(y) = \mathbf{P}(Y = y)$. В этом случае ввиду независимости величин полностью определен и двумерный закон распределения $\mathbf{P}_{XY}(xy) = \mathbf{P}(X = x;\ Y = y)$, причем $\mathbf{P}_{XY}(xy) = \mathbf{P}(X = x) \cdot \mathbf{P}(Y = y)$. Следовательно, мы можем считать определенными и распределения различных функций от величин X и Y, например их суммы, произведения и т. д.

Пусть $Z = X + Y$ есть сумма величин X и Y; она, очевидно, также дискретная случайная величина. Заметим, что событие $Z = z$ (тождественное событию $X + Y = z$) подразделяется на частные несовместимые случаи $(X = x;\ Y = z - x)$, в каждом из которых одно из возможных значений величины X в сумме со значением $z - x$ величины Y дает значение Z.

Поэтому, используя правило сложения вероятностей, мы можем написать

$$\mathbf{P}(Z = z) = \sum_x \mathbf{P}(X = x;\ Y = z - x) \tag{4.1.1}$$

и аналогично

$$\mathbf{P}(Z = z) = \sum_y \mathbf{P}(Y = y;\ X = z - y).$$

Заметим, что если при каком-нибудь z и x значение $z - x$ не принадлежит к числу возможных для величины Y значений, мы соответственно считаем вероятность $\mathbf{P}(X = x;\ Y = z - x)$ равной нулю; аналогичное соглашение мы примем и для вероятности $\mathbf{P}(Y = y;\ X = z - y)$.

Так как величины X и Y независимы, то

$$\mathbf{P}(X = x;\ Y = z - x) = \mathbf{P}(X = x) \cdot \mathbf{P}(Y = z - x) = \mathbf{P}_X(x) \cdot \mathbf{P}_Y(z - x)$$

и

$$\mathbf{P}(Y = y;\ X = z - y) = \mathbf{P}(Y = y) \cdot \mathbf{P}(X = z - y) = \mathbf{P}_Y(y) \cdot \mathbf{P}_X(z - y),$$

а потому из (4.1.1) (при нашем соглашении) следует

$$\mathbf{P}_Z(z) = \sum_x \mathbf{P}_X(x) \cdot \mathbf{P}_Y(z - x) = \sum_y \mathbf{P}_Y(y) \cdot \mathbf{P}_X(z - y), \tag{4.1.2}$$

где сумма $\sum_x$ распространяется на все возможные значения x величины X, а сумма $\sum_y$ распространяется на все возможные значения y величины Y.

Соотношение (4.1.2) решает вопрос о композиции дискретных случайных величин.

Пример 4.1.1. Детали обрабатываются на двухшпиндельном автомате. Вероятность p_1 детали, обработанной на первом шпинделе, оказаться по размеру вне некоторых границ равна $p_1 = \frac{2}{5}$, а вероятность p_2 детали, обработанной на втором шпинделе, оказаться вне тех же границ равна $\frac{1}{2}$. Через каждый час берется проба из четырех штук, в которую попадают две детали, обработанные на первом шпинделе и две детали, обработанные на втором шпинделе.

Обозначим через X число деталей с первого шпинделя в пробе, оказавшихся вне установленных границ. Очевидно, величина X может принимать значения $x = 0,1,2$. Через Y обозначим число деталей со второго шпинделя, оказавшихся вне установленных границ. Ясно, что величина Y также может принимать значения $y = 0,1,2$.

Предполагается, что величины X и Y независимы.

Учитывая сказанное в **2.4.1** и в **2.4.2**, нетрудно убедиться в том, что законы распределения $\mathbf{P}_X(x)$ и $\mathbf{P}_Y(y)$ случайных величин X и Y будут выражаться соотношениями

$$\mathbf{P}_X(k) = C_2^k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{2-k},$$

$$\mathbf{P}_Y(m) = C_2^m \left(\frac{1}{2}\right)^m \left(\frac{1}{2}\right)^{2-m} = C_2^m \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

По этим законам распределения величин X и Y легко составить таблицы распределений вероятностей величин X и Y (табл. 4.1.1 и 4.1.2).

Таблица 4.1.1

X	0	1	2	
$\mathbf{P}_X(x)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{25}{25}$

Таблица 4.1.2

Y	0	1	2	
$\mathbf{P}_Y(y_j)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{4}$

Найдем теперь распределение числа Z деталей в пробе из четырех штук, оказавшихся по размерам вне установленных границ.

Из условия данного примера следует, что $Z = X + Y$.

Тогда с помощью соотношения (4.1.2) получим:

$$\mathbf{P}_Z(z=0) = \mathbf{P}_X(0) \cdot \mathbf{P}_Y(0) = \frac{9}{25} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{100}.$$

В данном случае «сумма» $\sum_x$ приводится к одному члену, так как значение $z = 0$ может получиться при одном единственном возможном варианте, а именно,

когда $x=0$ и $y=z-x=0-0=0$.

$$P_Z(1)=\sum_x P_X(x)\cdot P_Y(1-x)=P_X(0)\cdot P_Y(1-0)+P_X(1)\cdot P_Y(1-1)=$$
$$=P_X(0)\cdot P_Y(1)+P_X(1)\cdot P_Y(0)=\frac{9}{25}\cdot\frac{2}{4}+\frac{12}{25}\cdot\frac{1}{4}=\frac{30}{100};$$
$$P_Z(2)=\sum_x P_X(x)\cdot P_Y(2-x)=P_X(0)\cdot P_Y(2-0)+P_X(1)\cdot P_Y(2-1)+$$
$$+P_X(2)\cdot P_Y(2-2)=P_X(0)\cdot P_Y(2)+P_X(1)\cdot P_Y(1)+P_X(2)\cdot P_Y(0)=$$
$$=\frac{9}{25}\cdot\frac{1}{4}+\frac{12}{25}\cdot\frac{2}{4}+\frac{4}{25}\cdot\frac{1}{4}=\frac{37}{100};$$
$$P_Z(3)=\sum_x P_X(x)\cdot P_Y(3-x)=P_X(1)\cdot P_Y(2)+P_X(2)\cdot P_Y(1)=$$
$$=\frac{12}{25}\cdot\frac{1}{4}+\frac{4}{25}\cdot\frac{2}{4}=\frac{20}{100}.$$

Заметим, что при $Z=3$ величина X не может принять значение $X=0$, так как при этом должно быть $Y=3$, что невозможно. Наконец,

$$P_Z(4)=P_X(2)\cdot P_Y(4-2)=P_X(2)\cdot P_Y(2)=\frac{4}{25}\cdot\frac{1}{4}=\frac{4}{100}.$$

Составим таблицу распределения вероятностей величины Z (табл. 4.1.3).

Таблица 4.1.3

z	0	1	2	3	4	
$P_Z(z)$	$\frac{9}{100}$	$\frac{30}{100}$	$\frac{37}{100}$	$\frac{20}{100}$	$\frac{4}{100}$	$\frac{100}{100}$

Из табл. 4.1.3 видно, что величина Z не следует биномиальному закону; в самом деле, предполагая последнее, мы должны бы иметь для некоторых p и q $(p+q=1)$:

$$P(z=4)=C_4^4p^4q^0=p^4=\frac{4}{100}$$

и, начит,

$$p=\sqrt[4]{\frac{4}{100}}=\sqrt{\frac{2}{10}}.$$

С другой стороны,

$$P(z=0)=C_4^0\cdot q^4=\frac{9}{100},$$

откуда

$$q=\sqrt[4]{\frac{9}{100}}=\sqrt{\frac{3}{10}}.$$

Но в данном случае

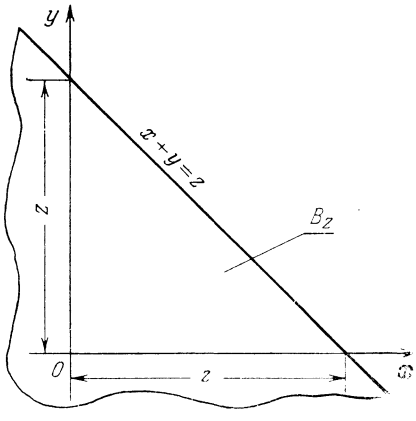
$$\sqrt{\frac{2}{10}}+\sqrt{\frac{3}{10}}\neq 1,$$

и потому распределение величины Z, заданное приведенной выше таблицей, не является в точности биномиальным, хотя и довольно близко приближается к нему.

4.1.2. Закон распределения суммы непрерывных величин. Перейдем теперь к непрерывным случайным величинам, когда система независимых величин X и Y имеет распределение с плотностью вероятности

$$\varphi_{X,Y}(x,\ y)=\varphi_X(x)\cdot\varphi_Y(y),$$

где $\varphi_X(x)$ и $\varphi_Y(y)$ — плотности вероятности величин X и Y в одномерном распределении.



Черт. 29. Полуплоскость B_Z, представляющая область возможных значений события $x+y<z$, ограниченная прямой $x+y=z$.

Вероятность $\mathbf{P}(Z<z)=\mathbf{P}(X+Y<z)$ можно рассматривать в этом случае как вероятность попасть случайной точке Q с координатами (X, Y) в ту область плоскости (x, y), в которой координаты удовлетворяют неравенству

$$x+y<z.$$

Эта область образует полуплоскость B лежащую ниже прямой $x+y=z$ (черт. 29); таким образом,

$$F_Z(z)=\mathbf{P}(Z<z)=\mathbf{P}(X+Y<z)=$$
$$=\mathbf{P}(Q(X, Y)\in B_Z) \qquad (4.1.3)$$

(знак $\in$ означает принадлежность точки Q полуплоскости B_Z).

Но для подсчета вероятности попадания точки Q в заданную область, как мы знаем, следует проинтегрировать плотность $\varphi_{X,Y}(x, y)$ по этой области:

$$\mathbf{P}(Q(X, Y)\in B_Z)=\iint\limits_{B_Z}\varphi_{X,Y}(x, y)\,dx\,dy=\iint\limits_{B_Z}\varphi_X(x)\,\varphi_Y(y)\,dx\,dy. \qquad (4.1.4)$$

Приведем теперь интеграл (4.1.4) к повторному интегралу, интегрируя сначала по y (при данном x) вдоль оси y, причем y при этом интегрировании будет изменяться от $-\infty$ до $z-x$, а затем проведем интегрирование по x от $-\infty$ до $+\infty$:

$$\iint\limits_{B_Z}\varphi_X(x)\,\varphi_Y(y)\,dx\,dy=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_X(x)\,dx\int\limits_{-\infty}^{z-x}\varphi_Y(y)\,dy=$$
$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_X(x)\,F_Y(z-x)\,dx, \qquad (4.1.5)$$

так как по определению интегральная функция распределения

$$F_Y(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}\varphi_Y(y)\,dy.$$

Таким образом, сопоставляя (4.1.5) и (4.1.3), приходим к выводу

$$F_Z(z)=\mathbf{P}(Z<z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_X(x)\,F_Y(z-x)\,dx.$$

Дифференцируя это равенство по z[1]), придем, принимая во внимание, что $\frac{dF_Y(z-x)}{dz}=\varphi_Y(z-x)$, к соотношению

$$\varphi_Z(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_X(x)\,\varphi_Y(z-x)\,dx. \qquad (4.1.6)$$

[1]) Законность этой операции под знаком интеграла может быть оправдана.

Аналогично можно получить равносильную формулу

$$\varphi_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_Y(y)\,\varphi_X(z-y)\,dy. \tag{4.1.7}$$

Вероятностный смысл формул композиции (4.1.6) и (4.1.7) прост. Левые части этих формул после умножения на dz дают вероятность попадания Z в дифференциально малый промежуток $(z,\ z+dz)$. Правые части после умножения на dz можно рассматривать как выражение той же величины по формуле полной вероятности. Один множитель под интегралом (заменяющим здесь знак суммы) выражает при этом вероятность предположения относительно возможного значения одного из слагаемых (например, $\varphi_X(x)\,dx$), а второй — $\varphi_Y(z-x)\,dz$ есть условная вероятность равенства $Z=X+Y=z+dz$ при сделанном предположении. Таким образом, (4.1.6) и (4.1.7) вполне аналогичны (4.1.2).

Пример 4.1.2. Пусть величина X подчиняется нормальному закону с параметрами a и σ (см. **3.1.2**), а величина Y равномерно распределена в интервале $(-h,\ +h)$. В этом случае

$$\varphi_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\qquad -\infty<x<\infty,$$

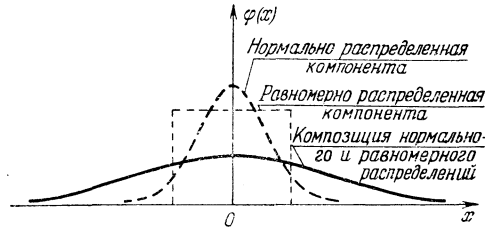
$$\varphi_Y(y)=\begin{cases}0 & \text{при } y<-h,\\ \dfrac{1}{2h} & \text{при } -h\leqslant y\leqslant h,\\ 0 & \text{при } y>h.\end{cases}$$

Применяя (4.1.7) и замечая, что $\varphi_Y(y)\neq 0$ лишь в промежутке $-h,\ h$, получим для плотности композиции X и Y

$$\varphi_Z(z)=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\frac{e^{-\frac{(z-y-a)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,dy.$$

Если в интеграле сделать подстановки $y=z-a+t\sigma$ $(dy=\sigma\,dt)$, то $\varphi_Z(z)$ выразится следующей формулой:

$$\varphi_Z(z)=\frac{1}{2h\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{-h-z+a}{\sigma}}^{\frac{h-z+a}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt. \tag{4.1.8}$$



Черт. 30. Композиция нормального и равномерного распределений.

Полагая $a=0$ и $|h|<\sigma$, мы будем иметь график композиции X и Y вида, представленного на черт. 30.

В случае, когда величины X и Y ограничены так, что

$$a\leqslant X\leqslant b$$

и

$$c\leqslant Y\leqslant d,$$

следует при интегрировании в (4.1.6) принимать во внимание, что плотности $\varphi_X(x)$ и $\varphi_Y(y)$ обращаются в нуль соответственно вне пределов $(a,\ b)$ и $(c,\ d)$. В этом случае возможные положения случайной точки $Q(X,\ Y)$ заполняют прямоугольник R, стороны которого образованы пересечением пар прямых $x=a$, $x=b$, $y=c$ и $y=d$, параллельных осям x и y (черт. 31). Для определения закона распределения Z теперь достаточно определить вероятность попадания в область B'_Z, лежащую внутри R под прямой $x+y=z$. При этом, очевидно,

для z нужно принять в расчет только те значения, которые отвечают прямым, действительно пересекающим прямоугольник R. Легко видеть, что такие значения лежат в промежутке $(a+c,\ b+d)$, вне которого $\varphi_Z(z)=0$.

Если распределения X и Y равномерны в промежутках $(a,\ b)$ и $(c,\ d)$, то при $a \leqslant x \leqslant b$ и $c \leqslant y \leqslant d$

$$\varphi_X(x)\varphi_Y(y)\cdot dx\,dy = \frac{dx}{b-a}\,\frac{dy}{d-c}$$

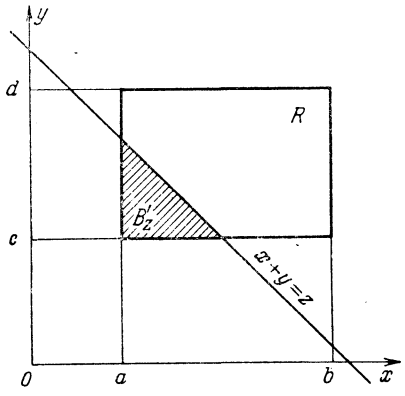
и

$$\mathbf{P}(Z<z) = \iint\limits_{B'_Z} \varphi_X(x)\varphi_Y(y)\,dx\,dy = \frac{1}{(b-a)(d-c)} \iint\limits_{B'_Z} dx\,dy = \frac{S_Z}{S_R}, \quad (4.1.9)$$

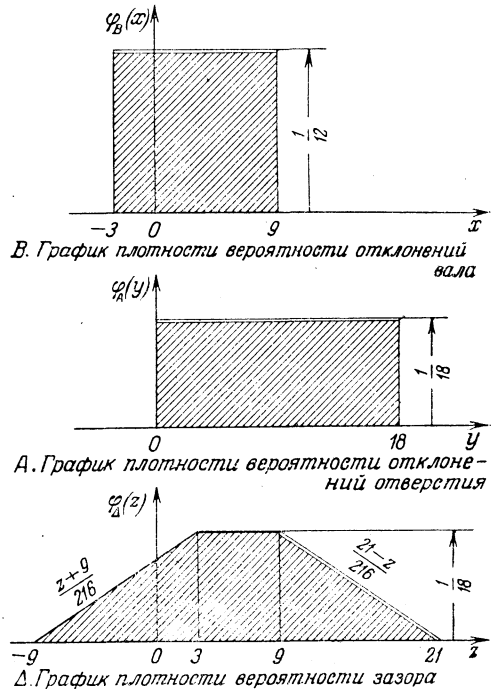
где S_Z — площадь области B'_Z; S_R — площадь прямоугольника R.

В зависимости от положения прямой $x+y=z$ относительно сторон R мы будем иметь различные виды областей B'_Z, но площади их вычисляются элементарно.

Пример 4.1.3. В гладком цилиндрическом сопряжении, заданном размером $5\frac{A_{2a}}{\Pi_{2a}}$ (т. е. при номинальном размере сопряжения, равном 5 *мм*, при плотной посадке $2a$ класса точности в системе отверстия), отклонения вала (B) и отверстия (A) от номинального размера следуют закону равной вероятности. Требуется определить плотность вероятности зазора.



Черт. 31. Геометрическая интерпретация закона распределения композиции Z двух случайных величин X и Y.



Черт. 32. Плотность вероятности зазора (Δ) при равномерно распределенных отклонениях отверстия (A) и вала (B).

Из соотношения (3.1.11) следует, что каждая из заштрихованных площадей прямоугольников на графиках плотностей вероятности отклонений вала и отверстия (черт. 32) равна единице.

Поэтому при размерах вала и отверстия, равных соответственно

$$5^{+0,009}_{-0,003}\ мм \quad \text{и} \quad 5^{+0,018}\ мм,$$

плотности вероятности уклонений этих величин от номинального размера

в микронах (*мк*) будут:

$$\varphi_B(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<-3 \text{ и } x>9,\\ \frac{1}{12} & \text{при } -3\leqslant x\leqslant 9;\end{cases} \tag{4.1.10}$$

$$\varphi_A(y)=\begin{cases}0 & \text{при } y<0 \text{ и } y>18,\\ \frac{1}{18} & \text{при } 0\leqslant y\leqslant 18.\end{cases} \tag{4.1.11}$$

Известно, что зазор Δ равен

$$\Delta=A-B=A+(-B),$$

где A, B — соответственно отклонения размеров отверстия и вала от номинального размера, которые предполагаются независимыми.

Плотность вероятности $\varphi_{-B}(x)$ величины B связана с $\varphi_B(x)$ следующим соотношением:

$$\varphi_{-B}(x)=\varphi_B(-x), \tag{4.1.12}$$

носящим вполне общий характер.

В самом деле, очевидно, $\mathbf{P}(-B<x)=\mathbf{P}(B>-x)$ или $F_{-B}(x)=1-F_B(-x)$.

Дифференцируя это тождество по x, получим (4.1.12).

Задача определения плотности Δ в нашем случае сводится, таким образом, к компонированию величины A с плотностью (4.1.10) с величиной $-B$ с плотностью

$$\varphi_{-B}(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x \text{ лежит вне промежутка } (-9,3),\\ \frac{1}{12}, & \text{если } x \text{ лежит внутри этого промежутка.}\end{cases}$$

В данном примере прямоугольник R имеет вид, показанный на черт. 33. Очевидно, промежуток, в котором варьирует величина z, будет $(-9,21)$.

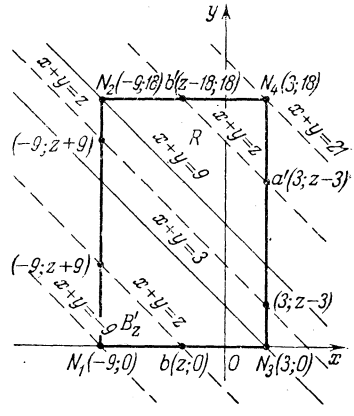
Если $-9\leqslant z\leqslant 3$, то прямая $x+y=z$ отсекает равнобедренный треугольник aN_1b с катетами, равными $z+9$ (катеты эти легко находятся хотя бы из того условия, что длина вертикального катета может быть приравнена ординате точки его пересечения с прямой $x+y=3$, причем абсциссы этой точки будут равны -9); поэтому

$$S_Z=\frac{(z+9)^2}{2},$$

$$\mathbf{P}(Z<z)=\frac{S_Z}{S_R}=\frac{(z+9)^2}{2\cdot 216}=\frac{(z+9)^2}{432}. \tag{4.1.13}$$

Если $3\leqslant z\leqslant 9$, то B'_Z будет иметь вид трапеции, площадь которой $S'_Z=\frac{z-3+9+z}{2}\cdot 12=12(z+3)$ и, следовательно,

$$\mathbf{P}(Z<z)=\frac{S'_Z}{S_R}=\frac{(z+3)}{18}. \tag{4.1.14}$$



Черт. 33. Геометрический способ нахождения плотности вероятности зазора Δ при равномерных распределениях отклонений отверстия (A) и вала (B).

Наконец, если z лежит в промежутке (9, 21), то прямая $x+y=z$ отсекает от R треугольник $a'N_4b'$ с площадью

$$S''_Z=\frac{(18-z+3)^2}{2}=\frac{(21-z)^2}{2},$$

и потому

$$\mathbf{P}(Z<z)=1-\frac{S_Z''}{S_R}=1-\frac{(21-z)^2}{432}. \tag{4.1.15}$$

Дифференцируя (4.1.13), (4.1.14) и (4.1.15), найдем выражение плотности вероятности зазора Δ в виде

$$\varphi_\Delta(z)=\begin{cases}\dfrac{z+9}{216} & \text{при } -9\leqslant z\leqslant 3,\\ \dfrac{1}{18} & \text{при } 3\leqslant z\leqslant 9,\\ \dfrac{21-z}{216} & \text{при } 9\leqslant z\leqslant 21.\end{cases} \tag{4.1.16}$$

§ 2. Моменты некоторых дискретных распределений

4.2.1. Моменты биномиального распределения. Как уже указывалось в **2.4.1**, биномиальное распределение относится к схеме независимых последовательных испытаний, производимых при постоянной для данной серии этих испытаний вероятности p появления определенного исхода (события).

При рассмотрении числа таких исходов в серии из s последовательных испытаний мы приходим к дискретной случайной величине x, могущей принимать значения 0, 1, 2, ..., s. Вероятность случайной величине x принять каждое из таких значений определяется формулой

$$\mathbf{P}_s(x=k)=C_s^k p^k q^{s-k}.$$

Основное приложение биномиального закона составляет так называемая возвратная или *повторная* статистическая выборка; в этом случае взятый наудачу объект после фиксации его признаков возвращается обратно в партию объектов, из которых производится выборка; таким образом, перед каждым выбором, независимо от результатов предшествующих выборов, мы имеем дело с одной и той же совокупностью объектов.

Вычислим с помощью производящей функции начальные моменты биномиального распределения.

Найдем сначала производящую функцию распределения

$$m(t)=\mathbf{M}e^{Xt}=\sum_{k=0}^{s}e^{kt}C_s^k p^k q^{s-k}=\sum_{k=0}^{s}C_s^k(pe^t)^k q^{s-k}=(pe^t+q)^s, \tag{4.2.1}$$

так как сумма $\sum_{k=0}^{s}C_s^k(pe^t)^k q^{s-k}$ представляет собой сумму членов разложения по формуле Ньютона бинома вида $(pe^t+q)^s$.

К этому выражению мы могли бы прийти и другим путем.

Найдем сначала производящую функцию $m_1(t)$ случайной величины X, представляющей число появлений интересующего нас исхода (события A) в одном испытании.

Эта величина может, очевидно, принять только два значения: 1 (при появлении события A) с вероятностью p и 0 (при непоявлении события A) с вероятностью q. Поэтому

$$m_1(t)=\mathbf{M}e^{tx_1}=pe^{t\cdot 1}+qe^{t\cdot 0}=pe^t+q.$$

Случайная величина X — число появлений события A в s последовательных испытаниях — представляет сумму одинаково распределенных случайных величин $X_1+X_2+\ldots+X_s$.

Производящие функции $m_1(t)$, $m_2(t)$, ..., $m_s(t)$ равны по только что доказанному pe^t+q.

Так как производящая функция суммы нескольких независимых случайных величин, как мы видели в **3.6.2**, равна произведению производящих функций слагаемых, то

$$m(t) = m_1(t)\, m_2(t) \ldots m_s(t) = (pe^t + q)^s.$$

Продифференцировав производящую функцию $m(t)$, получим:

$$m'(t) = s(pe^t + q)^{s-1} pe^t. \tag{4.2.2}$$

Полагая в (4.2.2) $t = 0$ и принимая во внимание (3.6.12), найдем выражение для первого момента (математического ожидания)

$$\mathbf{M}X = \nu_1 = m'(0) = sp(p+q)^{s-1} = sp \qquad (p+q=1). \tag{4.2.3}$$

Отсюда следует, что среднее значение частости $\frac{X}{s}$ появления события равно вероятности p события

$$\mathbf{M}\left(\frac{X}{s}\right) = \frac{sp}{s} = p. \tag{4.2.4}$$

Формулы (4.2.3) и (4.2.4) отвечают нашему непосредственному представлению о вероятности; заметим, что вероятнейшее число появлений события отличается от $\nu_1 = sp$ менее чем на единицу, как это мы видели в **2.4.2**.

Аналогичным образом найдем:

$$m''(t) = s(s-1)(pe^t + q)^{s-2} p^2 e^{2t} + sp(pe^t + q)^{s-1} e^t \tag{4.2.5}$$

и, полагая $t = 0$,

$$\nu_2 = m''(0) = s(s-1)p^2 + sp = s^2p^2 + spq. \tag{4.2.6}$$

Таким же путем найдем:

$$\nu_3 = (sp)^3 + 3q(sp)^2 + spq(q-p), \tag{4.2.7}$$

$$\nu_4 = (sp)^4 + 6s^3p^3q + s^2p^2q(7q-4p) + spq(1-6pq). \tag{4.2.8}$$

В силу (3.6.5) и (3.6.7) получаем важную формулу для дисперсии

$$\mathbf{D}X = \mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = (sp)^2 + spq - (sp)^2 = spq. \tag{4.2.9}$$

Для дисперсии частости $\frac{X}{s}$ найдем:

$$\mathbf{D}\left(\frac{X}{s}\right) = \frac{1}{s^2} spq = \frac{pq}{s}, \tag{4.2.10}$$

что было получено другим путем в **3.7.3** (при $s = N$). Среднее квадратическое отклонение при биномиальном распределении будет равно:

$$\sigma_x = +\sqrt{\mathbf{D}X} = +\sqrt{spq} \tag{4.2.11}$$

и

$$\sigma_{\frac{x}{s}} = \sqrt{\frac{pq}{s}}. \tag{4.2.12}$$

Из формул видно, что частость по вероятности стремится к ее математическому ожиданию, т. е. вероятности события p, так как

$$\mathbf{D}\left(\frac{X}{s}\right) \to 0, \quad \mathbf{M}\left(\frac{X}{s} - p\right)^2 \to 0, \quad s \to \infty.$$

Пусть X и Y — две независимые случайные величины, имеющие обе биномиальные распределения с одним и тем же значением параметра p в каждом из них и со значениями s_1 и s_2 параметра s.

Случайными величинами X и Y могут, например, быть числа появлений исхода A в двух независимых рядах s_1 и s_2 последовательных испытаний. Тогда

сумма $X+Y$ будет равна числу появлений исхода A в объединенном ряде s_1+s_2 последовательных испытаний.

На основании соотношения (3.6.15) производящая функция случайной величины $X+Y$ будет:

$$m(t)=\mathbf{M}e^{t(X+Y)}=\mathbf{M}e^{tX}\cdot\mathbf{M}e^{tY}=(pe^t+q)^{s_1}\cdot(pe^t+q)^{s_2}=(pe^t+q)^{s_1+s_2}. \quad (4.2.13)$$

Мы пришли к производящей функции биномиального распределения того же типа, что и производящая функция (4.2.1), но с параметрами p и s_1+s_2, откуда следует, что величина $X+Y$ при сделанных предположениях будет подчиняться биномиальному закону.

Пример 4.2.1. Случайная величина представляет число деталей, выходящих по своим размерам за контрольные границы, из пробы в 10 штук деталей.

Вероятность того, что одна деталь выйдет по размерам за контрольные границы, равна $p=0{,}2$.

Требуется найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

По формуле (4.2.3) находим математическое ожидание:

$$\mathbf{M}X=sp=10\cdot 0{,}2=2 \text{ штуки.}$$

Определяем по формуле (4.2.9) дисперсию:

$$\mathbf{D}X=spq=10\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8=1{,}6.$$

Вычисляем среднее квадратическое отклонение по формуле (4.2.11):

$$\sigma_X=\sqrt{spq}=\sqrt{1{,}6}=1{,}26.$$

4.2.2. Моменты гипергеометрического распределения. Гипергеометрическое распределение возникает при исследовании безвозвратной статистической выборки (см. **2.2.3**), характеризующейся тем, что взятый объект обратно в совокупность не возвращается. Случайной величиной X является число объектов, имеющих признак A из общего числа s объектов, попавших в выборку. Совокупность, из которой отбирается выборка, состоит из S объектов, из которых K объектов обладают признаком A. Вероятность случайной величине X принять какое-либо значение x ($x=0, 1, 2, \ldots, s$) определяется по одной из формул

$$\mathbf{P}_{S,K}(X=x)=\frac{C_K^x\cdot C_{S-K}^{s-x}}{C_S^s}=\frac{K!}{x!(K-x)!}\cdot\frac{(S-K)!}{(s-x)!}\cdot\frac{s!}{S!}\cdot\frac{(S-s)!}{(S-K-s+x)!}=$$

$$=\frac{K(K-1)\ldots(K-x+1)}{x!}\cdot\frac{(S-K)\ldots(S-K-s+x+1)}{(s-x)!}\cdot\frac{s!}{S(S-1)\ldots(S-s+1)}. \quad (4.2.14)$$

Так как события $X=x$ образуют полную группу, то

$$\sum_{x=0}^{s}\mathbf{P}_{S,K}(X=x)=1, \quad (4.2.15)$$

откуда, принимая во внимание (4.2.14), получим такое тождество:

$$\sum_{x=0}^{s}C_K^xC_{S-K}^{s-x}=C_S^s. \quad (4.2.16)$$

Гипергеометрический закон имеет три параметра: объем выборки s, объем всей совокупности S и вероятность $p=\frac{K}{S}$ того, что первая отобранная деталь будет иметь признак A. Найдем математическое ожидание случайной величины $X=x$, следующей гипергеометрическому закону.

По соотношению (3.3.2) имеем:

$$\mathbf{M}X = \sum_{x=0}^{s} xP_{S,K}(X=x) = 0 \cdot P_{S,K}(X=0) + \sum_{x=1}^{s} xP_{S,K}(X=x) = \sum_{x=1}^{s} xP_{S,K}(X=x).$$

С другой стороны, для $x \geqslant 1$ имеем:

$$xP_{S,K}(X=x) = \frac{xC_K^x C_{S-K}^{s-x}}{C_S^s}. \tag{4.2.17}$$

Но

$$xC_K^x = \frac{K!x}{x!(K-x)!} = \frac{K!}{(x-1)!(K-x)!} = KC_{K-1}^{x-1}$$

и потому из (4.2.17) следует:

$$xP_{S,K}(X=x) = \frac{KC_{K-1}^{x-1}C_{S-K}^{s-x}}{C_S^s}$$

и

$$\mathbf{M}X = \frac{K}{C_S^s}\sum_{x=1}^{s} C_{K-1}^{x-1}C_{S-K}^{s-x}$$

или при замене индекса суммирования x на $x' = x-1$

$$\mathbf{M}X = \frac{K}{C_S^s}\sum_{x'=0}^{s-1} C_{K-1}^{x'}C_{S-K}^{s-1-x'}.$$

Согласно тождеству (4.2.16) последняя сумма равна C_{S-1}^{s-1} и потому

$$\mathbf{M}X = \frac{KC_{S-1}^{s-1}}{C_S^s} = \frac{K(S-1)!}{(s-1)!(S-s)!}\frac{s!(S-s)!}{S!} = s\frac{K}{S}.$$

Итак,

$$\mathbf{M}X = sp. \tag{4.2.18}$$

Найдем теперь дисперсию случайной величины X, следующей гипергеометрическому закону. Для этого найдем сначала математическое ожидание $\mathbf{M}[X(X-1)]$ произведения $X(X-1)$, где X следует гипергеометрическому закону.

Заметив, что $X(X-1)$ обращается в нуль для $X=0$ и $X=1$, будем иметь:

$$\mathbf{M}[X(X-1)] = \frac{1}{C_S^s}\sum_{x=2}^{s} x(x-1)C_K^x C_{S-K}^{s-x}.$$

Но при $x \geqslant 2$

$$x(x-1)C_K^x = \frac{K!x(x-1)}{x!(K-x)!} = K(K-1)C_{K-2}^{x-2}$$

и потому

$$\mathbf{M}[X(X-1)] = \frac{K(K-1)}{C_S^s}\sum_{x=2}^{s} C_{K-2}^{x-2}C_{S-K}^{s-x} = \frac{K(K-1)}{C_S^s}\sum_{x''=0}^{s-2} C_{K-2}^{x''}C_{S-K}^{s-2-x''},$$

где $x'' = x-2$.

Принимая снова во внимание тождество (4.2.16), найдем:

$$\mathbf{M}[X(X-1)] = \frac{K(K-1)}{C_S^s}C_{S-2}^{s-2} = \frac{K(K-1)(S-2)!s!(S-s)!}{(s-2)!(S-s)!S!} = \frac{K(K-1)}{S(S-1)}s(s-1).$$

Сделаем преобразование

$$\mathbf{M}[X(X-1)] = \mathbf{M}(X^2 - X) = \mathbf{M}X^2 - \mathbf{M}X,$$

откуда

$$\mathbf{M}X^2 = \mathbf{M}[X(X-1)] + \mathbf{M}X = \frac{s(s-1)K(K-1)}{S(S-1)} + s\frac{K}{S}.$$

По соотношению (3.4.7) находим:

$$\mathbf{D}X = \mathbf{M}X^2 - (\mathbf{M}X)^2 = \frac{s(s-1)K(K-1)}{S(S-1)} + \frac{sK}{S} - \frac{s^2K^2}{S^2} =$$

$$= \frac{sK}{S}\left[\frac{(s-1)(K-1)}{S-1} + 1 - \frac{sK}{S}\right] = \frac{sK}{S}\left[\frac{(s-1)(K-1)S + (S-1)\cdot S - sK(S-1)}{S(S-1)}\right] =$$

$$= \frac{sK}{S}\left(\frac{sKS - SK - sS + S + S^2 - S - sKS + sK}{S(S-1)}\right) = \frac{sK(S-K)(S-s)}{S^2(S-1)}$$

и окончательно

$$\mathbf{D}X = \frac{sK(S-K)\cdot(S-s)}{S^2(S-1)} = spq\,\frac{1-\frac{s}{S}}{1-\frac{1}{S}}, \tag{4.2.19}$$

где

$$p = \frac{K}{S} \quad \text{и} \quad q = \frac{S-K}{S}.$$

Определим среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_X = \sqrt{\mathbf{D}(X)} = \sqrt{\frac{sK(S-K)\cdot(S-s)}{S^2(S-1)}}. \tag{4.2.20}$$

Отметим, что при $S \to \infty$ правая часть соотношения (4.2.19) стремится к значению spq, выражающему дисперсию биномиального распределения (4.2.9) величины X.

Вообще, при малых отношениях $\frac{s}{S}$ гипергеометрическое распределение мало отличается от биномиального. При $s = S$, когда безвозвратной выборкой охвачена вся совокупность, будем иметь случай сплошного обследования; в этом случае (4.2.19) дает $\mathbf{D}(X) = 0$ при $\mathbf{M}X = Sp = K$. Это значение X достоверно.

Пример 4.2.2. Пусть из партии в 1000 штук деталей, из которых 200 «плюсовых», берется безвозвратная выборка в количестве 50 штук. Требуется определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа «плюсовых» деталей в выборке

По формулам (4.2.18), (4.2.19) и (4.2.20) получим:

$$\mathbf{M}X = sp = 50\frac{200}{1000} = 10 \text{ штук},$$

$$\mathbf{D}X = \frac{sK(S-K)(S-s)}{S^2(S-1)} = \frac{50\cdot 200\,(1000-200)(1000-50)}{1000^2(1000-1)} = 7{,}6 \text{ шт}^2,$$

$$\sigma_X = \sqrt{7{,}6} = 2{,}76 \text{ штуки}.$$

Заметим, что вычисление дисперсии по приближенной формуле

$$\mathbf{D}X \approx spq$$

приведет к довольно близкому результату

$$\mathbf{D}X \approx 50 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = 8.$$

Гипергеометрическое распределение практически близко к биномиальному с параметрами $p = \frac{K}{S}$ и $q = \frac{S-K}{S}$, если объем совокупности S достаточно велик.

4.2.3. Моменты распределения Пуассона. Возьмем производящую функцию распределения Пуассона, выведенную нами в примере 3.6.2:

$$m(t) = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda (e^t - 1)}. \tag{4.2.21}$$

Дифференцируя производящую функцию последовательно и вычисляя затем значения производных в точке $t = 0$, найдем:

$$\nu_1 = m^{\mathrm{I}}(0) = \lambda, \tag{4.2.22}$$

$$\nu_2 = m^{\mathrm{II}}(0) = \lambda^2 + \lambda, \tag{4.2.23}$$

$$\nu_3 = m^{\mathrm{III}}(0) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda, \tag{4.2.24}$$

$$\nu_4 = m^{\mathrm{IV}}(0) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda. \tag{4.2.25}$$

Из соотношения (3.6.4) следует, что

$$\mathbf{M}X = \nu_1 = \lambda, \tag{4.2.26}$$

т. е. математическое ожидание случайной величины, следующей закону Пуассона, равно параметру λ этого закона.

Из соотношений (3.6.4) и (3.6.7) выводим далее:

$$\mathbf{D}X = \mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda, \tag{4.2.27}$$

т. е. дисперсия случайной величины, следующей закону Пуассона, как уже указывалось, равна параметру этого закона и численно равна математическому ожиданию случайной величины (хотя имеет другую размерность).

Среднее квадратическое отклонение при распределении Пуассона будет:

$$\sigma_X = \sqrt{\mathbf{D}X} = \sqrt{\lambda}. \tag{4.2.28}$$

Если случайная величина представляет сумму $X + Y$ двух независимых случайных величин X и Y, следующих каждая закону Пуассона, то она также следует закону Пуассона.

В самом деле, пусть случайная величина X следует закону

$$\mathbf{P}_1(X = k) = \frac{\lambda_1^k e^{-\lambda_1}}{k!}$$

и случайная величина Y — закону

$$\mathbf{P}(Y = k) = \frac{\lambda_2^k e^{-\lambda_2}}{k!}.$$

На основании соотношения (3.6.15) производящая функция суммы $X + Y$ будет равна произведению производящих функций X и Y:

$$m(t) = \mathbf{M}e^{t(x+y)} = \mathbf{M}e^{tx}\mathbf{M}e^{ty} = m_1(t) \cdot m_2(t) = e^{\lambda_1(e^t-1)} e^{\lambda_2(e^t-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^t-1)}. \tag{4.2.29}$$

Мы пришли к производящей функции распределения того же типа, что производящая функция (4.2.21), но с параметром $\lambda_1 + \lambda_2$, откуда следует, что величина $X + Y$ будет подчиняться закону Пуассона.

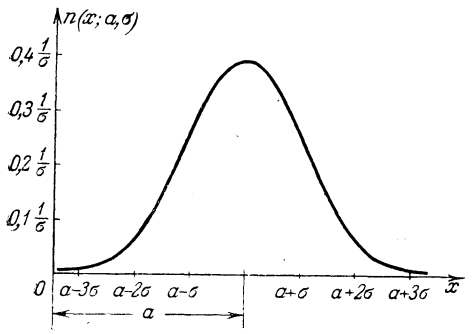
§ 3. Нормальное распределение

4.3.1. Нормальная плотность вероятности и нормальная функция распределения. *Нормальной плотностью* вероятности называется плотность, определяемая равенством

$$n(x;\ a,\ \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \tag{4.3.1}$$

где a и σ — постоянные числа — параметры распределения.

Соответствующая этой плотности дифференциальная кривая распределения имеет вид, показанный на черт. 34.



Черт. 34. Дифференциальная кривая нормального распределения.

Нормальная функция распределения по соотношению (3.1.12) определяется из (4.3.1) в виде

$$N(x;\ a,\ \sigma) = \int_{-\infty}^{x} n(u;\ a,\ \sigma)\, du. \tag{4.3.2}$$

Чтобы оправдать эти определения, нужно еще проверить, что функция $N(x;\ a,\ \sigma)$ обладает всеми свойствами функции распределения и, следовательно,

$$n(x;\ a,\ \sigma) = \frac{dN(x;\ a,\ \sigma)}{dx}$$

является плотностью вероятности при всех возможных значениях параметров $a\ (-\infty < a < +\infty)$ и $\sigma\ (0 < \sigma < \infty)$.

Из (4.3.2) следует, что $N(x;\ a,\ \sigma)$ есть возрастающая и неотрицательная функция, причем

$$\lim_{x \to -\infty} N(x;\ a,\ \sigma) = 0.$$

В самом деле, подинтегральная функция в (4.3.2), определенная равенством (4.3.1), неотрицательна и потому с возрастанием x функция $N(x;\ a,\ \sigma)$ может только возрастать. Тем самым эта функция обладает свойствами (3.1.2) и (3.1.4) функции распределения.

Остается теперь показать, что она обладает и свойством (3.1.5) функции распределения, т. е. что

$$\lim_{x \to \infty} N(x;\ a,\ \sigma) = 1$$

или что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}} du = 1$$

при всех значениях параметров a и σ.

Сделав подстановку $\frac{u-a}{\sigma} = t$, $du = \sigma\, dt$, мы получим:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Справа мы получили интеграл, совсем не зависящий от параметров. Этот интеграл равен единице, т. е.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1. \tag{4.3.3}$$

В самом деле, в силу симметрии кривой около оси y достаточно показать, что площадь под кривой над положительной полуосью x равна $^1/_2$, т. е.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=\frac{1}{2}.$$

Для доказательства мы рассмотрим вспомогательную функцию

$$z=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

и возьмем от нее двойные интегралы по трем областям (черт. 35): 1) по квадрату D со стороной a, ограниченному осями координат и прямыми $x=a$ и $y=a$, 2) по четверти круга (s) $x^2+y^2=a^2$ радиуса a, лежащей в первом квадранте, и, наконец, 3) по четверти круга (S) $x^2+y^2=2a^2$ радиуса $\sqrt{2}a$, тоже расположенной в первом квадранте. Так как функция z положительна, то

$$\iint\limits_{(s)} z\,dx\,dy<\iint\limits_{D} z\,dx\,dy<\iint\limits_{(S)} z\,dx\,dy. \tag{4.3.4}$$

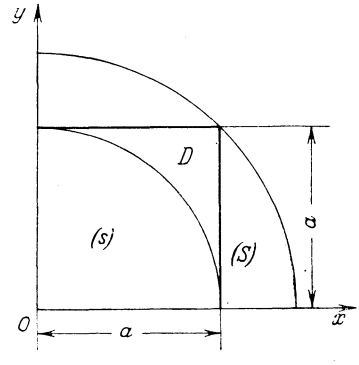
Но интеграл по квадрату D легко привести к произведению однократных интегралов, а именно

$$\iint\limits_D \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}}{2\pi}\,dx\,dy=$$

$$=\int_0^a \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx\cdot\int_0^a \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dy=\Phi(a)\,\Phi(a)=[\Phi(a)]^2, \tag{4.3.5}$$

где

$$\Phi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^u e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$



Черт. 35. Доказательство равенства $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt=1$.

Для вычисления интеграла по (S) введем полярные координаты

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,$$

$$x^2+y^2=r^2.$$

Вспоминая, что дифференциал площади в полярных координатах равен $r\,dr\,d\varphi$, получим:

$$\iint\limits_{(s)} z\,dx\,dy=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^a e^{-\frac{r^2}{2}}\,r\,dr=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^a d\left(-e^{-\frac{r^2}{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^a=\frac{1}{4}\left(1-e^{-\frac{a^2}{2}}\right). \tag{4.3.6}$$

Аналогичным образом, заменяя в предшествующем равенстве область (s) на (S) и a на $\sqrt{2}\,a$, получим:

$$\iint\limits_{(S)} z\,dx\,dy=\frac{1}{4}(1-e^{-a^2}). \tag{4.3.7}$$

Подставляя (4.3.5), (4.3.6) и (4.3.7) в (4.3.4) и извлекая квадратный корень, получим:

$$\frac{1}{2}\sqrt{1-e^{-\frac{a^2}{2}}} < \Phi(a) < \frac{1}{2}\sqrt{1-e^{-a^2}}. \tag{4.3.8}$$

Будем теперь неограниченно увеличивать a и, замечая, что

$$\lim_{a\to\infty} e^{-\frac{a^2}{2}} = \lim_{a\to\infty} e^{-a^2} = 0,$$

найдем, что левая и правая части неравенства (4.3.8) стремятся к $1/2$. Отсюда следует, что

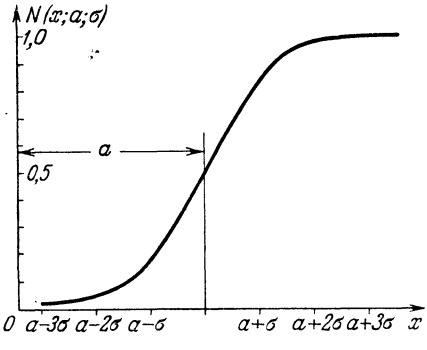
$$\lim_{a\to\infty} \Phi(a) = \lim_{a\to\infty} \int_0^a \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = \frac{1}{2},$$

т. е.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{1}{2},$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, функция $N(x;\ a,\ \sigma)$ обладает всеми тремя свойствами функции распределения. Соответствующая этой функции интегральная кривая распределения показана на черт. 36.



Черт. 36. Интегральная кривая нормального распределения.

Из равенства (4.3.1) и черт. 34 видно, что нормальное распределение симметрично относительно ординаты, отвечающей значению x, равному a. Это значение является поэтому центром группирования (математическим ожиданием) распределения. Если изменять a, то кривая $y = n(x;\ a,\ \sigma)$ будет перемещаться вдоль оси x, сохраняя свою форму. С возрастанием абсолютной величины уклонения $(x - a)$, т. е. по мере удаления от точки a оси x, ордината кривой $n(x;\ a,\ \sigma)$ быстро убывает; наибольшая ордината, отвечающая значению $x = a$, имеет величину $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} = n(a;\ a,\ \sigma)$. Эта ордината и является осью симметрии кривой. При $a = 0$ имеем семейство «центрированных» нормальных кривых

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = n(x;\ 0,\ \sigma). \tag{4.3.9}$$

Когда параметр σ уменьшается, начальная ордината кривой растет. Подъем кривой в центральной части компенсируется более резким спадом ее к оси x, так что общая величина площади остается неизменной и равной единице. При очень малых значениях σ кривая становится похожей на тонкую иглу, направленную вдоль оси y. Почти вся площадь под кривой сконцентрирована на небольшом интервале с центром в нуле.

При возрастании σ, наоборот, происходит «сплющивание» кривой, принимающей все более плосковершинную форму (черт. 37).

Чаще всего, однако, нормальный закон применяется не в исходном (4.3.1) и не в центрированном (4.3.9) виде, а в виде *нормированного распределения*. Нормирование распределения, как уже указывалось в **3.4.4**, вообще говоря, за-

ключается в переходе от величины X (распределенной в данном случае согласно закону $N(x;\ a,\ \sigma)$ к вспомогательной линейной функции

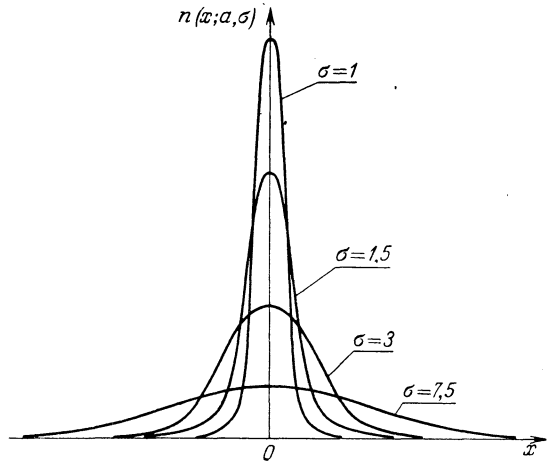
$$Z = \frac{X-a}{\sigma},$$

для которой

$$F_Z(z) = \mathbf{P}(Z < z) = \mathbf{P}\left(\frac{X-a}{\sigma} < z\right) = \mathbf{P}(X < a + z\sigma). \quad (4.3.10)$$

При нормальном распределении из (4.3.10) и (4.3.2) будем иметь:

$$\mathbf{P}(X < a + z\sigma) = N(a + z\sigma;\ a,\ \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{a+z\sigma} e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}}\,du,$$



Черт. 37. Семейство «центрированных» нормальных кривых распределения с $\sigma = 1$; 1,5; 3; 7,5.

откуда (заменяя переменное интеграции u на новое v, пользуясь подстановкой $v = \frac{u-a}{\sigma}$ и $dv = \frac{du}{\sigma}$) получим:

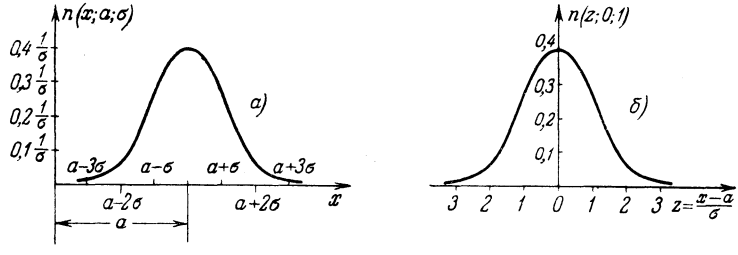
$$\mathbf{P}(Z < z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{v^2}{2}}\,dv = N(z;\ 0,\ 1). \quad (4.3.11)$$

Дифференцируя (4.3.11) по верхнему пределу, получим:

$$\frac{dN(z;\ 0,\ 1)}{dz} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}} = n(z;\ 0,\ 1). \quad (4.3.12)$$

Таким образом, если произвести нормирование распределения $N(x;\ a,\ \sigma)$, т. е. осуществить переход от величины X к величине Z, то нормированная плотность вероятности выразится равенством (4.3.12), в котором уже отсутствуют неизвестные параметры. Ординаты кривой, заданной (4.3.12), табулированы. В табл. III приложений приведены значения этих ординат для значений z от 0 до 4,99.

Функция распределения нормированной величины X определяется формулой (4.3.11).



Черт. 38. Последствия нормирования нормальных кривых распределения: *а*) нормальная кривая, *б*) нормированная нормальная кривая.

Все вопросы, связанные с нормальным распределением величины X, обычно решают, переходя к вспомогательной величине Z, т. е. нормируя это распределение. Нормирование распределения, как нетрудно понять, ведет к перенесению начала координат в центр группирования (черт. 38), т. е. к центрированию рас-

пределения, и к выражению абсциссы в долях σ, которое, как мы дальше увидим, представляет среднее квадратическое отклонение величины X, т. е. $\sigma = \sigma_X$.

Следовательно, нормированное распределение является таким центрированным распределением, в котором абсцисса выражена в долях σ.

Заметим, что любую кривую $n(x; a, \sigma)$, определяемую равенством (4.3.1), можно получить из кривой $n(z; 0, 1)$, определяемой равенством (4.3.12), путем элементарного преобразования аргумента

$$z = a + x\sigma, \tag{4.3.13}$$

состоящего из параллельного переноса вдоль оси абсцисс и преобразования масштаба.

Пример 4.3.1. Для построения графика плотности вероятности по точкам нормально распределенного диаметра втулки $60^{+0,06}$ при $\sigma_X = 10$ *мк* требуется найти ординаты кривой при значениях отклонений от номинального размера

$$X = 0,\ 5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30,\ 35,\ 40,\ 45,\ 50,\ 55,\ 60\ \textit{мк}.$$

Находим $z = \frac{x-a}{\sigma}$ и для полученных значений z по табл. III приложений находим плотности вероятности.

Таблица 4.3.1

$x_{мк}$	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
z	-3	$-2,5$	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
$n(z;0,1)$	0,0044	0,0175	0,0540	0,1295	0,2420	0,3521	0,3989	0,3521	0,2420	0,1295	0,0540	0,0175	0,0044

4.3.2. Моменты нормального распределения. Найдем теперь моменты нормального распределения. Для этого сначала определим производящую функцию нормального распределения; она может быть получена из соотношения (3.6.11) и равенства (4.3.1)

$$m_n(t) = \mathbf{M}e^{tX} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} e^{xt}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx.$$

Сделаем подстановку $z = \frac{x-a}{\sigma}$, $x = z\sigma + a$, $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sigma}$, $dx = \sigma\,dz$ и

$$m_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(z\sigma+a)t-\frac{z^2}{2}}\,dz.$$

Так как

$$(z\sigma + a)t - \frac{z^2}{2} = at - \frac{1}{2}(z^2 - 2tz\sigma) = at + \frac{t^2\sigma^2}{2} - \frac{1}{2}(z - t\sigma)^2,$$

то

$$m_n(t) = e^{at+\frac{t^2\sigma^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(z-t\sigma)^2}\,dz.$$

С другой стороны, интеграл $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(z-t\sigma)^2}{2}}dz$ после подстановки $z-\sigma t=u$ приводится к виду

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du=1,$$

как это следует из соотношения (4.3.3), и потому

$$m_n(t)=e^{at+\frac{t^2\sigma^2}{2}}. \tag{4.3.14}$$

Продифференцировав два раза производящую функцию (4.3.14) нормального распределения, получим:

$$m_n'(t)=e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}+at}(a+t\sigma^2), \tag{4.3.15}$$

$$m_n''(t)=e^{at+\frac{t^2\sigma^2}{2}}(t^2\sigma^4+2at\sigma^2+a^2+\sigma^2). \tag{4.3.16}$$

Теперь на основании соотношения (3.6.13) при $t=0$ найдем *начальные моменты нормального распределения*:

$$\nu_1=m_n'(0)=a, \tag{4.3.17}$$

$$\nu_2=m_n''(0)=a^2+\sigma^2. \tag{4.3.18}$$

Из соотношения (3.6.4) следует, что

$$\mathbf{M}X=\nu_1=a, \tag{4.3.19}$$

т. е., как мы это видели и ранее, математическое ожидание случайной величины, следующей нормальному закону, равно параметру a этого закона.

Из соотношений (3.6.5) и (4.6.7) выводим:

$$\mathbf{D}X=\mu_2=\nu_2-\nu_1^2=a^2+\sigma^2-a^2=\sigma^2, \tag{4.3.20}$$

т. е. дисперсия случайной величины, следующей нормальному закону, равна квадрату параметра σ этого закона.

Среднее квадратическое отклонение при нормальном распределении получается при помощи соотношения (4.3.20)

$$\sigma_X=\sqrt{\mathbf{D}X}=\sqrt{\sigma^2}=\sigma, \tag{4.3.21}$$

т. е. параметр σ нормального закона распределения представляет среднее квадратическое отклонение σ_X случайной величины X, следующей этому закону.

Вычислим третий и четвертый центральные моменты μ_3 и μ_4 нормального распределения.

Заметим, что, по определению,

$$\mu_s=\mathbf{M}(X-a)^s,$$

и, обозначая через $\bar{\nu}_s$ момент s порядка нормированного уклонения $z=\frac{X-a}{\sigma}$, найдем:

$$\bar{\nu}_s=M\left(\frac{X-a}{\sigma}\right)^s\approx\frac{\mathbf{M}(X-a)^s}{\sigma^s}=\frac{\mu_s}{\sigma^s}.$$

Таким образом,

$$\mu_s=\bar{\nu}_s\sigma^s. \tag{4.3.22}$$

С другой стороны, производящую функцию величины Z (распределенной нормально с плотностью $n(z; 0, 1)$) получим из (4.3.14), полагая $a = 0$ и $\sigma = 1$:

$$\overline{m}_n(t) = e^{\frac{t^2}{2}}. \tag{4.3.23}$$

Разлагая $e^{\frac{t^2}{2}}$ в ряд, получим:

$$e^{\frac{t^2}{2}} = 1 + \frac{t^2}{2 \cdot 1!} + \frac{(t^2)^2}{2^2 \cdot 2!} + \frac{(t^2)^3}{2^3 \cdot 3!} + \frac{(t^2)^4}{2^4 \cdot 4!} + \ldots, \tag{4.3.24}$$

т. е. ряд будет содержать только члены с четными степенями. Сопоставляя это с соотношением (3.6.13), приходим к выводу, что все нечетные начальные моменты нормированного нормального распределения равны нулю, т. е.

$$\overline{\nu}_1 = \overline{\nu}_3 = \overline{\nu}_5 = \ldots = 0. \tag{4.3.25}$$

И поэтому нечетные центральные моменты величин X ввиду (4.3.22) также равны нулю.

С другой стороны, коэффициент при четной степени t^{2s} разложения $\overline{m}_n(t)$ в (4.3.24) равен

$$\frac{1}{2^s s!}.$$

Он отличается от производной $\left.\frac{d^{2s} m(t)}{dt^{2s}}\right|_{t=0}$ лишь множителем $\frac{1}{2s!}$, так как по известной формуле Маклорена коэффициент при t^{2s} равен $\frac{m^{(2s)}(0)}{(2s)!}$. Поэтому

$$\frac{d^{2s}}{dt^{2s}} \overline{m}_n(0) = \frac{(2s)!}{2^s s!} = \overline{\nu}_{2s} = \frac{\mu_{2s}}{\sigma^{2s}}. \tag{4.3.26}$$

В частности, при $s = 1$ будем иметь $\frac{\mu_2}{\sigma^2} = \frac{2!}{2^1 \cdot 1!} = 1$ и $\mu_2 = \sigma^2$, т. е., как мы видели и раньше, центральный момент второго порядка случайной величины X, следующей нормальному закону, равен σ^2.

При $s = 2$ по соотношению (4.3.26) получим:

$$\frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{4!}{2^2 \cdot 2!} = 3, \tag{4.3.27}$$

т. е. отношение центрального момента четвертого порядка к среднему квадратическому отклонению в четвертой степени при нормальном законе распределения равно трем.

Пример 4.3.2. Случайная величина X задана нормальной плотностью вероятности $n(x; 50, 6)$ со значениями параметров $a = 50$ *мк* и $\sigma = 60$ *мк*.

Требуется определить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, третий и четвертый центральные моменты распределения.

По соотношениям (4.3.1) и (4.3.19) устанавливаем, что

$$\mathbf{M}X = a = 50 \text{ мк}.$$

По соотношениям (4.3.1) и (4.3.20) определяем:

$$\mathbf{D}X = \sigma^2 = 36 \text{ мк}^2.$$

На основании (4.3.21) среднее квадратическое отклонение равно

$$\sigma_X = \sigma = 6 \text{ мк}.$$

По соотношению (4.3.25) устанавливаем, что

$$\mu_3 = 0.$$

По соотношению (4.3.27) находим:

$$\frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3, \qquad \mu_4 = 3 \cdot 6^4 = 3 \cdot 1296 = 3888 \ мк^4.$$

Нормальное распределение обладает следующим очень важным свойством: если случайная величина представляет сумму $X + Y$ двух независимых случайных величин X и Y, следующих каждая нормальному закону, то она также следует нормальному закону.

В самом деле, пусть случайная величина X следует закону

$$n_1(x;\ a_1,\ \sigma_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

и случайная величина Y закону

$$n_2(x;\ a_2,\ \sigma_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(x-a_2)^2}{2\sigma_2^2}}.$$

Тогда производящие функции величин X и Y будут равны

$$m_1(t) = e^{a_1 t + \frac{t^2\sigma_1^2}{2}}$$

и

$$m_2(t) = e^{a_2 t + \frac{t^2\sigma_2^2}{2}}.$$

На основании соотношения (3.6.15) производящая функция суммы $X + Y$ будет равна произведению производящих функций величин X и Y, т. е.

$$m(t) = m_1(t) \cdot m_2(t) = e^{a_1 t + \frac{t^2\sigma_1^2}{2}} \cdot e^{a_2 t + \frac{t^2\sigma_2^2}{2}} = e^{(a_1+a_2)t + \frac{t^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{2}}. \quad (4.3.28)$$

Мы пришли к производящей функции (4.3.28) того же типа, что и функции величин X и Y, т. е. к производящей функции нормального распределения (4.3.14), но с параметрами $a = a_1 + a_2$ и $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$. Отсюда следует, что случайная величина $X + Y$ будет подчиняться нормальному закону

$$n(x;\ a_1 + a_2,\ \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}).$$

Полученный результат можно легко распространить на любое число величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, каждая из которых следует нормальному закону. Сумма любого числа нормально распределенных независимых величин нормально распределена; при этом центр распределения суммы равен сумме центров слагаемых, а дисперсия суммы равна сумме дисперсий. Композиция нормальных законов приводит, следовательно, к закону того же типа. Это свойство носит название *устойчивости* нормального закона.

Пример 4.3.3. Независимые случайные величины X и Y заданы плотностями вероятностей $n_1(x;\ 50,\ 6)$ и $n_2(x;\ 40,\ 5)$. Требуется найти плотность вероятности случайной величины

$$U = X + Y.$$

По соотношению (4.3.28) находим:

$$\mathbf{M}U = \mathbf{M}X + \mathbf{M}Y = 40 + 50 = 90 \ мк,$$

$$\mathbf{D}U = \mathbf{D}X + \mathbf{D}Y = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 = 6^2 + 5^2 = 61 \ мк^2,$$

$$\sigma_U = \sqrt{61} = 7{,}8,$$

откуда искомая плотность случайной величины U будет:

$$n(x;\ 90;\ 7{,}8).$$

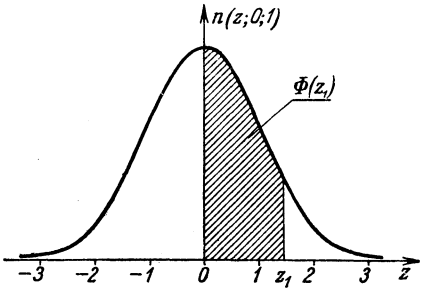
4.3.3. Функция Лапласа. Для определения вероятности $\mathbf{P}(x_1 < X < x_2)$ нахождения в интервале $(x_1,\ x_2)$ случайной величины X, следующей нормальному закону, приходится вычислять определенный интеграл вида

$$\mathbf{P}(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{x_1-a}{\sigma}}^{\frac{x_2-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz. \qquad (4.3.29)$$

Однако неопределенный интеграл

$$\int e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$$

не выражается через известные элементарные функции. Но определенный интеграл в некоторых пределах может быть теми или иными приемами вычислен с какой угодно степенью точности. Вычисления его могут быть, например, произведены посредством интегрирования степенного ряда или посредством механических квадратур.



Черт. 39. Геометрическая интерпретация функции Лапласа.

Определенный интеграл с переменным верхним пределом вида

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-\frac{v^2}{2}}\,dv, \qquad (4.3.30)$$

выражающий площадь под кривой $n(z;\ 0,\ 1)$ в промежутке от 0 до z (черт. 39), носит название *нормированной функции Лапласа* или просто *функции Лапласа*. Для него существуют таблицы значений, вычисленные вышеуказанным путем. В табл. IV приложений приведены значения функции Лапласа для значений z от 0 до 5 через 0,01.

Заметим, что

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi(-\infty) = -\frac{1}{2}, \quad \Phi(+\infty) = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \Phi(-z) = -\Phi(z),$$

т. е. площадь в промежутке $(0,\ -z)$ равна площади в промежутке $(0,\ z)$, но считается отрицательной.

Интегральную функцию нормального распределения можно выразить через функцию Лапласа следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{0} n(z;\ 0;\ 1)\,dz + \int_0^z n(z;\ 0;\ 1)\,dz = N(z;\ 0;\ 1) = 0{,}5 + \Phi(z). \qquad (4.3.31)$$

Если теперь воспользоваться функцией Лапласа, то формула (4.3.29) примет вид

$$\mathbf{P}(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{x_2-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{x_1-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz =$$

$$= \Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right). \qquad (4.3.32)$$

Вообще

$$\mathbf{P}(-\infty < X < x_1) = N(x; a, \sigma) = \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right) - \Phi(-\infty) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right). \quad (4.3.33)$$

Пример 4.3.4. Втулка диаметра $60^{+0,06}$ входит в узел, собираемый по методу группового подбора, причем допуски сопрягаемых деталей подразделяются на четыре равные части (группы).

Требуется определить вероятность того, что диаметры втулок будут находиться в пределах второй группы, если известно, что окончательная обработка производится на станке, настраиваемом на середину поля допуска и обеспечивающем $\sigma_x = 10$ *мк* при нормальном распределении диаметра втулок.

В нашем случае $x_1 = +15$ *мк* и $x_2 = +30$ *мк*. При настройке станка на середину поля допуска будем иметь:

$$\mathbf{M}X = +30 \text{ мк}$$

и потому по формуле (4.3.32) получим:

$$\mathbf{P}(15 \leqslant X \leqslant 30) = \Phi\left(\frac{30-30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{15-30}{10}\right) = \Phi(0) - \Phi(-1,5) = \Phi(1,5) = 0,4332.$$

Значение $\Phi(1,5)$ при $z = 1,5$ берем по табл. IV приложений. Иногда при вычислениях удобнее пользоваться удвоенной функцией Лапласа, т. е.

$$2\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{v^2}{2}}\, dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z}^{+z} e^{-\frac{v^2}{2}}\, dv. \quad (4.3.34)$$

Графически этот интеграл представляет площадь под нормальной кривой в промежутке от $-z$ до $+z$.

В табл. V приложений приведены значения удвоенной функции Лапласа для значений z от 0 до 3,99 через 0,01.

Пример 4.3.5. Математическое ожидание отклонения x нормально распределенного диаметра втулки равно $\mathbf{M}X = +30$ *мк*. Среднее квадратическое отклонение $\sigma_X = 10$ *мк*.

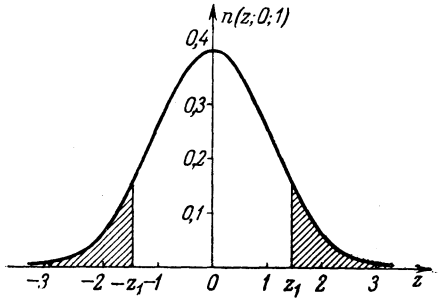
Требуется определить вероятность того, что диаметр втулки будет иметь отклонения от $+10$ до $+50$.

Определяем сначала нормированные значения абсцисс

$$z_1 = \frac{10-30}{10} = -2, \quad z_2 = \frac{50-30}{10} = +2.$$

По табл. V приложений при $z = 2$ находим:

$$\mathbf{P}(+10 < X < +50) = \mathbf{P}(-2 < Z < +2) = 2\Phi(2) = 0,95450.$$



Черт. 40. Крайние площади на графике плотности вероятности нормированного нормального распределения.

Часто бывает нужно знать вероятность Q_z того, что случайная величина X будет отличаться от ее среднего значения $a = \mathbf{M}X$ больше, чем на взятое z раз среднее квадратическое отклонение σ_X. Эта вероятность равна

$$Q_z = \mathbf{P}(|X - \mathbf{M}X| > z \cdot \sigma_X) = \mathbf{P}(|Z| > z) = 1 - 2\Phi(z) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z}^{+z} e^{-\frac{v^2}{2}}\, dv. \quad (4.3.35)$$

Графически вероятность Q_z представляет сумму двух крайних площадей на графике плотности вероятности, заштрихованных на черт. 40.

Значение $z = z_q$, соответствующее $Q = \frac{q}{100}$, называется *q-процентным значением* нормального отклонения.

Для $z = 3$ $Q_z = 0{,}0027$; таким образом, вероятность превзойти утроенное среднее квадратическое отклонение менее $0{,}27\%$. Поэтому во многих вопросах практически допустимыми пределами отклонения считают пределы $a \pm 3\sigma$.

В табл. VI приложений приведены значения вероятности Q_z того, что случайная величина X будет отличаться от ее среднего значения MX больше, чем на взятое q раз среднее квадратическое отклонение при значениях z_q от 0,0 до 30.

В табл. VII приложений приведены q-процентные значения нормальных отклонений q при значениях вероятности $q = 100Q$ от 100 до $0{,}01\%$ и значения вероятности q в процентах при значениях z_q от 0,0 до 4,0.

Пример 4.3.6. Требуется определить вероятность того, что нормально распределенный диаметр $60_{-0{,}06}$ валика выйдет за границы поля допуска, если известно, что $\sigma_X = 12$ *мк* и настройка производится на середину допуска. По формуле (4.3.19) находим математическое ожидание $MX = a = \frac{-60}{2} = -30$ *мк*.

Находим:

$$z_q = \frac{0 - 30}{12} = -2{,}5.$$

По табл. VI приложений при $z_q = 2{,}5$ находим:

$$P(|X + 30| > 30) = P(|Z| > 2{,}5) = 0{,}0124.$$

Пример 4.3.7. По условиям примера 4.3.6 требуется определить: 1) при каких допускаемых отклонениях диаметра валика вероятность выхода за границы поля допуска будет $0{,}1\%$ и 2) вероятность выхода диаметра валика за границу $-+0{,}018$ *мм*?

1) По табл. VII приложений для $q = 0{,}1$ находим $z_q = 3{,}2905$, откуда

$$z_q\sigma = 3{,}29 \cdot 12 = 39{,}48 \text{ мк} \approx 40 \text{ мк}.$$

Поэтому

$$P(|X + 30| > 40) \approx 0{,}001 = 0{,}1\%.$$

Следовательно, искомые наименьшие и наибольшие допустимые отклонения будут:

$$x_{нм} = -30 - 40 = -70 \text{ мк} = -0{,}07 \text{ мм}, \quad x_{нб} = -30 + 40 = +10 \text{ мк} = +0{,}01 \text{ мм}.$$

2) Находим $z_q = \frac{18 - (-30)}{12} = 4$. По табл. VII приложений при $z_q = 4$ находим:

$$q = 0{,}006\%.$$

4.3.4. Обоснование нормального распределения в трудах П. Л. Чебышева, А. А. Маркова и А. М. Ляпунова. В обосновании статистической теории кривых распределения наметились два диаметрально противоположных пути.

Первый путь — это путь русской классической школы теории вероятностей (П. Л. Чебышев, А. А. Марков, А. М. Ляпунов) — путь глубокого теоретического исследования условий возникновения рассеивания, отображающих существенные черты реальных процессов.

Второй путь — это путь английской школы математической статистики, основоположник которой Карл Пирсон предложил особую систему «интерполяционных» кривых для чисто внешнего описания картины эмпирического распределения. Этот формальный подход, характерный для идеалистической установки английской школы, был связан вместе с тем с отказом от анализа реальных условий рассеивания. Он, естественно, оказался в целом бесплодным, так как

не уяснял, а скорее затушевывал внутренние закономерности исследуемых процессов.

Теоретико-вероятностное обоснование некоторых из типов распределений, предложенных Пирсоном, было получено позднее на совершенно другом пути и обязано работам А. А. Маркова, С. Н. Бернштейна, А. Н. Колмогорова и других советских ученых. Именно этот — первый путь — соответствует основным положениям марксистско-ленинской теории познания.

Наиболее распространенными теоретическими схемами условий возникновения рассеивания значений случайных величин, схемами, приводящими к определенным теоретическим кривым распределения, являются такие, когда случайная величина является суммой большого числа независимых и относительно малых слагаемых (схема суммы).

Эта схема была впервые исчерпывающим образом исследована в трудах П. Л. Чебышева, А. А. Маркова и А. М. Ляпунова. Основная закономерность, установленная ими, обычно формулируется в виде так называемой «центральной предельной теоремы». Оказалось, что в достаточно широких условиях схема суммы приводит к нормальному распределению.

Остановимся на предельной теореме А. М. Ляпунова. Эта теорема относится к распределению суммы независимых случайных величин.

В несколько упрощенном виде *теорема Ляпунова* может быть сформулирована следующим образом.

Пусть

$$S_n = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n,$$

где $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ — независимые случайные величины, число которых n неограниченно возрастает.

Рассмотрим нормированное уклонение суммы S_n, т. е. величину

$$Z_n = \frac{S_n - \mathbf{M}S_n}{\sqrt{\mathbf{D}S_n}}$$

и функцию распределения Z_n обозначим

$$F_n(z) = \mathbf{P}(Z_n < z).$$

Тогда, если при $n \to \infty$ *выполняется условие*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}\,|\,Y_i - \mathbf{M}Y_i\,|^3}{(\mathbf{D}S_n)^{3/2}} \to 0, \tag{4.3.36}$$

то для любых действительных чисел z

$$\lim_{n\to\infty} F_n(z) = N(z;\ 0;\ 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \frac{1}{2} + \Phi(z). \tag{4.3.37}$$

Таким образом, при выполнении условия (4.3.36) сумма большого числа независимых слагаемых будет приближенно следовать нормальному закону распределения. Смысл условия (4.3.36) сводится к тому, что в сумме S должны отсутствовать слагаемые, могущие принимать значения, сравнимые по своему порядку со всей суммой; другими словами, роль отдельных слагаемых в образовании суммы должна быть исчезающе мала при большом n.

Заметим, что условие Ляпунова (4.3.36) всегда выполняется, если сумма состоит из одинаково распределенных слагаемых, обладающих каждое конечной дисперсией и третьим абсолютным моментом. В самом деле, в этом случае

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}\,|\,Y_i - \mathbf{M}Y_i\,|^3 = n\mathbf{M}\,|\,Y_1 - \mathbf{M}Y_1\,|^3 = nb, \tag{4.3.38}$$

так как все слагаемые имеют равные значения. В то же время на основании теоремы о дисперсии суммы независимых случайных величин

$$\mathbf{D}S_n = n \cdot \sigma^2,$$

где σ^2 — дисперсия каждого из n независимых одинаково распределенных слагаемых и потому

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}\,|\,Y_i - \mathbf{M}Y_i\,|^3}{(\mathbf{D}S_n)^{3/2}} = \frac{n \cdot b}{(n \cdot \sigma^2)^{3/2}} = \frac{b}{\sqrt{n}\,\sigma^3}.$$

Эта величина стремится к нулю при возрастании n (b и σ — постоянные).

Таким образом, нормированная сумма одинаково распределенных независимых слагаемых будет на основании теоремы Ляпунова при большом n распределена приближенно нормально.

То, что условие (4.3.36) соблюдается при отсутствии слагаемых, которые могут принимать значения, большие, чем сумма большинства остальных слагаемых, видно из следующего. Пусть все величины Y_i ограничены, так что их значения (а следовательно, и математические ожидания) лежат в некотором интервале $(-L; L)$, где L — положительное постоянное число. Тогда для любого из слагаемых

$$\mathbf{M}\,|\,Y_i - \mathbf{M}Y_i\,|^3 \leqslant 2L\mathbf{M}\,(Y_i - \mathbf{M}Y_i)^2 = 2L\mathbf{D}Y_i,$$

откуда следует, что

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}\,|\,Y_i - \mathbf{M}Y_i\,|^3 \leqslant 2L \sum_{i=1}^{n} \mathbf{D}Y_i = 2L\mathbf{D}\,(S_n). \tag{4.3.39}$$

Разделим обе части неравенства (4.3.39) на $\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{D}Y_i\right)^{3/2} = (\mathbf{D}S_n)^{3/2}$:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}\,|\,Y_i - \mathbf{M}Y_i\,|^3}{(\mathbf{D}S_n)^{3/2}} \leqslant \frac{2L}{\sqrt{\mathbf{D}S_n}}. \tag{4.3.40}$$

Если теперь $n \to \infty$, то и $\sqrt{\mathbf{D}S_n} \to \infty$, если нет такого Y_i, которое было бы больше большинства остальных (ибо если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{D}Y_i$ сходится, то первый его член будет больше суммы членов, взятых начиная с некоторого номера), и правая часть неравенства (4.3.40) стремится к нулю так, что условие (4.3.36) будет выполняться.

То, что условие (4.3.36) может не соблюдаться, если отдельные слагаемые слишком велики, видно из следующего: предположим, что среди слагаемых Y_i есть такое, которое может принимать только два значения $\left(\text{с вероятностью } \frac{1}{2} \text{ каждое}\right)$, очень далеко друг от друга отстоящие (по сравнению со средним квадратическим суммы остальных), а именно:

$$Y_k = \mathbf{M}Y_k \pm \frac{1}{2}\sqrt{\mathbf{D}S_n}$$

(тогда $\mathbf{D}Y_k = \frac{1}{4}\mathbf{D}S_n$, т. е. велико по сравнению с суммой остальных слагаемых); тогда

$$\mathbf{M}\,|\,Y_k - \mathbf{M}Y_k\,|^3 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\mathbf{D}S_n}\right)^3. \tag{4.3.41}$$

Если теперь левую часть (4.3.36) разложить на отдельные слагаемые, то в число этих слагаемых будет входить одно вида

$$\frac{\mathbf{M}\,|\,Y_k - \mathbf{M}Y_k\,|^3}{(\mathbf{D}S_n)^{3/2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 (\mathbf{D}S_n)^{3/2}}{(\mathbf{D}S_n)^{3/2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3. \tag{4.3.42}$$

Очевидно, если при возрастании n среди слагаемых в сумме (4.3.36) найдутся члены, подобные (4.3.42), то условие (4.3.36) не может выполняться.

Нормальное распределение появилось впервые в исследованиях Муавра (1733) в связи с рассмотрением частного случая биномиального распределения при боль-

ших числах испытаний. Но тогда оно осталось незамеченным. Впоследствии нормальное распределение было снова открыто Гауссом (1809) и Лапласом (1812).

Гаусс и Лаплас пришли к нормальному закону в связи со своей работой по теории ошибок наблюдений.

Под влиянием работ Гаусса и Лапласа долгое время считалось, что практически все статистические распределения должны приближаться к нормальному распределению.

Отклонение случайной величины от ее среднего рассматривалось как «ошибка», подчиненная нормальному закону.

Такая точка зрения является преувеличением роли нормального закона; практика показывает, однако, что в довольно большом числе важных случаев встречаются распределения приблизительно нормальные.

Картина нормального распределения наблюдается на опыте всякий раз, когда варьирование рассматриваемого признака (величины) происходит под действием большого числа суммирующихся друг с другом, почти независимых и малых по сравнению со всей суммой воздействий. Такое суммирование обычно накладывается на основную закономерность, определяющую средний уровень признака, и приводит к «нормальной» кривой распределения. Нормальный закон обнаруживается, например, в распределении компонент скорости газовых молекул, в рассеивании координат частиц, подверженных брауновскому движению, в изменчивости организмов растений. Приблизительно этому закону следует также рассеивание по дальности точек поражения при артиллерийской стрельбе и т. д. При устойчивом и отлаженном режиме работы станков, однородности обрабатываемого материала варьирование качества продукции массового производства также принимает часто форму нормального распределения в силу того, что производственная погрешность, возникающая при изготовлении детали, представляет результат суммарного эффекта погрешностей станка, инструмента, приспособлений, заготовок и т. д.

Центральная предельная теорема дает теоретическое объяснение этим фактам. Разумеется, что в каждом конкретном случае общая закономерность приобретает свои специфические особенности, сказывающиеся в положении «центра» и амплитуде рассеивания.

4.3.5. Применение нормального закона для вычисления вероятностей при биномиальном распределении. Теорема Лапласа. Нормальное распределение часто получается как предельный вид других распределений. В частности, мы покажем, что оно является предельным для биномиального (соответственным образом нормированного) распределения, если число испытаний s неограниченно возрастает. Пусть случайная величина подчиняется биномиальному закону так, что

$$\mathbf{P}(X=k)=\mathbf{P}_s(k)=C_s^k p^k q^{s-k}.$$

Мы знаем из **4.2.1**, что первые моменты распределения X в этом случае выражаются следующим образом:

$$\mathbf{M}X=sp,$$
$$\mathbf{D}X=spq,$$
$$\sigma_X=\sqrt{spq};$$

они неограниченно возрастают вместе с s. Для того чтобы иметь дело с величиной, дисперсия которой ограничена, мы от величины X перейдем к ее нормированному уклонению, введя в рассмотрение величину

$$Y=\frac{X-\mathbf{M}X}{\sigma_X}=\frac{X-sp}{\sqrt{spq}}. \qquad (4.3.43)$$

Величина Y принимает значения $t_k = \frac{k - sp}{\sqrt{spq}}$, когда $X = k$ с вероятностью $\mathbf{P}_s(k)$.

Значения t_k и t_{k+1}, отвечающие двум последовательным значениям k и $k+1$ величины X, отличаются на величину

$$\Delta t = t_{k+1} - t_k = \frac{1}{\sqrt{spq}} \tag{4.3.44}$$

— шага новой шкалы t, на которой мы условимся изображать значения переменной t. Заметим, что шаг шкалы k, на которой изображались значения переменной k, был равен единице, так как $\Delta k = (k+1) - k = 1$. Шаг Δt будет тем меньше, чем больше значение s при данном p.

Пусть t' и t'' $(t'' > t')$ — два значения нормированного уклонения. Займемся вопросом о том, как можно вычислить приближенную вероятность того, что величина Y попадает в интервал (t', t'').

Заметим, прежде всего, что

$$\mathbf{P}(t' \leqslant Y \leqslant t'') = \mathbf{P}\left(t' \leqslant \frac{X - sp}{\sqrt{spq}} < t''\right) =$$

$$= \mathbf{P}(sp + t'\sqrt{spq} \leqslant X < sp + t''\sqrt{spq}) = \mathbf{P}_s(t', t''). \tag{4.3.45}$$

Обозначим через $a(t')$ и $a(t'')$ крайние возможные значения для величины X такие, что

$$\left.\begin{aligned} a(t') &= sp + t'\sqrt{spq}, \\ a(t'') &= sp + t''\sqrt{spq}. \end{aligned}\right\} \tag{4.3.46}$$

Мы найдем по правилу сложения

$$\mathbf{P}_s(t', t'') = \sum_{m=a(t')}^{a(t'')} \mathbf{P}_s(m). \tag{4.3.47}$$

Таким образом, задача вычисления вероятности $\mathbf{P}_s(t', t'')$ приводится к вычислению суммы (4.3.47). Эту сумму можно приближенно определить при больших значениях s, когда непосредственное вычисление вероятности делается затруднительным.

Для ее вычисления в этих условиях служит приближенная *формула Лапласа*

$$\mathbf{P}_s(t', t'') \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t'}^{t''} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(t'') - \Phi(t'). \tag{4.3.48}$$

Погрешность этой формулы стремится к нулю с ростом s. Это обстоятельство показывает, что *нормированное уклонение величины X, следующей биномиальному закону, приближенно при больших s подчиняется нормальному закону и тем точнее, чем больше s.* Это предложение называется *теоремой Лапласа.*

Перейдем к ее доказательству. Мы начнем с вывода приближенной формулы для вероятности $\mathbf{P}_s(m)$ — общего члена суммы.

Заметим, что в 2.4.2 мы имели:

$$\frac{\mathbf{P}_s(k+1)}{\mathbf{P}_s(k)} = \frac{(s-k)\,p}{(k+1)\,q}.$$

Так как согласно (4.3.46)

$$k = sp + t_k\sqrt{spq}$$

и

$$s - k = s - sp - t_k\sqrt{spq} = sq - t_k\sqrt{spq},$$

то наше равенство можно записать так:

$$\frac{\mathbf{P}_s(k+1)}{\mathbf{P}_s(k)} = \frac{spq - t_k p\sqrt{spq}}{spq + q + t_k q\sqrt{spq}} = \frac{1 - \dfrac{t_k p}{\sqrt{spq}}}{1 + \dfrac{t_k q}{\sqrt{spq}} + \dfrac{1}{sp}}. \tag{4.3.49}$$

Беря натуральный логарифм каждой части (4.3.49), найдем:

$$\ln \mathbf{P}_s(k+1) - \ln \mathbf{P}_s(k) = \ln\left(1 - \frac{t_k p}{\sqrt{spq}}\right) - \ln\left(1 + \frac{t_k q}{\sqrt{spq}} + \frac{1}{sp}\right). \tag{4.3.50}$$

Заметим теперь, что при малых значениях x

$$\ln(1+x) \approx x;$$

ошибка этого приближенного равенства будет малой величиной порядка x^2. Это вытекает из известного разложения по степеням x в ряд Маклорена:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

Таким образом, мы можем написать:

$$\ln(1+x) = x + O(x^2), \tag{4.3.51}$$

где остаточный член $O(x^2)$ приближенной формулы имеет порядок x^2. Пользуясь равенством (4.3.51), будем иметь:

$$\ln\left(1 - \frac{t_k p}{\sqrt{spq}}\right) \approx -\frac{t_k p}{\sqrt{spq}} = -t_k p \cdot \Delta t, \tag{4.3.52}$$

пренебрегая членами порядка малости первой и более высоких степеней относительно $\frac{1}{s}$.

Аналогично, с точностью до членов того же порядка будем иметь:

$$\ln\left(1 + \frac{t_k q}{\sqrt{spq}} + \frac{1}{sp}\right) \approx \frac{t_k q}{\sqrt{spq}} = t_k q \cdot \Delta t. \tag{4.3.53}$$

Из (4.3.50), (4.3.52) и (4.3.53) следует:

$$\ln \mathbf{P}_s(k+1) - \ln \mathbf{P}_s(k) \approx -t_k \Delta t \tag{4.3.54}$$

с точностью до членов более высокого порядка малости. Рассмотрим теперь отношение

$$\frac{\mathbf{P}_s(m)}{\mathbf{P}_s(k_0)} = \frac{\mathbf{P}_s(k_0+1)}{\mathbf{P}_s(k_0)} \cdot \frac{\mathbf{P}_s(k_0+2)}{\mathbf{P}_s(k_0+1)} \cdots \frac{\mathbf{P}_s(m)}{\mathbf{P}_s(m-1)},$$

считая $m > k_0$, где k_0 — вероятнейшее значение для данного биномиального распределения. Логарифмируя и принимая во внимание (4.3.54), получим:

$$\ln\left[\frac{\mathbf{P}_s(m)}{\mathbf{P}_s(k_0)}\right] = \sum_{k=k_0}^{m-1} [\ln \mathbf{P}_s(k+1) - \ln \mathbf{P}_s(k)] \approx -\sum_{k=k_0}^{m} t_k \Delta t. \tag{4.3.55}$$

Но последнюю сумму можно рассматривать как интегральную для интеграла

$$-\int_{t_{k_0}}^{t_m} t\,dt = -\left[\frac{t_m^2}{2} - \frac{t_{k_0}^2}{2}\right] = -\frac{t_m^2}{2} + \frac{\theta^2}{2spq},$$

так как $t_{k_0} = \dfrac{k_0 - sp}{\sqrt{spq}} = \theta \Delta t \quad (0 < \theta < 1)$. Пренебрегая последним членом, мы можем с точностью до величины порядка $(\Delta t)^2 = \dfrac{1}{spq}$ положить

$$-\sum_{k=k_0}^{m} t_k \Delta t \approx -\frac{t_m^2}{2}, \tag{4.3.56}$$

и потому из (4.3.55) и (4.3.56) следует:

$$\ln\left[\frac{\mathbf{P}_s(m)}{\mathbf{P}_s(k_0)}\right] \approx -\frac{t_m^2}{2},$$

откуда, потенцируя, получим:

$$\frac{\mathbf{P}_s(m)}{\mathbf{P}_s(k_0)} \approx e^{-\frac{t_m^2}{2}}$$

и

$$\mathbf{P}_s(m) \approx \mathbf{P}_s(k_0)\, e^{-\frac{t_m^2}{2}}. \tag{4.3.57}$$

Здесь $\mathbf{P}_s(k_0)$ — вероятность, отвечающая наибольшему члену в биномиальном распределении. Умножая правую часть приближенного равенства (4.3.57) на

$$\frac{\sqrt{2\pi spq}}{\sqrt{2\pi spq}} = \frac{\sqrt{2\pi spq}}{\sqrt{2\pi}}\,\Delta t,$$

получим:

$$\mathbf{P}_s(m) \approx \sqrt{2\pi spq}\,\mathbf{P}_s(k_0)\,\frac{e^{-\frac{t_m^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,\Delta t = C_s\frac{e^{-\frac{t_m^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\Delta t, \tag{4.3.58}$$

где $C_s = \sqrt{2\pi spq}\,\mathbf{P}_s(k_0)$ не зависит от m. Из (4.3.47) и (4.3.58) для вероятности $\mathbf{P}_s(t', t'')$ мы будем иметь теперь следующее приближенное выражение:

$$\mathbf{P}_s(t', t'') \approx C_s\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=a(t')}^{a(t'')} e^{-\frac{t_m^2}{2}}\,\Delta t; \tag{4.3.59}$$

при этом, когда m пробегает все целые числа между $a(t')$ и $a(t'')$, то t_m пробегает все значения нормированных абсцисс в промежутке от t' до t'', отделенные друг от друга шагом Δt. Поэтому при достаточно большом s и при малости Δt мы можем написать:

$$\mathbf{P}_s(t', t'') \approx C_s\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{t'}^{t''} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt. \tag{4.3.60}$$

Этой формулой, в которой t' и t'' могут принимать любые значения нормированных уклонений, мы воспользуемся прежде всего для того, чтобы определить значение C_s.

Если выбрать $t' < -T$ и $t'' > +T$, где T взять достаточно большим, то левая часть (4.3.60) будет как угодно близка к единице при любом s.

В самом деле,

$$\mathbf{P}_s(t', t'') = \mathbf{P}\left(t' \leqslant \frac{X - sp}{\sqrt{sqp}} \leqslant t''\right) \geqslant \mathbf{P}\left\{-T \leqslant \frac{X - sp}{\sqrt{spq}} \leqslant T\right\} \geqslant 1 - \mathbf{P}\left(\left|\frac{X - sp}{\sqrt{spq}}\right| \geqslant T\right),$$

и, применяя неравенство Чебышева, мы будем иметь:

$$\mathbf{P}_s(t', t'') \geqslant 1 - \frac{1}{T^2},$$

так как $\mathbf{D}\left(\frac{X - sp}{\sqrt{spq}}\right) = 1$ и потому

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{X - sp}{\sqrt{spq}}\right| \geqslant T\right) \leqslant \frac{1}{T^2}.$$

С другой стороны, T можно взять также настолько большим, чтобы при $t' < -T$ и $t'' > T$ интеграл $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{t'}^{t''} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ отличался от полного интеграла $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 1$ также как угодно мало.

Для того чтобы формула (4.3.60) была справедлива при этих значениях t' и t'', необходимо для больших s иметь:

$$C_s \approx 1. \tag{4.3.61}$$

Таким образом, на основании (4.3.58) и (4.3.61) для вероятности $\mathbf{P}_s(t', t'')$ мы имеем приближенную формулу

$$\mathbf{P}_s(m) \approx \frac{e^{-\frac{t_m^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\Delta t, \tag{4.3.62}$$

где

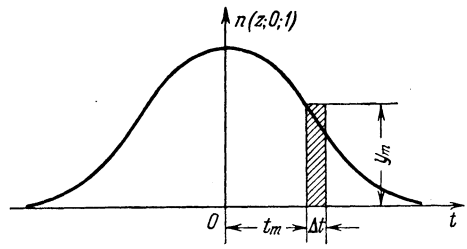
$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{spq}}, \quad t_m = \frac{m - sp}{\sqrt{spq}}.$$

Рассматривая нормальную кривую (черт. 41), мы видим, что

$$\mathbf{P}_s(m) \approx y_m \Delta t, \tag{4.3.63}$$

где y_m — ордината нормальной кривой в точке

$$t = t_m = \frac{m - sp}{\sqrt{spq}}. \tag{4.3.64}$$



Черт. 41. Геометрическая интерпретация вероятности $\mathbf{P}_s(m)$ при биномиальном распределении для большого s.

Приближенная формула (4.3.62) говорит, что вероятность $\mathbf{P}_s(m)$ при больших s эквивалентна площади прямоугольника, построенного на ординате y_m нормальной кривой в точке $t = t_m$ с основанием $\Delta t = \frac{1}{\sqrt{spq}}$.

Это геометрическое истолкование делает очевидной другую интегральную формулу для вероятности $\mathbf{P}_s(t', t'')$. В самом деле, эта вероятность приближенно выражается суммой прямоугольников, построенных на ординатах нормальной кривой в точках t_m, причем t_m пробегает нормированные абсциссы в промежутке от t' до t'' с шагом Δt. Сумму площадей этих прямоугольников мы заменяем площадью под нормальной кривой в том же интервале (t', t''). Таким образом,

$$\mathbf{P}_s(t', t'') = \sum_{m=a(t')}^{a(t'')} \mathbf{P}_s(m) \approx \sum_{t' \leqslant t \leqslant t''} e^{-\frac{t_m^2}{2}} \Delta t \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t'}^{t''} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(t'') - \Phi(t'),$$

что и требовалось доказать.

Чтобы применить доказанное свойство величины X к вычислению вероятности неравенства

$$a \leqslant X \leqslant b, \tag{4.3.65}$$

где a и b — два целых числа, следует сначала вычислить пределы (нижний и верхний)

$$t' = \frac{a - sp}{\sqrt{spq}} \quad \text{и} \quad t'' = \frac{b - sp}{\sqrt{spq}}$$

для нормированного уклонения t.

Неравенство (4.3.65) равносильно неравенству

$$t' \leqslant t \leqslant t'' \tag{4.3.66}$$

и потому

$$\mathbf{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \mathbf{P}(t' \leqslant t \leqslant t'') \approx \Phi(t'') - \Phi(t'), \tag{4.3.67}$$

или

$$\mathbf{P}(a \leqslant X \leqslant b) \approx \Phi\left(\frac{b - sp}{\sqrt{spq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - sp}{\sqrt{spq}}\right). \tag{4.3.67'}$$

Можно уменьшить погрешность приближенной формулы (4.3.67), если начало t' интервала интеграции (t', t'') сдвинуть на половину основания Δt элементарного прямоугольника влево вдоль оси t, а конец t'' этого интервала сдвинуть на такую же величину вправо.

Другими словами, в формулы (4.3.67) и (4.3.67′) следует подставить

$$t' = \frac{a - \frac{1}{2} - sp}{\sqrt{spq}} \quad \text{и} \quad t'' = \frac{b + \frac{1}{2} - sp}{\sqrt{spq}}, \tag{4.3.68}$$

так что

$$\mathbf{P}(a \leqslant X \leqslant b) \approx \Phi\left(\frac{b + \frac{1}{2} - sp}{\sqrt{spq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - \frac{1}{2} - sp}{\sqrt{spq}}\right).$$

В частности, полагая $a = -\infty$ и $b = x$, найдем:

$$\mathbf{P}(X \leqslant x) \approx \Phi\left(\frac{x + \frac{1}{2} - sp}{\sqrt{spq}}\right). \tag{4.3.69}$$

Отсюда квантиль $x_{\bar{p}}$ биномиального распределения, для которого $\mathbf{P}(X \leqslant x_{\bar{p}}) = \bar{p}$, можно приближенно определить, полагая

$$\frac{x_{\bar{p}} + \frac{1}{2} - sp}{\sqrt{spq}} = u_{\bar{p}}, \tag{4.3.70}$$

где $u_{\bar{p}}$ — соответствующий квантиль нормального закона распределения $\Phi(u_{\bar{p}}) = \bar{p}$; из (4.3.70) следует:

$$x_{\bar{p}} = sp - \frac{1}{2} + u_{\bar{p}} \cdot \sqrt{sp(1-p)}. \tag{4.3.71}$$

Пример 4.3.8. Известно, что вероятность обработанной детали оказаться по своим размерам вне контрольной зоны постоянна и равна $p = 0{,}2$. Отбирается выборка объема 400 штук. Распределение полагается биномиальным, и требуется определить вероятность того, что вне контрольной зоны окажется от 70 до 100 деталей.

Математическое ожидание равно

$$\mathbf{M}X = sp = 400 \cdot 0{,}2 = 80 \text{ штук.}$$

Среднее квадратическое отклонение равно

$$\sigma_X = \sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = \sqrt{64} = 8 \text{ штук.}$$

Находим отклонения от математического ожидания:

$$t' = \frac{70 - 80}{8} = -1{,}25, \quad t'' = \frac{100 - 80}{8} = 2{,}5.$$

По формуле (4.3.67) находим:

$$\mathbf{P}\left(-1{,}25 < \frac{X - 80}{8} < +2{,}5\right) = \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) =$$

$$= \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25) = 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882.$$

Значения функции Лапласа при $t'' = z_1 = 2{,}5$ и $t' = z_2 = -1{,}25$ берем по табл. IV приложений.

Более точный результат получим, если по формуле (4.3.68) возьмем:

$$t' = \frac{70 - \frac{1}{2} - 80}{8} = \frac{-10{,}5}{8} = -1{,}31$$

и

$$t'' = \frac{100 + \frac{1}{2} - 80}{8} = \frac{20{,}5}{8} = 2{,}56.$$

Тогда

$$\mathbf{P}\left(-1{,}31 < \frac{X-80}{8} < 2{,}56\right) = \Phi(2.56) - \Phi(-1{,}31) =$$

$$= \Phi(2{,}56) + \Phi(1{,}31) = 0{,}4948 + 0{,}4049 = 0{,}8997.$$

Уточнение составляет $1{,}3\%$.

4.3.6. Характеристики уклонения от нормального закона: асимметрия и эксцесс. Как видно из **4.3.4**, нормальное распределение в теории вероятностей и в метематической статистике занимает особое место. Поэтому при рассмотрении распределений, отличающихся от нормального, стремятся дать количественную оценку этого отличия.

Очевидно, что такая оценка может быть сделана по крайней мере в двух направлениях: 1) в отношении асимметричности распределения, поскольку нормальное распределение является симметричным, и 2) в отношении крутости или точнее островершинности кривой распределения, поскольку нормальная кривая имеет определенную «куполообразную» форму вершины.

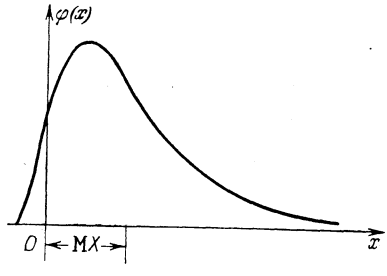
В симметричном, в том числе в нормальном, распределении каждый центральный момент нечетного порядка равен нулю (если он вообще существует), как это мы видели, в частности, в **4.3.2**. Любой нечетный момент, не равный нулю, можно, таким образом, рассматривать как характеристику асимметричности данного распределения. Простейшая из этих характеристик — центральный момент третьего порядка μ_3 — выражается в единицах измерения самой случайной величины в третьей степени.

Чтобы иметь дело с безразмерной характеристикой, не зависящей от выбора единиц измерения, момент третьего порядка делят на куб среднего квадратического отклонения.

Полученная таким образом характеристика асимметричности распределения носит название *асимметрии*

$$S_k = \frac{\mu_3}{\sigma^3}. \qquad (4.3.72)$$

Таким образом, *асимметрией* называется отношение центрального момента третьего порядка к кубу среднего квадратического отклонения. Показатель асимметрии для нормального распределения равен нулю.



Черт. 42. Кривая плотности вероятности распределения с положительной асимметрией.

В приложениях к статистике часто встречаются одномодальные распределения типа, изображенного на черт. 42. Здесь кривая плотности вероятности такова, что по одну сторону от математического ожидания расположена «длинная часть», а по другую сторону «короткая часть». Когда «длинная часть» расположена справа от математического ожидания, тогда, естественно, μ_3, а вместе с ним и S_k будут положительными, так как сумма кубов положительных отклонений превысит сумму кубов отрицательных отклонений. Такова именно кривая плотности вероятности, изображенная на черт. 42. Если «длинная часть» будет лежать слева от математического ожидания, то μ_3 и, следовательно, S_k будут отрицательными.

В качестве характеристики сглаженности кривой плотности вероятности около ее центра используют безразмерный показатель «*эксцесс*»:

$$E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \qquad (4.3.73)$$

Из соотношения (4.3.27) следует, что центральный момент четвертого порядка нормального распределения (отнесенный к среднему квадратическому отклонению в четвертой степени) равен трем.

Из сопоставления соотношений (4.3.73) и (4.3.27) следует, что эксцесс нормального распределения равен нулю.

Таким образом, эксцесс характеризует уклонение данного распределения от нормального распределения.

Для кривых, близких к нормальной кривой, положительное значение эксцесса обычно указывает на то, что кривая плотности вероятности в окрестности моды имеет более высокую и более острую вершину, чем нормальная кривая с тем же



Черт. 43. Кривые плотности вероятности с отрицательным и положительным эксцессами.

центром и дисперсией. Отрицательное значение эксцесса указывает на более низкий и более плоский характер вершины по сравнению с соответствующей нормальной кривой (черт. 43).

Следует, однако, заметить, что подобное расположение кривой по отношению к нормальной кривой не является общим правилом, как иногда утверждают некоторые авторы популярных книг (Ритц, Юл и др.). Приведем уравнения четырех симметричных около центра $x = 0$ кривых распределения. Для каждой из них дисперсия равна единице. Все они сравниваются с нормальной кривой, имеющей тот же центр и дисперсию. Ордината нормальной кривой в центре, как можно видеть из табл. III приложений, равна

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0{,}399.$$

В табл. 4.3.2 приведены уравнения кривых, соответствующие значения эксцесса и ординаты кривых в центре.

Таблица 4.3.2

№№ п/п	Уравнение кривой	Эксцесс	Ордината в начале координат	Разность между ординатой данной кривой и нормальной кривой
1	$n(x;\,0;\,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$	0	0,399	0
2	$\mathbf{P}(x) = \frac{1}{3\sqrt{\pi}}\left(\frac{9}{4} + x^4\right) e^{-x^2}$	$-0{,}25$	0,423	$+0{,}024$
3	$\mathbf{Q}(x) = \frac{3}{2\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{6\sqrt{\pi}}\left(\frac{9}{4} + x^4\right) e^{-x^2}$	$+0{,}125$	0,387	$-0{,}012$
4	$\mathbf{R}(x) = \frac{1}{6\sqrt{\pi}}\left(e^{-\frac{x^2}{4}} + 4e^{-x^2}\right)$	$+1{,}5$	0,470	$+0{,}071$
5	$\mathbf{S}(x) = \frac{3\sqrt{3}}{16\sqrt{\pi}}(2 + x^2)\, e^{-\frac{3x^2}{4}}$	$-0{,}333$	0,366	$-0{,}033$

Мы видим, что возможны любые комбинации «вершинности» кривой в центре и знака эксцесса.

Пример 4.3.9. Определим асимметрию и эксцесс биномиального распределения. Сначала найдем асимметрию. Из соотношения (3.6.8) видно, что

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3,$$

поэтому из (4.2.3), (4.2.6) и (4.2.7) имеем:

$$\mu_3=(sp)^3+3q(sp)^2-2sp^2q+spq-3[(sp)^2+spq]sp+2(sp)^3=spq(1-2p)=spq(q-p)$$

и окончательно

$$\mu_3 = spq(1-2p) = spq(q-p). \tag{4.3.74}$$

Находим асимметрию для биномиального распределения по соотношению (4.3.72)

$$S_k = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{spq(q-p)}{spq\sqrt{spq}} = \frac{q-p}{\sqrt{spq}} = \frac{1-2p}{\sqrt{spq}}. \tag{4.3.75}$$

Таким образом, асимметрия, положительная при $p < \frac{1}{2}$, отрицательна при $p > \frac{1}{2}$ и равна нулю при $p = \frac{1}{2}$.

Найдем теперь эксцесс.

Из соотношений (4.2.3), (4.2.6), (4.2.7) и (3.6.8) следует, что

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4,$$

и поэтому из (4.2.8) будем иметь:

$$\mu_4 = 3(spq)^2 + spq(1-6pq). \tag{4.3.76}$$

Следовательно, эксцесс на основании соотношения (4.3.73) будет равен

$$E_k = \frac{3(spq)^2 + spq(1-6pq)}{(\sqrt{spq})^4} - 3 = \frac{1-6pq}{spq}. \tag{4.3.77}$$

Из соотношения (4.3.77) видно, что эксцессс будет положительным при $pq < \frac{1}{6}$, отрицательным при $pq > \frac{1}{6}$. Из соотношений (4.3.75) и (4.3.77) видно, что асимметрия и эксцесс биномиального распределения стремятся к нулю при устремлении s к бесконечности.

Это связано с тем, что биномиальное распределение в этом предположении приближается к нормальному.

Пример 4.3.10. Определим асимметрию и эксцесс распределения редких событий (Пуассона).

Сначала найдем асимметрию.

Для этого найдем центральный момент третьего порядка.

Из соотношений (4.2.22), (4.2.23), (4.2.24) и (3.6.8) получим:

$$\mu_3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3(\lambda^2+\lambda)\lambda + 2\lambda^3 = \lambda. \tag{4.3.78}$$

Из соотношения (4.3.72) найдем асимметрию распределения редких событий

$$S_k = \frac{\lambda}{(\sqrt{\lambda})^3} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}. \tag{4.3.79}$$

Таким образом, асимметрия распределения всегда положительна, так как положительно λ.

Найдем теперь эксцесс.

Для этого найдем центральный момент четвертого порядка.

Из соотношений (4.2.22), (4.2.23), (4.2.24), (4.2.25) и (3.6.9) получим:

$$\mu_4 = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda - 4(\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda)\lambda + 6(\lambda^2+\lambda)\lambda^2 - 3\lambda^4 = 3\lambda^2 + \lambda. \tag{4.3.80}$$

На основании соотношения (4.3.73) получим эксцесс

$$E_k = \frac{3\lambda^2+\lambda}{(\sqrt{\lambda})^4} - 3 = \frac{1}{\lambda}. \tag{4.3.81}$$

Из соотношения (4.3.81) следует, что эксцесс распределения всегда положителен, так как λ всегда положительно.

Из соотношений (4.3.79) и (4.3.81) можно заключить, что при устремлении λ к бесконечности асимметрия и эксцесс распределения стремятся к нулю. Это обстоятельство так же, как и при биномиальном распределении, связано с приближением нормированного распределения Пуассона к нормальному при $\lambda \to \infty$.

§ 4. Преобразование случайных величин

4.4.1. Плотность вероятности монотонной функции случайной величины. Во многих задачах математической статистики наряду с данной случайной величиной X приходится рассматривать различные функции этой величины. При этом, помимо вопроса о математических ожиданиях и дисперсиях таких функций, рассмотренного в главе III, § 5, естественно, возникает еще вопрос о законе распределения случайной величины $U = u(X)$, в которую преобразуется величина X с помощью функции $u = u(x)$. Функцию распределения $G(u)$ величины U мы можем определить, рассуждая следующим образом. Предположим, что величина X распределена непрерывно с плотностью вероятности $\varphi(x)$ и $F(x)$ — ее функция распределения

$$\mathbf{P}(X < x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)\,dx.$$

Пусть, далее, функция $u(x)$ будет монотонной на всей оси x и непрерывной в каждой точке функцией, например

$$U = u(X) = X^3.$$

При заданном числе u неравенство

$$U < u$$

или $X^3 < u$ равносильно неравенству $-\infty < X < \sqrt[3]{u}$. В этом случае

$$G(u) = \mathbf{P}[u(X) < u] = \mathbf{P}(X < \sqrt[3]{u}) < \int_{-\infty}^{\sqrt[3]{u}} \varphi(x)\,dx = F(\sqrt[3]{u}).$$

Вообще, если функция $u(x)$ — непрерывная монотонно возрастающая функция на всей оси x и $x(u)$ — функция, обратная функции $u(x)$, то неравенство

$$u(X) < u$$

равносильно неравенству

$$X < x(u)$$

и

$$G(u) = \mathbf{P}[u(X) < u] = \mathbf{P}[X < x(u)] = F[x(u)]. \tag{4.4.1}$$

Несколько иная картина получится, если функция $u(x)$ будет убывающей непрерывной функцией на всей оси x, какова, например, функция

$$u = \frac{1}{x^3} \qquad (\text{при } x > 0)$$

(черт. 44).

В этом случае неравенство

$$u(X) < u$$

равносильно, очевидно, неравенству

$$X > x(u),$$

где $x(u)$ — обратная также убывающая функция по отношению к функции $u(x)$. В этом случае

$$G(u) = \mathbf{P}[u(X) < u] = \mathbf{P}[X > x(u)] = \int_{x(u)}^{\infty} \varphi(x)\,dx = 1 - F[x(u)]. \quad (4.4.2)$$

Предположим, кроме того, что функция $u(x)$ дифференцируема. В этом случае функция $G(u)$ будет также дифференцируемой, и плотность вероятности $g(u)$ величины U мы найдем, беря производные по u от правых частей равенств (4.4.1) и (4.4.2). В первом случае, применяя правило дифференцирования сложной функции, получим:

$$g(u) = G'(u) = F'(x)\frac{dx}{du}$$

или

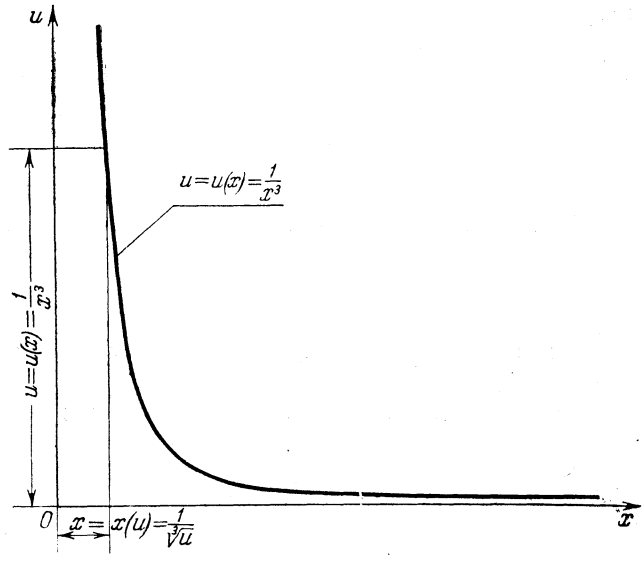
$$g(u) = \varphi(x)\left|\frac{dx}{du}\right|_{x=x(u)}, \quad (4.4.3)$$

причем x заменяется его выражением через u с помощью обратной функции $x(u)$.

Во втором случае аналогично получим:

$$g(u) = -F'(x)\frac{dx}{du}, \quad (4.4.4)$$

при этом $\frac{dx}{du}$ отрицательна как производная убывающей функции в противоположность случаю (4.4.3), где $\frac{dx}{du}$ была положительна. Так как в случае (4.4.4) $-\frac{dx}{du} = \left|\frac{dx}{du}\right|$, то мы можем написать более общее равенство, пригодное для обоих случаев монотонной функции. Именно:



Черт. 44. График монотонно убывающей функции $u = u(x) = \frac{1}{x^3}$ (при $x > 0$).

$$g(u) = \varphi(x)\left|\frac{dx}{du}\right|, \quad (4.4.5)$$

где $x = x(u)$, или

$$g(u)\,du = \varphi(x)\left|\frac{dx}{du}\right|du = \varphi(x(u))\,|x'(u)|\,du. \quad (4.4.6)$$

Таким образом, мы можем сформулировать следующее правило преобразования плотности вероятности при непрерывном и монотонном преобразовании самой величины.

Пусть X — непрерывная случайная величина с плотностью вероятности $\varphi(x)$ и элементом вероятности $\varphi(x)\,dx$, $U = u(X)$ — преобразование величины X с помощью дифференцируемой монотонной функции $u(x)$ и $x(u)$ — обратная функция, преобразующая U в X. Тогда элемент вероятности $g(u)\,du$ величины U получается из элемента вероятности $\varphi(x)\,dx$ величины X по обычному правилу

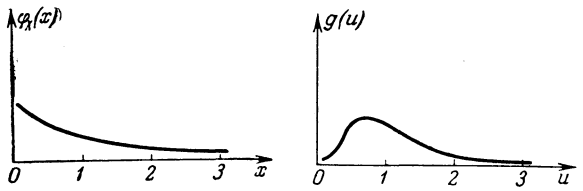
замены переменных: аргумент x в функции $\varphi(x)$ заменяем на $x(u)$, dx заменяем $|x'(u)|\,du$ так, что

$$g(u)\,du = \varphi(x(u))\,|x'(u)|\,du$$

и

$$g(u) = \varphi(x(u)) \cdot |x'(u)|. \tag{4.4.7}$$

Пусть случайная величина X распределена с плотностью



Черт. 45. Графики плотностей вероятности $\varphi_X(x)=e^{-x}$ величины X и $g(u) = 2ue^{-u^2}$ величины $U = \sqrt{X}$.

$$\varphi_X(x) = e^{-x} \qquad (x \geqslant 0);$$

функция этой случайной величины имеет вид

$$U = u(X) = \sqrt{X}$$

и обратная функция

$$x(U) = U^2.$$

Тогда плотность вероятности $g(u)$ случайной величины U будет:

$$g(u) = e^{-u^2}\left|\frac{dx}{du}\right| = 2ue^{-u^2}. \tag{4.4.8}$$

Графики плотностей вероятности $\varphi_X(x)$ и $g(u)$ для этого случая показаны на черт. 45.

Пользуясь соотношением (4.4.1), получим:

$$\mathbf{P}(x_1 < X < x_2) = \mathbf{P}(u_1 < U < u_2) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi_X(x)\,dx = \int_{u_1}^{u_2} \varphi_X(x(u))\left|\frac{dx}{du}\right| du, \tag{4.4.9}$$

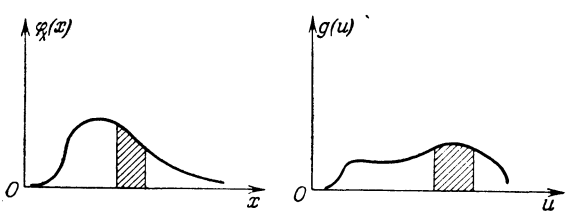
где u_1 и u_2 — значения переменной u, соответствующие значениям x_1 и x_2 переменной x.

Соотношение (4.4.9) может быть проиллюстрировано графиками, изображенными на черт. 46.

Заштрихованная площадка на левом графике плотности вероятности $\varphi_X(x)$ представляет левый интеграл соотношения (4.4.9) и заштрихованная площадка на правом графике плотности вероятности $g(u) = \varphi_X(x(u))\left|\frac{dx}{du}\right|$ представляет правый интеграл того же соотношения. Равенство (4.4.7) имеет простой геометрический смысл.

Левая часть его представляет с точностью до бесконечно малых высшего порядка вероятность величине $U = u(X)$ лежать в интервале от u до $u + du$, т. е. вероятность

$$\mathbf{P}[u < u(X) < u + du].$$



Черт. 46. Графики плотностей вероятности $\varphi_X(x)$ случайной величины X и $g(u)$ величины $U = u(X)$.

При монотонном и дифференцируемом преобразовании интервалу $(u, u+du)$ на оси u (черт. 47) соответствует интервал $I_u[x(u), x(u+du)]$ на оси x длины

$$|dx| \cong |x(u+du) - x(u)| \approx |x'(u)|\,du.$$

Правая часть (4.4.7) как раз и выражает вероятность попадания величины X в этот интервал, т. е. она выражает вероятность

$$\mathbf{P}(X \text{ лежит в } I_u) \approx \varphi_X[x(u)] \left|\frac{dx}{du}\right| du.$$

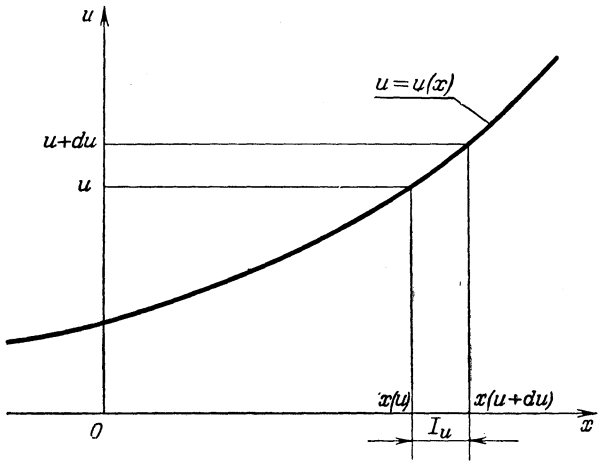
Таким образом, левая и правая части (4.4.7) выражают вероятности эквивалентных событий.

4.4.2. Плотность вероятности немонотонной функции случайной величины. Последние рассуждения можно обобщить на более сложный случай немонотонной дифференцируемой функции с конечным числом максимумов и минимумов. На черт. 48 приведен случай, когда обратная функция $x(u)$ для функции $u = u(x)$ может иметь два значения (т. е. она двузначна). Каждому значению U в этом случае отвечает два значения X

$$X = X_1 = x_1(U)$$

и

$$X = X_2 = x_2(U).$$



Черт. 47. Интервал $(u, u+du)$ на оси u и соответствующий ему интервал $[x(u), x(u+du)]$ на оси x.

Интервалу $(u, u+du)$ отвечают в этом случае два интервала:

$$(x_1 + \Delta x_1, x_1)$$

и

$$(x_2, x_2 + \Delta x_2).$$

Рассуждая, как и в предыдущем случае, найдем, что длина интервала $(x_1+\Delta x_1, x_1)$ будет:

$$|\Delta x_1| = |x_1(u+du) - x_1(u)| = \left|\frac{dx_1}{du}\right| du$$

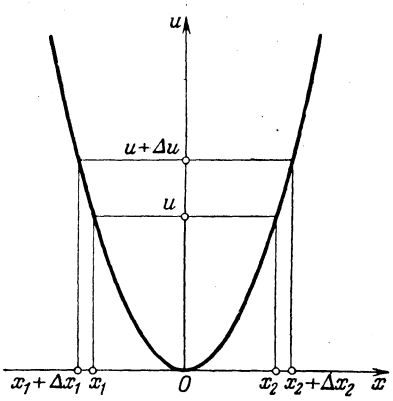
и длина интервала $(x_2, x_2+\Delta x_2)$

$$|\Delta x_2| = \left|\frac{dx_2}{du}\right| du.$$

Поэтому

$$g(u)\,du = \mathbf{P}(u < U < u+du) \approx$$

$$\approx \left[\varphi(x_1)\left|\frac{dx_1}{du}\right| + \varphi(x_2)\left|\frac{dx_2}{du}\right|\right] du.$$



Черт. 48. График функции $u = u(x) = x^2$, когда обратная функция $x(u)$ имеет два значения: $x_1(u) = +\sqrt{u}$ и $x_2(u) = -\sqrt{u}$.

Общая процедура нахождения плотности вероятности функции $u(X)$ случайной величины X заключается в следующем.

Для каждого u решаем уравнение $u(x) = u$ и находим все «ветви» обратной вообще многозначной функции $x = x(u)$

$$x_1 = x_1(u), \quad x_2 = x_2(u), \quad \ldots, \quad x_i = x_i(u), \quad \ldots$$

в данной области изменения переменной x.

Плотность вероятности величины U, обозначавшаяся через $g(u)$, выразится тогда в виде суммы

$$g(u) = \sum_i \varphi[x_i(u)] \left|\frac{dx_i}{du}\right|. \qquad (4.4.10)$$

Случай многозначности обратной функции мы имеем, например, при нахождении распределения квадрата величины X: $U = u(X) = X^2$ (см. черт. 48).

В этом случае обратная функция имеет две ветви

$$x_1(u) = +\sqrt{u} \quad \text{и} \quad x_2(u) = -\sqrt{u}$$

для каждого $u > 0$. Плотность вероятности $g(u)$ величины X^2 выразится формулой (4.4.10):

$$g(u) = \varphi(\sqrt{u})\frac{1}{2\sqrt{u}} + \varphi(-\sqrt{u})\frac{1}{2\sqrt{u}}.$$

Если, например, величина X нормально распределена с плотностью вероятности

$$\varphi_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

то

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}}\left(e^{-\frac{u}{2}} + e^{-\frac{u}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} e^{-\frac{u}{2}} \quad (u \geqslant 0),\ g(u) = 0 \ (u < 0). \quad (4.4.11)$$

§ 5. Некоторые встречающиеся в приложениях распределения

4.5.1. Гамма-распределение. *Гамма-распределением* называется распределение, задаваемое плотностью вероятности

$$\varphi_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha+1)\,\beta^{\alpha+1}} x^{\alpha} e^{-\frac{x}{\beta}} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leqslant 0. \end{cases} \quad (4.5.1)$$

Действительные числа $\alpha > -1$ и $\beta > 0$ представляют параметры этого распределения.

$\Gamma(\alpha+1)$ есть символ, обозначающий так называемую «*гамма*»-*функцию*, определяемую с помощью интеграла, введенного Эйлером [1]):

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha}\, dt. \quad (4.5.2)$$

Эту функцию можно рассматривать как обобщение факториала натурального числа. В самом деле, можно показать, что в том случае, когда α — целое положительное число, то

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha! = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots 2 \cdot 1.$$

Для этой цели проинтегрируем интеграл, представляющий $\Gamma(\alpha+1)$, по частям:

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha} dt = \int_0^{\infty} t^{\alpha} d(-e^{-t}) = -[e^{-t}t^{\alpha}]_0^{\infty} + \alpha \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt. \quad (4.5.3)$$

Предполагая $\alpha > 0$, найдем

$$e^{-t}t^{\alpha}|_{t=} = 1 \cdot 0 = 0$$

и

$$e^{-t}t^{\alpha}|_{t=+\infty} = \lim_{t\to\infty} e^{-t}t^{\alpha} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^{\alpha}}{e^{t}} = 0$$

в силу известного свойства показательной функции e^t, растущей при $t \to \infty$ скорее любой положительной степени t^{α}.

Поэтому из (4.5.2) получим:

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha} dt = \alpha \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt. \quad (4.5.4)$$

---

[1]) В курсах анализа доказывается, что при всяком $\alpha > -1$ несобственный интеграл (4.5.2) существует. См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. III, ч. 2, изд. 5-е, Гостехиздат, М.—Л., 1951, стр. 260.

Но интеграл (4.5.4) отличается от интеграла, стоящего в правой части (4.5.3), тем, что α заменено на $\alpha - 1$. Поэтому последнее соотношение можно записать в виде

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha). \tag{4.5.5}$$

Оно доказано нами для всех $\alpha > 0$; предположим, что теперь $(\alpha + 1)$ — натуральное число, тогда α, $\alpha - 1$, $\alpha - 2$ и т. д. будут натуральными числами. Мы можем написать последовательно ряд соотношений

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha+1) &= \alpha\Gamma(\alpha)\\
\Gamma(\alpha) &= (\alpha-1)\,\Gamma(\alpha-1)\\
\Gamma(\alpha-1) &= (\alpha-2)\,\Gamma(\alpha-2)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\Gamma(2) &= 1\cdot\Gamma(1).
\end{aligned}$$

При этом

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = -\left[e^{-t}\right]_0^\infty = 1.$$

Перемножая эти равенства и сокращая общие множители в левой и правой частях, получим:

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ \ldots\ 1 = \alpha! \tag{4.5.6}$$

Легко видеть, что правая часть (4.5.1) при $x > 0$ положительна.

Для того, чтобы показать, что соотношение (4.5.1) представляет плотность вероятности, вычислим интеграл

$$A(\alpha) = \int_0^\infty \frac{1}{\beta^{\alpha+1}} x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}} dx. \tag{4.5.7}$$

Произведем замену x на $y = \frac{x}{\beta}$; при этом $x = y\beta$ и $dx = \beta\,dy$.

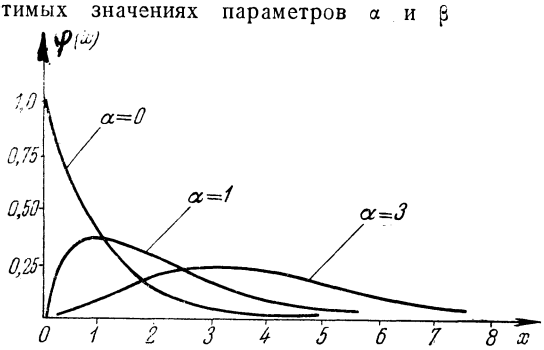
Тогда получим:

$$A(\alpha) = \int_0^\infty \frac{(y\beta)^\alpha}{\beta^{\alpha+1}} e^{-y}\cdot\beta\,dy = \int_0^\infty e^{-y}y^\alpha dy = \Gamma(\alpha+1). \tag{4.5.8}$$

Таким образом, при всех допустимых значениях параметров α и β

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\,\beta^{\alpha+1}}\int_0^\infty e^{-\frac{x}{\beta}} x^\alpha dx = \frac{A(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} = 1. \tag{4.5.9}$$

Отсюда следует, что $\varphi_{\alpha,\beta}(x)$, заданная соотношением (4.5.1), при любых значениях параметров α и β ($\beta > 0$ и $\alpha \geqslant -1$) представляет плотность распределения случайной величины X. График плотности вероятности гамма-распределения при $\beta = 1$ и при значениях $\alpha = 0$, 1, 3 представлен на черт. 49. Функция распределения этой величины определяется соотношением



Черт. 49. График плотности вероятности гамма-распределения при $\beta = 1$ и $\alpha = 0$, 1, 3.

$$F_{\alpha,\beta}(x) = \int_0^x \varphi_{\alpha,\beta}(x)\,dx. \tag{4.5.10}$$

Особый интерес представляют целые положительные значения параметра α и значения, кратные $\frac{1}{2}$.

При $\alpha = \frac{1}{2}$, в силу соотношения (4.5.5)

$$A\left(\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-y} y^{-\frac{1}{2}}\, dy. \tag{4.5.11}$$

Положим $y = \frac{z^2}{2}$, мы будем иметь $dy = z \cdot dz$ и

$$A\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{z^2}{2}}}\, z \cdot dz = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} \sqrt{2}\, dz. \tag{4.5.12}$$

Умножив теперь полученный интеграл на $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}}$ и произведя сокращения, будем иметь:

$$\sqrt{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

так как под интегралом у нас теперь стоит нормальная плотность вероятности $n(z; 0, 1)$, определяемая соотношением (4.3.12), а интеграл от 0 до ∞ от нормальной плотности вероятности равен $1/2$.

Таким образом, обозначая $A\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)!$ и применяя (4.5.5), получим:

$$\left(\frac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{4.5.13}$$

и

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{4.5.14}$$

Эти равенства часто используются в различных приложениях гамма-функции.

С помощью соотношений (4.5.5) и (4.5.14) легко можно определить гамма-функцию при любом α, кратном $1/2$.

Так, например, на основании (4.5.5) и (4.5.14)

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right) = \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) =$$

$$= \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}.$$

Интегральная функция гамма-распределения имеет вид

$$F_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \int_0^x \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\beta^{\alpha+1}} e^{-\frac{t}{\beta}} t^\alpha\, dt & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leqslant 0. \end{cases} \tag{4.5.15}$$

Эта функция распределения может быть вычислена при помощи различных приемов, в частности, когда α — положительное целое число, имеем[1]):

$$F_{\alpha,\beta}(x) = 1 - \left[1 + \frac{x}{\beta} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{\beta}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{x}{\beta}\right)^3 + \ldots + \frac{1}{\alpha!}\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right] e^{-\frac{x}{\beta}}, \tag{4.5.16}$$

где $x > 0$.

---

[1]) Легко проверить также, что производная по x функции, стоящей в правой части (4.5.16), равна в точности $\frac{1}{\alpha!\beta^{\alpha+1}} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}} \cdot x^\alpha = \varphi_{\alpha\beta}(x)$. Так как эта функция обращается в нуль при $x = 0$, то она должна совпадать с $F_{\alpha,\beta}(x)$.

Это соотношение легко устанавливается последовательным применением интегрирования по частям к интегралу

$$\int_x^\infty \frac{e^{-\frac{t}{\beta}} t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)\beta^{\alpha+1}}\,dt, \tag{4.5.17}$$

представляющему

$$1 - F_{\alpha,\beta}(x).$$

Формула (4.5.10) может быть записана в виде

$$F_{\alpha,\beta}(x) = \int_0^x \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot \left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha e^{-\frac{t}{\beta}} \cdot \frac{dt}{\beta} = \int_0^{\frac{x}{\beta}} \frac{e^{-z}}{\Gamma(\alpha+1)} z^\alpha\,dz = \gamma_\alpha\left(\frac{x}{\beta}\right).$$

Функция

$$\gamma_\alpha(z) = \int_0^z \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} z^\alpha e^{-z}\,dz \tag{4.5.18}$$

носит название *неполной гамма-функции*. Она табулирована в довольно широких пределах.

Найдем теперь производящую функцию гамма-распределения

$$m(t) = \int_0^\infty e^{tx} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\beta^{\alpha+1}} x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}}\,dx = \int_0^\infty e^{\beta t y} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} y^\alpha e^{-y}\,dy,$$

где $y = \frac{x}{\beta}$.

Мы будем считать t удовлетворяющим неравенству $t < \frac{1}{\beta}$, так что $1 - \beta t > 0$.

Делая дальнейшие преобразования, получим:

$$m(t) = \frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha+1}} \int_0^\infty \frac{(1-\beta t)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} e^{-y(1-\beta t)} y^\alpha\,dy =$$

$$= \frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha+1}} \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\left(\frac{1}{1-\beta t}\right)^{\alpha+1}} e^{-\frac{y}{\left(\frac{1}{1-\beta t}\right)}} \cdot y^\alpha\,dy =$$

$$= \frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha+1}} \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\beta_1^{\alpha+1}} e^{-\frac{y}{\beta_1}} \cdot y^\alpha\,dy,$$

где $\beta_1 = \frac{1}{1-\beta t}$.

Этот последний интеграл представляет интеграл по всей области значений от плотности гамма-распределения (4.5.1) с параметрами α и β_1.

Но при всех значениях параметров выполняется соотношение (3.1.11) и потому наш интеграл равен единице. Окончательно

$$m(t) = \frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha+1}} \tag{4.5.19}$$

или, применяя разложение в степенной ряд, получим:

$$m(t) = 1 + \frac{\beta(\alpha+1)}{1} t + \frac{\beta^2(\alpha+1)(\alpha+2)}{2!} t^2 + \frac{\beta^3(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{3!} t^3 + \ldots \tag{4.5.20}$$

Согласно (3.6.12) найдем начальные моменты гамма-распределения. Так как в (4.5.20) коэффициентом при t^s служит $\frac{\nu_s}{s!}$, то

$$\nu_s = \beta^s(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+s) \tag{4.5.21}$$

ий, в частности,

$$\nu_1 = \beta(\alpha+1) = \mathbf{M}X. \tag{4.5.22}$$

Найдем центральные моменты распределения по формулам (3.6.7), (3.6.8) и (3.6.9):

$$\mu_2 = \mathbf{D}X = \sigma_X^2 = \beta^2(\alpha+1)(\alpha+2) - [\beta(\alpha+1)]^2 =$$
$$= \beta^2(\alpha+1)(\alpha+2-\alpha-1) = \beta^2(\alpha+1), \tag{4.5.23}$$

$$\mu_3 = \beta^3(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3) - 3\beta^2(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\alpha+1) + 2[\beta(\alpha+1)]^3 =$$
$$= 2\beta^3(\alpha+1), \tag{4.5.24}$$

$$\mu_4 = \beta^4(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4) - 4\beta^3(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\beta(\alpha+1) +$$
$$+ 6\beta^2(\alpha+1)(\alpha+2)\beta^2(\alpha+1)^2 - 3\beta^4(\alpha+1)^4 = 3\beta^4(\alpha+1)(\alpha+3), \tag{4.5.25}$$

$$\sigma_X = \sqrt{\mu_2} = \beta\sqrt{\alpha+1}. \tag{4.5.26}$$

По соотношениям (4.3.72) и (4.3.73) найдем асимметрию и эксцесс гамма-распределения

$$S_k = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{2\beta^3(\alpha+1)}{\beta^3(\alpha+1)\sqrt{\alpha+1}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha+1}}, \tag{4.5.27}$$

$$E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{3\beta^4(\alpha+1)(\alpha+3) - 3\beta^4(\alpha+1)^2}{\beta^4(\alpha+1)^2} = \frac{6}{\alpha+1}. \tag{4.5.28}$$

Мы видим, что S_k и E_k зависят только от параметра α.

Из соотношения (4.5.27) следует, что асимметрия распределения всегда положительна, т. е. «длинная часть» кривой всегда расположена справа от математического ожидания.

Как видно из соотношения (4.5.28), эксцесс кривой также всегда положителен, т. е. вблизи своего центра кривая распределения всегда круче нормальной кривой. Из вида производящей функции (4.5.19) при целом α можно вывести еще одно интересное следствие: полагая в (4.5.19) $\alpha = 0$, получим:

$$m_0(t) = \frac{1}{1-\beta t} \tag{4.5.29}$$

производящую функцию закона

$$F_{0,\beta}(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\beta}}. \tag{4.5.30}$$

С другой стороны, очевидно,

$$m(t) = [m_0(t)]^{\alpha+1}.$$

Это показывает, что величину X с законом $F_{\alpha,\beta}(t)$ можно рассматривать как сумму $(\alpha+1)$ независимых величин $x_1 + x_2 + \ldots + x_{\alpha+1}$, распределенных согласно (4.5.30), при этом согласно (4.5.22) и (4.5.23)

$$\mathbf{M}(x_1) = \ldots = \mathbf{M}(x_{\alpha+1}) = \beta, \tag{4.5.31}$$

$$\mathbf{D}(x_1) = \ldots = \mathbf{D}(x_{\alpha+1}) = \beta^2. \tag{4.5.32}$$

Если α велико, то мы можем применить теорему Ляпунова

$$\mathbf{P}\left\{\frac{(x_1 + \ldots + x_{\alpha+1}) - (\alpha+1)\beta}{\beta\sqrt{\alpha+1}} < t\right\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{2} + \Phi(t). \tag{4.5.33}$$

Следовательно, нормированная величина X с законом $F_{\alpha,\beta}(x)$ при большом α приближенно следует нормальному закону распределения. Это заключение имеет силу и при не целых значениях α.

Другое следствие из формулы (4.5.16) также заслуживает внимания. Рассмотрим в случае закона Пуассона вероятность

$$\mathbf{P}_\lambda(X \geqslant k) = \sum_{m=k}^{\infty} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = 1 - \left(1 + \frac{\lambda}{1} + \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots + \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right) e^{-\lambda}.$$

Полагая в (4.5.16) $\beta = 1$, $\alpha = k-1$, $x = \lambda$, получим:

$$\mathbf{P}_\lambda(X \geqslant k) = F_{k-1,1}(\lambda)$$

и отсюда

$$\mathbf{P}_\lambda(X < k) = 1 - F_{k-1,1}(\lambda).$$

Таким образом, закон Пуассона может быть выражен через интегральную функцию гамма-распределения. Отсюда в связи с (4.5.33) можно вывести, что нормированное уклонение величины X, следующей закону Пуассона при возрастании среднего значения λ, стремится к нормальному закону: это соотношение приводит к приближенной формуле

$$P_\lambda(X \leqslant k) \approx \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{k + \frac{1}{2} - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) \tag{4.5.34}$$

для больших λ.

4.5.2. Бэта-распределение. Наряду с гамма-функцией в различных приложениях встречается другая функция от двух аргументов, получившая название «*бэта*»-*функции*. Эта функция выражается определенным интегралом

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx. \tag{4.5.35}$$

Аргументы a и b являются положительными действительными числами. Бэта-функция может быть выражена через гамма-функцию, именно имеет место следующее важное соотношение, которое доказывать здесь мы не будем [1]):

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \tag{4.5.36}$$

Если a и b—целые числа, то $B(a, b)$ может быть выражена через факториалы, так как $\Gamma(a) = (a-1)!$,

$$\Gamma(b) = (b-1)! \quad \text{и} \quad \Gamma(a+b) = (a+b-1)!.$$

Из (4.5.36) следует далее симметричность функции B относительно аргументов a и b:

$$B(a, b) = B(b, a), \tag{4.5.37}$$

в которой можно убедиться также, произведя в (4.5.35) замену переменной x на $1-x$.

Рассмотрим теперь функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{B(a, b)}\, x^{a-1}(1-x)^{b-1} & \text{для } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{для } x < 0 \text{ и } x > 1. \end{cases}$$

Эта функция неотрицательна, обращается в нуль на концах интервала (0, 1), если $a > 1$ и $b > 1$; если же $0 < a < 1$ или $0 < b < 1$, то $\varphi(x)$ обращается в бесконечность на левом или соответственно на правом конце этого интервала. Если $a - 1 > 0$ и $b - 1 > 0$, то $\varphi(x)$ имеет внутри промежутка (0; 1) один максимум в точке $x_0 = \dfrac{a-1}{a+b-2}$. При $a - 1 < 0$, $b > 1$ функция $\varphi(x)$ убывает от $+\infty$ до 0, а при $a - 1 > 0$, $b < 1$ функция $\varphi(x)$ возрастает от 0 до $+\infty$ при возрастании x от 0 до 1. При $a - 1 < 0$ и $b - 1 < 0$ функция $\varphi(x)$ имеет U-образный график; минимум функции $\varphi(x)$ достигается в точке

$$x_0 = \frac{1-a}{(1-a)+(1-b)}.$$

Площадь под кривой $\varphi(x)$ равна единице, так как

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx = \frac{B(a, b)}{B(a, b)} = 1;$$

функция $\varphi(x)$ определяет *бэта-распределение*, появляющееся в различных вопросах математической статистики и теории вероятности.

Интегральная функция бэта-распределения обозначается через $I_x(a, b)$:

$$\int_0^x \varphi(x)\,dx = I_x(a, b) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \tag{4.5.38}$$

$$I_x(a, b) = 0 \quad \text{при} \quad x \leqslant 0,$$

$$I_x(a, b) = 1 \quad \text{при} \quad x \geqslant 1.$$

---

[1]) В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. III, ч. 2, изд. 5-е, Гостехиздат, М.—Л., 1951, стр. 265—266.

$I_x(a, b)$ называется *неполной бэта-функцией*. Одно из важных соотношений, которому она удовлетворяет, записывается следующим образом:

$$I_{(1-x)}(a, b) = 1 - I_x(b, a). \tag{4.5.39}$$

Для доказательства в интеграле

$$I_{(1-x)}(a, b) = \frac{1}{\mathrm{B}(a, b)} \int_0^{1-x} t^{a-1}(1-t)^{b-1}\, dt$$

сделаем замену t на $1-t'$; тогда получим, пользуясь (4.5.37):

$$I^{(a, b)}_{(1-x)} = -\frac{1}{\mathrm{B}(a, b)} \int_1^x t'^{b-1}(1-t')^{a-1}\, dt' = \frac{1}{\mathrm{B}(a, b)} \int_x^1 t^{b-1}(1-t)^{a-1}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{B}(b, a)} \left\{ \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{a-1}\, dt - \int_0^x t^{b-1}(1-t)^{a-1}\, dt \right\} = 1 - I_x(b, a),$$

что и доказывает (4.5.39).

Моменты бэта-распределения легко определяются:

$$\nu_r = \mathbf{M}(X^r) = \int_0^1 \varphi(x)\, x^r\, dx = \frac{1}{\mathrm{B}(a, b)} \int_0^1 x^{a+r-1}(1-x)^{b-1}\, dx = \frac{\mathrm{B}(a+r, b)}{\mathrm{B}(a, b)};$$

используя (4.5.36), мы получим:

$$\nu_r = \frac{\Gamma(a+r)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+r+b)} \cdot \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+b+r)} \cdot \frac{\Gamma(a+r)}{\Gamma(a)}. \tag{4.5.40}$$

Но согласно (4.5.5) при r целом

$$\Gamma(a+r) = (a+r-1)\,\Gamma(a+r-1) = (a+r-1)(a+r-2)\,\Gamma(a+r-2) =$$
$$= (a+r-1)(a+r-2)\ldots(a+r-r)\,\Gamma(a) = a(a+1)\ldots(a+r-1)\,\Gamma(a)$$

и аналогично

$$\Gamma(a+b+r) = (a+b)(a+b+1)\ldots(a+b+r-1)\,\Gamma(a+b).$$

Поэтому (4.5.40) может быть записан окончательно в очень простой форме

$$\nu_r = \frac{a(a+1)\ldots(a+r-1)}{(a+b)(a+b+1)\ldots(a+b+r-1)}. \tag{4.5.41}$$

В частности, для математического ожидания и дисперсии имеем:

$$\mathbf{M}X = \nu_1 = \frac{a}{a+b},$$

$$\sigma_X^2 = \mathbf{D}X = \nu_2 - \nu_1^2 = \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)} - \frac{a^2}{(a+b)^2} = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}.$$

Из бэта-распределения путем предельного перехода по параметрам можно получить другие распределения. Если один из параметров, например b, неограниченно возрастает, кривая становится асимметричной — ее максимум передвигается к началу координат. Величина X становится бесконечно малой. Рассмотрим вспомогательную величину $bX = Z$; плотность этой величины будет:

$$\varphi_z(x) = \varphi\left(\frac{x}{b}\right)\frac{1}{b} = \frac{x^{a-1}\left(1-\frac{x}{b}\right)^{b-1}}{b^a \mathrm{B}(a, b)} \qquad (0 < x < 1).$$

Так как

$$\left(1-\frac{x}{b}\right)^{b-1} \to e^{-x}$$

и, с другой стороны,

$$\frac{b^a\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \to 1,$$

то

$$\varphi_z(x) \to \frac{x^{a-1}e^{-x}}{\Gamma(a)},$$

откуда легко можно заключить, что

$$\mathbf{P}(Z<x) = \mathbf{P}\left(X<\frac{x}{b}\right) = I_{\left(\frac{x}{b}\right)}(a,\ b) \to \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^x e^{-x}x^{a-1}\,dx.$$

Таким образом, из неполной бэта-функции мы получим неполную гамма-функцию предельным переходом по b. Точно так же при $a\to\infty$, пользуясь (4.5.39), найдем:

$$I_{\left(1-\frac{x}{b}\right)}(a,\ b) = 1 - I_{\left(\frac{x}{a}\right)}(b,\ a) \to 1 - \frac{1}{\Gamma(b)}\int_0^x e^{-x}x^{b-1}\,dx.$$

Если оба параметра a и b неограниченно возрастают, то можно обнаружить, что нормированное уклонение величины X, т. е.

$$Z = \frac{X - \nu_1}{\sigma_X}$$

будет приближаться к нормальному распределению $N(z;\ 0,\ 1)$.

Это обстоятельство приводит для любого z при больших a и b к такой асимптотической формуле:

$$I_{\nu_1+z\sigma}(a,\ b) \approx N(z;\ 0;\ 1) = \frac{1}{2} + \Phi(z),$$

где

$$\nu_1 = \frac{a}{a+b} \quad \text{и} \quad \sigma = \sqrt{\frac{ab}{(a+b)^3}}.$$

В качестве одного из приложений неполной бэта-функции выведем формулу, выражающую «хвост» биномиального распределения.

Пусть

$$\psi(p) = \mathbf{P}_{m,\ n} + \mathbf{P}_{m+1,\ n} + \ \dots\ + \mathbf{P}_{n,\ n} = \sum_{k=m}^{n} \mathbf{P}_{k,\ n},$$

где

$$\mathbf{P}_{k,\ n} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,p^k(1-p)^{n-k}. \tag{4.5.42}$$

Рассматривая p как независимое переменное и дифференцируя $\psi(p)$ по p, найдем:

$$\psi'(p) = \sum_{k=m}^{n} \mathbf{P}'_{k,\ n},$$

где согласно (4.5.42) при $k<n$

$$\mathbf{P}'_{k,\ n} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\left[kp^{k-1}(1-p)^{n-k} - p^k(n-k)(1-p)^{n-k-1}\right] =$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}p^{k-1}(1-p)^{n-k} - \frac{n!}{k!\,(n-k-1)!}p^k(1-p)^{n-k-1} =$$

$$= n\left[\mathbf{P}_{k-1,\ n-1} - \mathbf{P}_{k,\ n-1}\right],$$

а при $k=n$

$$\mathbf{P}'_{nn} = n\mathbf{P}_{n-1,\ n-1}.$$

Таким образом,

$$\psi'(p) = n\sum_{k=m}^{n}(\mathbf{P}_{k-1,\ n-1} - \mathbf{P}_{k,\ n-1}) = n\{(\mathbf{P}_{m-1,\ n-1} - \mathbf{P}_{m,\ n-1}) + (\mathbf{P}_{m,\ n-1} - \mathbf{P}_{m+1,\ n-1}) +$$

$$+ \dots + \mathbf{P}_{n-1,\ n-1}\} = n\mathbf{P}_{m-1,\ n-1} = \frac{n!}{(m-1)!\,(n-m)!}p^{m-1}(1-p)^{n-m}.$$

Отсюда, принимая еще во внимание, что $\psi(0)=0$, получим:

$$\psi(p)=\frac{n!}{(m-1)!\,(n-m)!}\int_0^p x^{m-1}(1-x)^{n-m}\,dx$$

или

$$\sum_{k=m}^{n} P_{k,\,n}=\frac{\int_0^p x^{m-1}(1-x)^{n-m}\,dx}{\beta(m,\ n-m+1)}=I_p(m,\ n-m+1). \tag{4.5.43}$$

Функция $I_x(a,\ b)$ табулирована в довольно широком диапазоне аргументов x, a и b. Поэтому указанную формулу можно использовать для подсчета вероятности получения численности данного рода предметов, превышающей заданное целое число в бесповторной выборке, если вероятность извлечения предмета данного рода в единичном опыте равна p.

4.5.3. χ^2-распределение. В этом параграфе мы познакомимся с одним распределением, которое будет играть большую роль при решении многих важных задач математической статистики. Оно носит название *χ^2-распределения* и относится к распределениям сумм квадратов нормально распределенных случайных величин.

Рассмотрим вначале распределение квадрата одной нормально распределенной случайной величины.

Пусть случайная величина X нормально распределена ($N(z;\ 0,\ 1)$), а величина Y представляет квадрат величины X, т. е.

$$Y=X^2.$$

Величина Y всегда неотрицательна, и при $y>0$ соотношение $Y<y$ эквивалентно соотношению $-\sqrt{y}<X<+\sqrt{y}$. Поэтому Y имеет функцию распределения

$$F_Y(y)=\begin{cases}0 & \text{при } y\leqslant 0,\\ F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y}) & \text{при } y>0,\end{cases} \tag{4.5.44}$$

где $F_X(x)$ — функция распределения величины X.

Соотношение (4.5.44) справедливо только тогда, когда $-\sqrt{y}$ есть точка непрерывности функции $F_X(x)$.

Плотность вероятности величины Y получим, дифференцируя соотношение (4.5.44),

$$\varphi_Y(y)=F'_Y(y)=F'_X(\sqrt{y})\cdot\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}-F'_X(-\sqrt{y})\left(-\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{y}}[\varphi_X(\sqrt{y})+\varphi_X(-\sqrt{y})]$$

и окончательно

$$\varphi_Y(y)=\begin{cases}0 & \text{при } y\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{2\sqrt{y}}[\varphi_X(\sqrt{y})+\varphi_X(-\sqrt{y})] & \text{при } y>0,\end{cases} \tag{4.5.45}$$

где $\varphi_X(x)$, плотность вероятности величины X.

Поскольку мы предположили, что величина X нормально распределена, плотность вероятности величины Y будет:

$$\varphi_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\sqrt{y})^2}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(-\sqrt{y})^2}{2}}\right]=$$

$$=\frac{2}{2\sqrt{y}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}, \qquad (4.5.46)$$

где $y>0$. При $y\leqslant 0$ плотность вероятности $\varphi_Y(y)$ равна нулю.

Легко видеть, что соотношение (4.5.46) представляет частный случай гамма-распределения (4.5.1) с параметрами $\alpha=-\frac{1}{2}$ и $\beta=2$.

В самом деле, подставив эти значения в (4.1.30), получим:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)2^{-\frac{1}{2}+1}}x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{2}}.$$

Так как согласно (4.5.14) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$, то $\varphi(x)$ можно переписать в виде

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{x}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-\frac{x}{2}}.$$

Таким образом, $\varphi_Y(y)$ действительно представляет рассматриваемый частный случай гамма-распределения.

Найдем теперь производящую функцию распределения квадрата нормально распределенной величины с параметрами 0 и 1.

Так как это распределение согласно доказанному представляет частный случай гамма-распределения, когда $\alpha=-\frac{1}{2}$ и $\beta=2$, то производящую функцию найдем из соотношения (4.5.19):

$$m(t)=\frac{1}{(1-2t)^{1/2}}=\frac{1}{\sqrt{1-2t}}=(1-2t)^{-\frac{1}{2}}. \qquad (4.5.47)$$

Пусть теперь имеется k независимых нормально распределенных случайных величин $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$ с параметрами 0 и 1.

Рассмотрим сумму квадратов этих величин

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}Z_i^2.$$

Каждая из величин Z_i^2 имеет производящую функцию $(1-2t)^{-\frac{1}{2}}$.

Согласно соотношению (3.6.15) производящая функция величины χ^2 будет равна произведению производящих функций квадратов величин $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$:

$$m_{\chi^2}(t)=m_1(t)\cdot m_2(t)\ldots m_k(t)=(1-2t)^{-\frac{k}{2}}, \qquad (4.5.48)$$

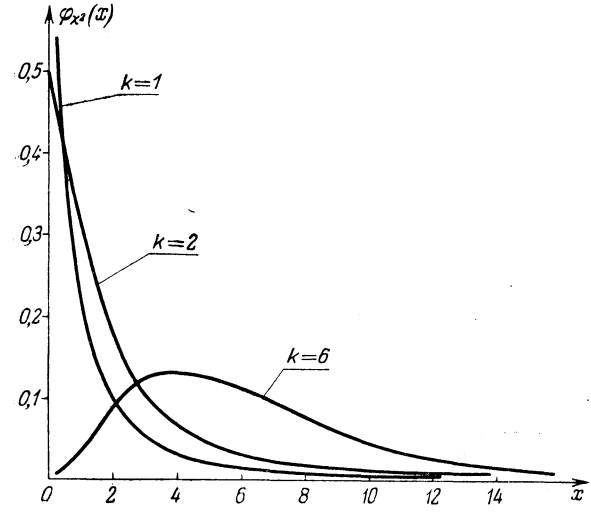
т. е. производящая функция суммы квадратов есть также производящая функция некоторого гамма-распределения со значениями параметров $\beta=2$ и $\alpha+1=\frac{k}{2}$, т. е. $\alpha=\frac{k}{2}-1$.

Поэтому плотность вероятности величины χ^2 будет иметь вид

$$\varphi_{\chi^2}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)2^{\frac{k}{2}}}\,x^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} & \text{при } x>0,\\ 0 & \text{при } x\leqslant 0.\end{cases}\tag{4.5.49}$$

Распределение, заданное соотношением (4.5.49), носит название *χ^2-распределения*.

Приложения этого важного распределения к статистике будут рассмотрены в дальнейшем.



Черт. 50. График плотности вероятности χ^2-распределения при числе степеней свободы $k=1$, 2 и 6.

При $k<2$ плотность вероятности постоянно убывает при $x>0$, а при $k>2$ имеет максимум в точке $x=k-2$.

График плотности вероятности χ^2-распределения при $k=1$, 2 и 6 представлен на черт. 50.

Параметр k, т. е. число квадратов независимых величин, часто называется *числом степеней свободы* данного распределения. Смысл этого термина разъясним позже.

Найдем математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, асимметрию и эксцесс χ^2-распределения.

Учитывая, что χ^2-распределение является частным случаем гамма-распределения при $\beta=2$ и $\alpha=\frac{k}{2}-1$, из соотношений (4.5.22), (4.5.23), (4.5.26), (4.5.27) и (4.5.28) получим:

$$\mathbf{M}\chi^2=\nu_1=\beta(\alpha+1)=2\left(\frac{k}{2}-1+1\right)=k,\tag{4.5.50}$$

$$\mathbf{D}\chi^2=\mu_2=\beta^2(\alpha+1)=2^2\frac{k}{2}=2k,\tag{4.5.51}$$

$$\sigma_{\chi^2}=\sqrt{\mathbf{D}X^2}=\sqrt{2k},\tag{4.5.52}$$

$$S_k=\frac{2}{\sqrt{\alpha+1}}=\sqrt{\frac{8}{k}},\tag{4.5.53}$$

$$E_k=\frac{6}{\alpha+1}=\frac{12}{k}.\tag{4.5.54}$$

Легко показать, что сумма двух или нескольких независимых случайных величин, обладающих χ^2-распределением, имеет также χ^2-распределение с числом степеней свободы, равным сумме чисел свободы слагаемых. В самом деле, пусть χ^2_1 и χ^2_2 — независимые случайные величины, имеющие каждая χ^2-распределение с числами степеней свободы соответственно k_1 и k_2. Тогда производящие функции этих величин согласно (4.5.48) будут соответственно:

$$m_{\chi^2_1}(t)=(1-2t)^{-\frac{k_1}{2}}\quad\text{и}\quad m_{\chi^2_2}(t)=(1-2t)^{-\frac{k_2}{2}}.$$

Найдем производящую функцию суммы $\chi_1^2+\chi_2^2$ этих величин. Согласно (3.6.15) будем иметь:

$$m_{\chi_1^2+\chi_2^2}(t)=m_{\chi_1^2}(t)\,m_{\chi_2^2}(t)=(1-2t)^{-\frac{k_1}{2}}\cdot(1-2t)^{-\frac{k_2}{2}}=(1-2t)^{-\frac{k_1+k_2}{2}}. \quad (4.5.55)$$

Мы пришли к производящей функции того же вида, что и производящие функции слагаемых величин, но с показателем степени, равным сумме показателей степени в выражениях для производящих функций слагаемых.

Отсюда следует на основании **3.6.2**, что если χ_1^2 и χ_2^2 имеют независимые χ^2-распределения с числами степеней свободы, равными соответственно k_1 и k_2, то сумма $\chi_1^2+\chi_2^2$ имеет также χ^2-распределение с числом степеней свободы, равным k_1+k_2.

Из теоремы (4.3.37) Ляпунова следует, что с устремлением к бесконечности числа k степеней свободы, т. е. числа суммируемых квадратов случайных нормальных величин, распределение величины χ^2 устремляется к нормальному с центром в точке k (так как математическое ожидание каждой случайной величины равно единице) и средним квадратическим отклонением, равным приблизительно $\sqrt{2k}$. Еще лучшее приближение можно получить, рассматривая при $k\geqslant 30$ величину $\sqrt{2\chi^2}$ как нормально распределенную величину с центром в точке $\sqrt{2k-1}$ и средним квадратическим отклонением, равным единице. Доказательства этого предложения мы приводить здесь не будем. Таким образом, при больших числах k степеней свободы (бо́льших 30) вероятности нахождения случайной величины χ^2 практически вычисляются с помощью формулы (4.5.67) и табл. IV приложений.

4.5.4. Преобразования χ^2-распределения. Распределение существенно положительных величин. В технических приложениях часто встречаются распределения, получающиеся из χ^2-распределения путем его преобразования.

Рассмотрим некоторые из этих простых преобразований χ^2-распределения.

Пусть случайные величины X_1, X_2, ..., X_k нормально распределены и имеют параметры 0 и σ, где σ — какая угодно положительная постоянная.

Тогда величины $\frac{X_1}{\sigma}$, $\frac{X_2}{\sigma}$, ..., $\frac{X_k}{\sigma}$ также независимы, нормальны и имеют параметры 0 и 1.

Согласно изложенному выше плотность вероятности суммы квадратов отношений величины X_1, X_2, ..., X_k к их общему среднему квадратическому отклонению σ, т. е. $\eta=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2$, определяется соотношением (4.5.49).

Тогда плотность вероятности суммы квадратов величин X_1, X_2, ..., X_k, т. е. $\sum_{i=1}^{k}X_i^2=\eta\sigma^2$, может быть найдена согласно правилу (4.4.7). Заменяя переменное x в (4.5.49) на $\frac{x}{\sigma^2}$ и умножая результат на $\frac{1}{\sigma^2}$, мы получим:

$$\varphi_{\Sigma X_i^2}(x)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)2^{k/2}}\left(\frac{x}{\sigma^2}\right)^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}\cdot\frac{1}{\sigma^2}=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)2^{k/2}\sigma^k}x^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}. \quad (4.5.56)$$

Теперь по тому же правилу (4.4.1) можно найти распределение средней арифметической $\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}X_i^2$ квадратов случайных величин. Для этого заменим в (4.5.56) x на kx и результат умножим на k. Это приведет нас к следующему

закону распределения среднего арифметического k квадратов случайных величин

$$\varphi_{\frac{1}{k}\sum X_i^2}(x)=\frac{\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sigma^k}x^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{kx}{2\sigma^2}}. \qquad (4.5.57)$$

Наконец, используя **4.4.2** и соотношение (4.5.56), можно найти распределение квадратного корня из суммы квадратов случайных величин, т. е. $\sqrt{\sum_{i=1}^{k}X_i^2}=\sqrt{\eta}$.

В данном случае $y=f(x)=\sqrt{x}$, $x=\psi(y)=y^2$, а потому в элементарной вероятности (4.5.56) $\varphi_{\sum X_i^2}(x)\,dx$, заменяя x на y^2 и dx на $2y\,dy$, найдем:

$$\varphi_{\sqrt{\sum X_i^2}}(y)\,dy=\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sigma^k}(y^2)^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}2y\,dy,$$

откуда, заменяя y снова на x для плотности $\varphi_{\sqrt{\sum X_i^2}}(x)$, получим:

$$\varphi_{\sqrt{\sum X_i^2}}(x)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)2^{\frac{k}{2}}\sigma^k}(x^2)^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}2x=\frac{2}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)2^{\frac{k}{2}}\sigma^k}x^{k-1}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}. \qquad (4.5.58)$$

Если в соотношении (4.5.58) положить $k=1$, то, учитывая, что согласно (4.5.14) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$, получим:

$$\varphi_{\sqrt{\sum X_i^2}}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,2^{1/2}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}=2n(x;\,0,\,\sigma), \qquad (4.5.59)$$

где $x>0$.

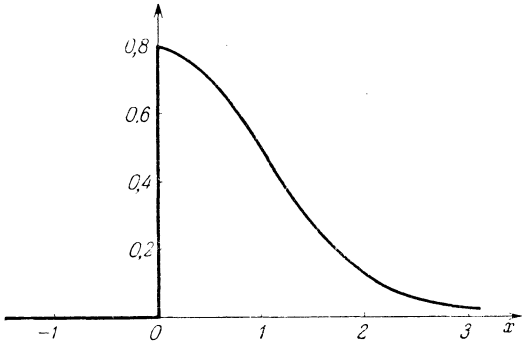
Таким образом, мы пришли к удвоенной нормальной плотности при параметрах 0 и σ. Это вполне естественно потому, что соотношение (4.5.58) относится к распределению только неотрицательных квадратных корней из суммы квадратов.

При $k=1$ мы, следовательно, придем к величине

$$Y=+\sqrt{X^2}=|X|.$$

Функция (4.5.59) и дает плотность вероятности этой величины при $x>0$.

Для $x<0$ эту же функцию нужно считать равной нулю, так как величина $|X|$ отрицательных значений не принимает.



Черт. 51. График плотности вероятности $Y=+\sqrt{X^2}=|X|$, причем X следует нормальному закону $n(x;\,0,\,1)$.

Геометрически распределение величины $|X|$ описывается кривой, получающейся из соответствующей нормальной плотности вероятности путем удвоения ее ординат в «положительной» ветви, тогда как при отрицательных значениях x график плотности вероятности совпадает с осью x (черт. 51).

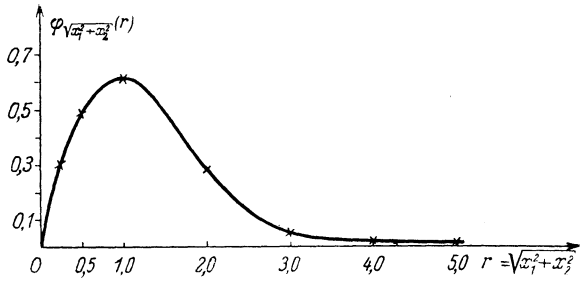
Если в соотношении (4.5.58) положить $k = 2$, то, учитывая, что согласно соотношению (4.5.6)

$$\Gamma(1) = \Gamma(0+1) = 1,$$

получим:

$$\varphi_{\sqrt{X_1^2+X_2^2}}(x) = \frac{2}{\Gamma(1)2\sigma^2} x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma^2} x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}. \qquad (4.5.60)$$

Эту функцию можно рассматривать как плотность вероятности распределения расстояния $\sqrt{X_1^2+X_2^2}$ некоторой случайной точки $Q(X_1, X_2)$ от начала координат. При этом предполагается, что координаты одинаково распределены по нормальному закону $n(x; 0, \sigma)$.



Черт. 52. График плотности вероятности распределения эксцентриситетов при $a = 0$ и $\sigma = 1$.

Иногда в технических приложениях этот закон называют законом «эксцентриситета», т. е. смещения, так как ему подчиняется распределение величины эксцентриситета $r = \sqrt{x^2+y^2}$ оси центрового отверстия относительно геометрической оси цилиндрической поверхности валика, если координаты X и Y оси центрового отверстия, отсчитываемые от этой оси, в торцевой плоскости распределены нормально.

Кривая плотности вероятности распределения эксцентриситетов имеет вид, показанный на черт. 52.

Найдем математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение указанного распределения.

По определению (3.3.3) математического ожидания, учитывая (4.5.60), будем иметь:

$$\mathbf{M}\left(\sqrt{X_1^2+X_2^2}\right) = \frac{1}{\sigma^2}\int_0^\infty x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Умножим интеграл в правой части на $\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}}$ и перейдем к пределам от $-\infty$ до $+\infty$ (вследствие чего интеграл удвоится) и в то же время умножим его на $\frac{1}{2}$, тогда получим:

$$\mathbf{M}\left(\sqrt{X_1^2+X_2^2}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma\sqrt{2\pi}\sigma}\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} x^2 dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sigma}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} x^2 dx =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 n(x; 0, \sigma)\, dx.$$

Последний интеграл, как видно из (3.4.6), представляет дисперсию нормального закона $n(x; 0, \sigma)$, равную σ^2 согласно соотношению (4.3.20).

Учитывая это, окончательно получим:

$$\mathbf{M}\left(\sqrt{X_1^2+X_2^2}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sigma}\sigma^2 = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \qquad (4.5.61)$$

Найдем теперь дисперсию распределения «эксцентриситетов» с помощью соотношения (3.4.7):

$$\mathbf{D}\left(\sqrt{X_1^2+X_2^2}\right)=\mathbf{M}\left(\sqrt{X_1^2+X_2^2}\right)^2-\left[\mathbf{M}\left(\sqrt{X_1^2+X_2^2}\right)\right]^2=\mathbf{M}\left(X_1^2+X_2^2\right)-\sigma^2\frac{\pi}{2}=$$

$$=\mathbf{M}X_1^2+\mathbf{M}X_2^2-\sigma^2\frac{\pi}{2}=\sigma^2+\sigma^2-\sigma^2\frac{\pi}{2}=2\sigma^2-\sigma^2\frac{\pi}{2}=\sigma^2\left(2-\frac{\pi}{2}\right), \quad (4.5.62)$$

так как при нормальном законе $n(x;\ 0,\ \sigma)$ имеем:

$$\mathbf{M}X^2=\mathbf{M}(X-0)^2=\mathbf{D}X=\sigma^2.$$

Среднее квадратическое отклонение распределения «эксцентриситетов» определяем по соотношению (3.4.8):

$$\sigma_{\sqrt{X_1^2+X_2^2}}=\sqrt{\sigma^2\left(2-\frac{\pi}{2}\right)}=\sigma\cdot\sqrt{2-\frac{\pi}{2}}. \quad (4.5.63)$$

Возвратимся к рассмотрению преобразований χ^2-распределения.

Если в соотношении (4.5.58) положить $k=3$, то, учитывая, что $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, получим *закон распределения Максвелла* скорости молекулы в пространстве или закон распределения «существенно положительных» величин при трехмерном исходном нормальном распределении

$$\varphi_{\sqrt{X_1^2+X_2^2+X_3^2}}(x)=\frac{2}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)2^{3/2}\sigma^3}x^2e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}=\frac{2}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}2\sqrt{2}\sigma^3}x^2e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x^2}{\sigma^3}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}. \quad (4.5.64)$$

Наконец, можно найти распределение неотрицательного квадратного корня из средней арифметической квадратов нормальных случайных величин $U=\sqrt{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}X_i^2}$.

Плотность величины $X=\frac{1}{k}\sum_{1}^{k}X_i^2$ задается (4.5.57). Используя правило нахождения плотности распределения функции $U=\sqrt{X}$ (4.4.7), найдем $X=U^2$ и, следовательно,

$$g(u)=\varphi_X(u^2)\,2u=\frac{\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\sigma^k}(u^2)^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{ku^2}{2\sigma^2}}2u.$$

Заменяя u в найденном выражении плотности на x, получим:

$$g(x)=\varphi_{\sqrt{\frac{1}{k}\sum X_i^2}}(x)=\frac{2\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sigma^k}x^{k-1}e^{-\frac{kx^2}{2\sigma^2}}. \quad (4.5.65)$$

С целью облегчения вычислений вероятностей при χ^2-распределении случайной величины составлены таблицы двоякого рода.

В одних таблицах (см. табл. VIII приложений) приводятся вероятности $\mathbf{P}(\chi^2>\chi_q^2)$ того, что сумма квадратов $\chi^2=\sum_{i=1}^{k}Z_i^2$ случайных величин Z_1,

$Z_2, \ldots, Z_k$, следующих нормальному закону $n(z; 0, 1)$, примет значение, не меньшее, чем взятое χ_q^2 раз среднее квадратическое отклонение при заданном числе k степеней свободы.

Эта вероятность может быть подсчитана по формуле, получающейся из соотношений (3.1.8) и (4.5.56):

$$\mathbf{P}(\chi^2 > \chi_q^2) = \mathbf{P}(\chi_q^2 < \chi^2 < \infty) = \int_{\chi_q^2}^{\infty} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) 2^{k/2}} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx. \qquad (4.5.66)$$

На графике плотности вероятности величины χ^2, следующей χ^2-распределению (черт. 53), эта вероятность изображается заштрихованной площадкой.

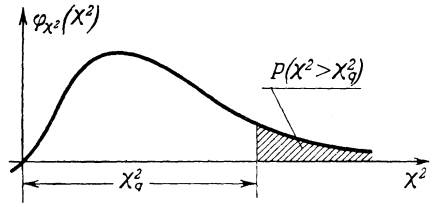
Табл. VIII приложений построена для чисел степеней свободы до 30. При большем числе степеней свободы нужные значения могут быть вычислены с помощью табл. IV приложений функции Лапласа по формуле

$$\mathbf{P}(\chi^2 > \chi_q^2) \approx 0{,}5 - \Phi(z), \qquad (4.5.67)$$

где z по χ_q определяется соотношением

$$\chi_q^2 = \frac{(z + \sqrt{2k-1})^2}{2}. \qquad (4.5.67')$$

а k — число степеней свободы; при вероятностях $\mathbf{P}(\chi^2 > \chi_q^2)$ от 0 до 0,5 z имеет знак плюс, а при вероятностях от 0,5 до 1 — минус.



Черт. 53. График плотности χ^2-распределения с «доверительной границей» χ_q^2 и «доверительной вероятностью» $\mathbf{P}(\chi^2 > \chi_q^2)$.

В других таблицах (табл. IX приложений) приводятся значения абсциссы χ_q^2 (черт. 53), вероятность $\mathbf{P}(\chi^2 > \chi_q^2)$ превышения которой при заданном числе k степеней свободы вычисляется по той же формуле (4.5.66).

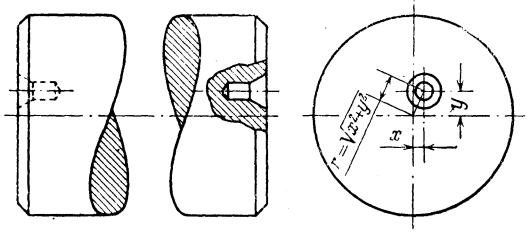
Абсцисса χ_q^2 называется иногда «*доверительной границей*», а вероятность $\mathbf{P}(\chi^2 > \chi_q^2)$ называют «*доверительной вероятностью*».

Так как

$$\mathbf{P}(\chi^2 > \chi_q^2) = \mathbf{P}(\chi > \chi_q),$$

то табл. VIII и IX приложений пригодны также для вычисления вероятностей, отвечающих распределениям (4.5.58), (4.5.59), (4.5.60), (4.5.65) и, конечно, (4.5.57) при $\sigma = 1$.

При вычислении вероятностей по табл. IX приложений необходимо значения границ y для x, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ и $u = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ предварительно возводить в квадрат, а затем брать по табл. IX приложений вероятности $\mathbf{P}(\chi^2 > \chi_q^2)$. При пользовании же табл. VIII приложений необходимо из найденного значения χ_q^2 по заданным $\mathbf{P}(\chi^2 > \chi_q^2)$ и k извлекать квадратный корень.



Черт. 54. Эксцентриситет оси центровых отверстий относительно геометрической оси цилиндрической поверхности валика.

Пример 4.5.1. Эксцентриситет $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ оси центровых отверстий относительно геометрической оси цилиндрической поверхности валика определяется одинаково распределенными по нормальному закону с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 0{,}02$ *мм* координатами x и y (черт. 54). Если $a = 0$, то это означает, что величины x и y представляют собой отклонения от соответствующих математических

ожиданий $\mathbf{M}X$ и $\mathbf{M}Y$. Требуется определить вероятность того, что величина эксцентриситета r превысит 0,06 *мм*,

$$\chi_q = \frac{0{,}06}{0{,}02} = 3, \quad \chi_q^2 = 3^2 = 9, \quad k = 2.$$

По табл. IX приложений находим:

$$\mathbf{P}(\chi > 3) = \mathbf{P}(\chi^2 > 9) = 0{,}0111 = 1{,}11\%.$$

4.5.5. Уклонения от нормального закона в производственных условиях. До сих пор мы рассматривали распределения случайных величин в некоторых неизменных условиях.

Однако реальные случайные явления протекают во времени, причем с течением времени в распределениях случайных величин часто происходят существенные изменения.

Рассмотрению случайных величин, зависящих от времени и вообще от одного или нескольких непрерывно изменяющихся параметров, посвящена теория случайных (стохастических) процессов.

Мы не будем здесь сколько-нибудь подробно останавливаться на этой теории в целом и на ее основных положениях, затронем лишь отдельные вопросы, относящиеся к уклонениям от нормального закона распределений некоторых случайных величин в производственных условиях.

Одно из наиболее часто встречающихся в практике уклонений от нормальной формы кривой бывает связано с неоднородностью рассматриваемых данных, представляющих как бы смесь двух или большего числа распределений с нормальными плотностями $n_1(x;\ a_1,\ \sigma_1)$, $n_2(x;\ a_2,\ \sigma_2)$. Такого рода неоднородность возникает, например, если смешиваются изделия с нескольких станков или изготовленные на одном станке, но при различных настройках или из неоднородных материалов и т. д.

«Смешение» изделий приводит к тому, что наудачу взятый объект (например, изделие) может с некоторой вероятностью p_1 принадлежать к распределению, имеющему плотность $n_1(x;\ a_1,\ \sigma_1)$, с вероятностью p_2 — к распределению, имеющему плотность $n_2(x;\ a_2,\ \sigma_2)$, и т. д. Сумма «весов» вероятностей p_i смешиваемых распределений равна единице.

Для элементарной вероятности $\varphi(x)\,dx$ результирующего смешанного распределения по формуле полной вероятности найдем:

$$\varphi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{s} p_i n_i(x;\ a_i,\ \sigma_i)\,dx,$$

так что

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{s} p_i n_i(x;\ a_i,\ \sigma_i)$$

и

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{s} p_i \int_{-\infty}^{x} n_i(x;\ a_i,\ \sigma_i)\,dx = \sum_{i=1}^{s} p_i N_i(x;\ a_i,\ \sigma_i),$$

где $F(x)$ и $N_i(x;\ a_i,\ \sigma_i)$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ s)$ — интегральные функции распределения.

Если «смешиваются» два нормальных распределения, то результирующее распределение получается, как правило, асимметричным, а иногда и двухвершинным (черт. 55): форма кривой $\varphi(x)$ существенно зависит от отношения весов $p_1 : p_2$, от разности центров и дисперсий.

Когда мы обнаруживаем в эмпирически наблюденной картине две или более вершины, вполне естественно возникает вопрос о причинах неоднородности и о выделении собственных однородных компонент наблюденной смеси. Эта задача,

разумеется, может быть решена лишь при тщательном анализе данного статистического материала, позволяющего иногда уловить существенные качественные различия среди наблюденных объектов и затем подразделить его на качественно однородные группы.

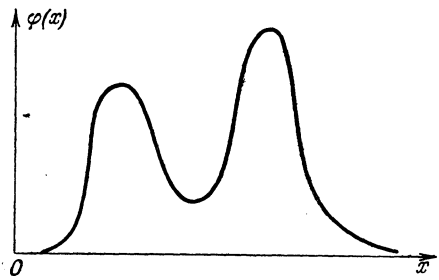
Из сказанного нельзя, конечно, сделать обратное заключение: одновершинность распределения далеко не всегда свидетельствует об однородности.

К своеобразной схеме «смешивания» распределений приводит задача о распределении суммарной продукции станка (например, партии изготовленных деталей) при значительном износе инструмента за все время работы или при переменном температурном режиме, влияющем на средний размер изготавливаемых деталей. Центр рассеивания в этом случае будет изменяться со временем

$$MX = a(t),$$

где $a(t)$ — некоторая функция времени. Пусть мы подразделили рассматриваемый промежуток времени T на большое число малых промежутков $(t_0, t_1), (t_1, t_2), \ldots, (t_{s-1}, t_s)$ длины

$$\Delta t_i = \frac{T}{s}.$$



Черт. 55. Схема результирующего двухвершинного распределения, получающегося при «смешении» двух нормальных распределений с разными параметрами.

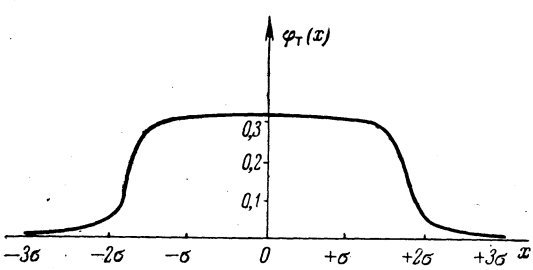
Допустим, что распределение изделий, изготовленных в промежутке (t_k, t_{k+1}) по интересующему нас признаку следует нормальному закону с плотностью $n(x; a(t_k), \sigma)$, где $a(t_k)$ значение функции $MX = a(t)$ в момент $t = t_k$. Распределение суммарной продукции за весь период T будет следовать закону, получающемуся по рассмотренному нами выше правилу смешения с равными весами

$$p_k = \frac{1}{s}$$

(так как мы считаем, что числа изделий, производимых в равные промежутки времени, равны):

$$\varphi_T(x) = \frac{1}{s}\sum_0^{s-1} n[x; a(t_k), \sigma] =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_0^{s-1} n[x; a(t_k), \sigma]\,\Delta t.$$



Черт. 56. График плотности вероятности $\varphi_T(x)$ при равномерном смещении центра группирования величины x в зависимости от времени.

Предполагая $a(t)$ непрерывно изменяющимся во времени и $\Delta t = \frac{T}{s}$ малыми, мы можем заменить сумму интегралом

$$\varphi_T(x) = \frac{1}{T}\int_0^T n[x; a(t), \sigma]\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{e^{-\frac{[x-a(t)]^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,dt. \qquad (4.5.68)$$

В более общем случае параметр σ может также изменяться во времени. Плотность $n[x; a(t), \sigma(t)]$, осреднением которой по промежутку T получается результирующая плотность смешанного распределения, носит название «мгновенной» плотности.

В частном важном случае можно считать

$$\sigma = \text{const} \quad \text{и} \quad a(t) = a_0 + \lambda t$$

линейной функцией времени в промежутке $(0, T)$. В этом случае из (4.5.68) получим:

$$\varphi_T(x) = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-a_0-\lambda t)^2}{2\sigma^2}}\,dt = \frac{1}{\lambda T}\int_0^{\lambda T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{[(x-a_0)-u]^2}{2\sigma^2}}\,du.$$

Правую часть этого равенства можно рассматривать как результат композиции по формуле (4.1.6) плотностей нормального закона $n(x; a_0, \sigma)$ и равномерного закона в промежутке $(0, T)$. После подстановки

$$x - a_0 - u = z\sigma$$
$$-du = \sigma\, dz$$

получаем далее:

$$\varphi_T(x) = \frac{1}{\lambda T\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x-a_0-\lambda T}{\sigma}}^{\frac{x-a_0}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\lambda T}\left[\Phi\left(\frac{x-a_0}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x-a_0-\lambda T}{\sigma}\right)\right]. \quad (4.5.69)$$

Вид кривой $\varphi_T(x)$ показан на черт. 56[1]).

§ 6. Приложение теории кривых распределения к решению размерных цепей.

4.6.1. Понятие о размерных цепях. Одним из важных для практики приложений к технике изложенных в предыдущих параграфах положений теории кривых распределения является приложение их к расчету размерных цепей.

Ввиду существенных преимуществ, которые дает на практике это приложение, остановимся на данном вопросе более подробно.

Размерной цепью называют замкнутый контур, образованный взаимно связанными размерами.

По производственно-конструктивным признакам размерные цепи подразделяются на:

1) *сборочные*, — выражающие взаимную связь размеров деталей механизма;

2) *подетальные*, — выражающие взаимную связь окончательных (чистовых) размеров одной и той же детали;

3) *операционные*, — выражающие взаимную связь операционных и окончательного размеров детали.

По взаимному расположению звеньев размерные цепи подразделяются на:

1) *линейные*, если составляющие размеры расположены параллельно друг другу в одной плоскости или в параллельных плоскостях (т. е. если они коллинеарны);

2) *плоскостные*, если составляющие размеры не параллельны друг другу, но расположены в параллельных плоскостях (т. е. если они компланарны);

3) *пространственные*, если составляющие размеры расположены в непараллельных плоскостях;

4) *угловые*, — образованные угловыми размерами, связанными общей вершиной.

Размеры деталей, составляющие размерную цепь, принято называть *звеньями*.

Зазор или натяг в сборочных цепях рассматривают как самостоятельное звено размерной цепи; в отличие от других звеньев оно может иметь номинальный размер, равный нулю.

Из числа звеньев цепи обычно выделяют одно звено, по которому ведут расчет. Это звено практически обычно получается в результате суммирования размеров всех остальных звеньев; поэтому его называют *замыкающим* или *конечным* (а иногда *исходным*). По отношению к конечному звену остальные звенья данной цепи будут составляющими.

Составляющие звенья в свою очередь подразделяются на:

1) *увеличивающие* (или *положительные*) и

2) *уменьшающие* (или *отрицательные*).

---

[1]) Более подробное изложение данного вопроса см. в книге Н. А. Бородачева, Основные вопросы теории точности производства, Издательство Академии наук СССР, М.—Л., 1950.

Увеличивающим (положительным) звеном называется такое, с увеличением которого (при постоянстве остальных составляющих звеньев) конечное звено увеличивается.

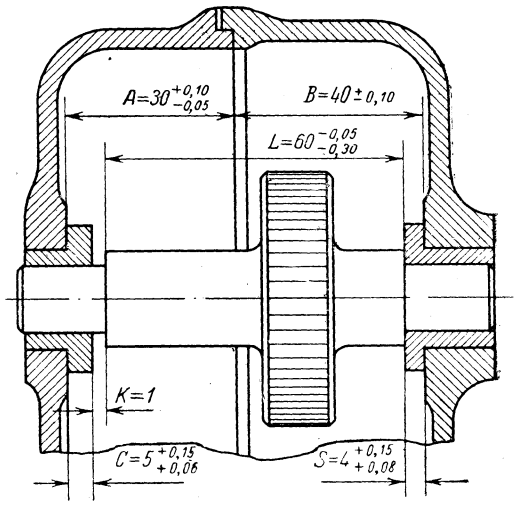
Уменьшающим (отрицательным) звеном называется такое, с увеличением которого (при постоянстве остальных составляющих звеньев) конечное звено уменьшается.

Любое звено размерной цепи может быть выбрано в качестве конечного звена. Однако практический интерес представляет только такое «конечное» звено, которое действительно на практике получается в результате суммирования остальных звеньев цепи.

Примером сборочной линейной цепи может служить замкнутый контур, образованный размерами A, B, C, L, S и K узла коробки передач, показанного на черт. 57.

Здесь зазор K является, естественно, конечным звеном. Размеры A и B представляют увеличивающие, а размеры C, L и S — уменьшающие звенья. Из чертежа ясно, что

$$K=(A+B)-(C+L+S). \quad (4.6.1)$$



Черт. 57. Эскиз механизма и схематическое изображение размерной цепи.

Если обозначить увеличивающие звенья через P_i ($i=1, 2, \ldots, m$), а уменьшающие через N_j ($j=1, 2, \ldots, n$), то, используя известную теорему о проекциях составляющих и замыкающей на некоторую ось, вообще будем иметь:

$$K=\sum_{i=1}^{m} P_i-\sum_{j=1}^{n} N_j. \quad (4.6.2)$$

Это соотношение называют основным уравнением размерной цепи. Из него видно, что увеличивающие звенья являются в правой части положительными членами, а уменьшающие — отрицательными, что и поясняет ранее отмечавшиеся вторые названия таких звеньев: «положительные» звенья и «отрицательные» звенья.

4.6.2. Расчет размерных цепей. Под расчетом размерной цепи обычно понимают взаимную расчетную увязку размеров ее звеньев, при которой решаются обычно две задачи:

1) по заданным составляющим звеньям находят конечное звено (поверочный расчет);

2) по заданному конечному звену, которое в этом случае называют исходным, находят составляющие звенья (проектный расчет).

Первая задача — однозначная и более простая.

Для решения второй задачи требуются дополнительные условия.

В качестве такого дополнительного условия при решении второй задачи иногда служат: равные трудности при выполнении звеньев в производстве — это условие мало удобно, так как приводит к довольно громоздкому подбору отклонений и к субъективному решению.

Лучше применять вместо него другое условие, а именно, примерно один класс точности для всех составляющих звеньев.

В последнем случае определяют среднюю точность всех составляющих звеньев в единицах допуска.

По числу единиц допуска определяют единый класс точности для всех составляющих звеньев, а по нему берут допуски из таблиц ОСТ. Часто по таблицам ОСТ берут скользящие посадки (полученного при расчете класса точности) для всех составляющих звеньев, кроме одного, — регулирующего звена. Для последнего вычисляют нестандартные отклонения, исходя из выбранных по таблицам ОСТ отклонений остальных звеньев и из заданного размера конечного звена.

Следует заметить, что подбираемые для составляющих звеньев посадки во многих случаях, например, в таком, как приведено в разбираемых ниже примерах, носят условный характер, так как в системе ОСТ посадки установлены для гладких цилиндрических сопряжений, а в данном случае мы имеем линейные сопряжения и имели бы право пользоваться существующими более широкими нормалями допусков линейных размеров.

Тем не менее, применение посадок и в этих примерах оправдано хотя бы тем, что имеется возможность использования стандартных предельных калибров для контроля размеров тех или иных звеньев. Последнее же ведет к снижению затрат на измерения.

Формулы для решения обеих задач при определении размерных цепей зависят от принятого метода расчета.

На практике применяют:

1) метод «максимума-минимума», называемый иногда также методом полной взаимозаменяемости,

2) теоретико-вероятностный метод, называемый иногда также методом неполной взаимозаменяемости.

Метод «максимума-минимума» основан на определении крайних отклонений конечного звена по крайним же отклонениям составляющих звеньев путем простого суммирования (при решении первой задачи).

Введем обозначения:

$K_{ср}$ — средний размер конечного звена;

$P_{ср\,i}$ — средний размер i-го положительного звена;

$N_{ср\,j}$ — средний размер отрицательного j-го звена;

m и n — числа соответственно положительных и отрицательных звеньев;

δ_K — допуск конечного звена K;

$\overline{\delta}_K$ — половина этого допуска, т. е.

$$\overline{\delta}_K = \frac{\delta_K}{2};$$

$\overline{\delta}_i$ — половина допуска i-го составляющего звена (положительного или отрицательного);

a — число единиц допуска $0{,}5\sqrt[3]{d_{ср}}$ в допуске каждого из составляющих звеньев;

$d_{ср\,i}$ — средний диаметр для того интервала диаметров по ОСТ, в который попадает размер i-го составляющего звена;

α_i и α_j — коэффициенты относительной асимметрии соответственно i-го положительного звена и j-го отрицательного звена;

k_i — коэффициент относительного рассеивания i-го составляющего звена.

Расчетные формулы для поверочного расчета в этом случае имеют вид:

$$K_{ср} = \sum_{i=1}^{m} P_{ср\,i} - \sum_{j=1}^{n} N_{ср\,j}, \tag{4.6.3}$$

$$\overline{\delta}_K = \sum_{i=1}^{m+n} \overline{\delta}_i; \tag{4.6.4}$$

и для проектного расчета вид:

$$a = \frac{2\delta_K}{\sum_{i=1}^{m+n} \sqrt[3]{d_{\text{ср}\,i}}}, \tag{4.6.5}$$

где δ_K берется выраженным в *мк*, а $d_{\text{ср}\,i}$ — в *мм*.

При теоретико-вероятностном методе аналогичные расчетные формулы несколько усложняются, принимая вид

$$K_{\text{ср}} = \sum_{i=1}^{m} (P_{\text{ср}\,i} + \alpha_i \bar{\delta}_i) - \sum_{j=1}^{n} (N_{\text{ср}\,j} + \alpha_j \bar{\delta}_j, \tag{4.6.6}$$

$$\bar{\delta}_K = \sqrt{\sum_{i=1}^{m+n} k_i^2 \bar{\delta}_i^2}; \tag{4.6.7}$$

$$a = \frac{2\delta_K}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m+n} k_i^2 d_{\text{ср}\,i}^{2/3}}}. \tag{4.6.8}$$

Коэффициент относительной асимметрии α_i, относящийся к i-му составляющему звену, применяется при расчете размерных цепей для характеристики несимметричности распределения отклонений случайной величины относительно середины заданного поля (например, относительно середины поля допуска размеров детали):

$$\alpha_i = \frac{\mathbf{M}X_i - \Delta_{0i}}{\bar{\delta}_i}, \tag{4.6.9}$$

где Δ_{0i} — координата середины заданного поля (черт. 58),

$\bar{\delta}_i$ — половина заданного поля,

$\mathbf{M}X_i$ — математическое ожидание. Здесь

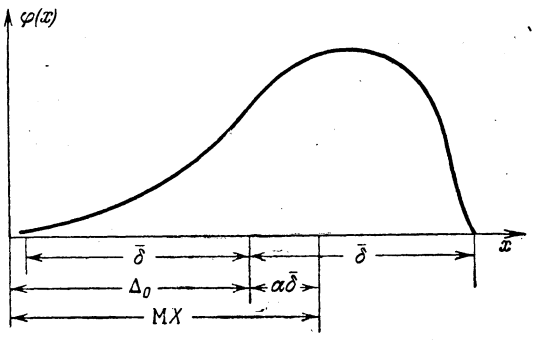
$$\Delta_{0i} = \frac{x_{\text{нб}_i} + x_{\text{нм}_i}}{2}, \tag{4.6.10}$$

$x_{\text{нб}_i}$ — верхний предел звена,

$x_{\text{нм}_i}$ — нижний предел звена.

Решая уравнение (4.6.9) относительно $\mathbf{M}X$, получаем:

$$\mathbf{M}X_i = \Delta_{0i} + \alpha_i \bar{\delta}_i. \tag{4.6.11}$$



Черт. 58. Графическая интерпретация коэффициента относительной асимметрии α.

Коэффициент относительного рассеивания k_i, относящийся к i-му составляющему звену, служит при расчете размерных цепей для сопоставления величины рассеивания данного звена с рассеиванием при нормальном распределении

$$k_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_{\text{н}}}, \tag{4.6.12}$$

где λ_i — относительное среднее квадратическое отклонение i-го составляющего звена,

$\lambda_{\text{н}}$ — относительное среднее квадратическое отклонение при нормальном распределении.

Относительное среднее квадратическое отклонение λ_i представляет отношение среднего квадратического отклонения σ_i к половине поля рассеивания $\overline{\delta}_i$.

$$\lambda_i = \frac{\sigma_i}{\overline{\delta}_i}, \tag{4.6.13}$$

откуда

$$\sigma_i = \lambda_i \overline{\delta}_i. \tag{4.6.14}$$

Значения α_i и k_i для различных законов распределения берутся по табл. X приложений. Примеры вычислений α_i и k_i по формулам (4.6.9) и (4.6.12) будут даны далее.

Формула (4.6.3) непосредственно следует из уравнения (4.6.2).

Формула (4.6.4) очень просто получается на основе упомянутого выше принципа максимума-минимума.

В самом деле, обозначив через $K_{нб}$ и $K_{нм}$ наибольший и наименьший предельные размеры конечного звена, из определения допуска будем иметь:

$$\delta_K = K_{нб} - K_{нм}. \tag{4.6.15}$$

Но по принципу максимума-минимума

$$K_{нб} = \sum_{i=1}^{m} P_{нб_i} - \sum_{j=1}^{n} N_{нм_j}, \tag{4.6.16}$$

где $P_{нб_i}$ — наибольший размер i-го положительного звена;

$N_{нм_j}$ — наименьший размер j-го отрицательного звена.

Аналогично

$$K_{нм} = \sum_{i=1}^{m} P_{нм_i} - \sum_{j=1}^{n} N_{нб_j}. \tag{4.6.17}$$

Подставляя (4.6.16) и (4.6.17) в (4.6.15), получим:

$$\delta_K = \sum_{i=1}^{m} P_{нб\,i} - \sum_{j=1}^{n} N_{нм\,j} - \sum_{i=1}^{m} P_{нм\,i} + \sum_{j=1}^{n} N_{нб\,j} = \sum_{i=1}^{m} (P_{нб\,i} - P_{нм\,i}) + \sum_{j=1}^{n} (N_{нб\,j} - N_{нм\,j}).$$

Учитывая, что из определения допуска

$$\delta_i = P_{нб\,i} - P_{нм\,i} \quad \text{и} \quad \delta_j = N_{нб\,j} - N_{нм\,j},$$

получим:

$$\delta_K = \sum_{i=1}^{m} \delta_i + \sum_{j=1}^{n} \delta_j = \sum_{i=1}^{m+n} \delta_i, \tag{4.6.18}$$

Разделив правую и левую части (4.6.18) на 2, приходим к (4.6.4).

Формула (4.6.5) получается из (4.6.18), если принять единый класс точности для всех составляющих звеньев. Учитывая, что по ОСТ единица допуска равна $0{,}5\sqrt[3]{d_{ср}}$, перепишем (4.6.18) в виде

$$\delta_K = \sum_{i=1}^{m+n} a_i 0{,}5 \sqrt[3]{d_{ср\,i}},$$

но так как при едином классе точности для всех составляющих звеньев

$$a_i = \text{const} = a,$$

получим:

$$\delta_K = 0{,}5\, a \sum_{i=1}^{m+n} \sqrt[3]{d_{ср\,i}},$$

откуда

$$a = \frac{2\delta_K}{\sum_{i=1}^{m+n} \sqrt[3]{d_{\text{ср}\,i}}},$$

что и требовалось.

Перейдем теперь к доказательству формул (4.6.6), (4.6.7) и (4.6.8), применяющихся при теоретико-вероятностном способе расчета размерных цепей.

Доказательство формулы (4.6.6). Из (4.6.2) видно, что размер конечного звена как случайная величина представляет сумму размеров составляющих звеньев. Поэтому его математическое ожидание представляет математическое ожидание суммы размеров составляющих звеньев

$$\mathbf{M}K = \mathbf{M}\left(\sum_{i=1}^{m} P_i - \sum_{j=1}^{n} N_j\right). \tag{4.6.19}$$

На основании теоремы (3.3.13) о математическом ожидании суммы выражение (4.6.19) может быть приведено к виду:

$$\mathbf{M}K = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{M}P_i - \sum_{j=1}^{n} \mathbf{M}N_j. \tag{4.6.20}$$

Отсюда на основании соотношения (4.6.11)

$$\mathbf{M}K = (\Delta_{0K} + \alpha_K \bar{\delta}_K) = \sum_{i=1}^{m} (\Delta_{0i} + \alpha_i \bar{\delta}_i) - \sum_{j=1}^{n} (\Delta_{0j} + \alpha_j \bar{\delta}_j), \tag{4.6.21}$$

где Δ_{0K}, Δ_{0i} и Δ_{0j} — координаты середин полей допусков соответственно конечного, положительных и отрицательных составляющих звеньев.

Начало координат для каждого звена помещаем в начало этого звена, т. е. в точки, где размеры соответствующих звеньев равны нулю, так что

$$\Delta_{0K} = K_{\text{ср}}; \quad \Delta_{0i} = P_{\text{ср}\,i}; \quad \Delta_{0j} = N_{\text{ср}\,j}.$$

Тогда формула (4.6.21) примет вид

$$\mathbf{M}K = K_{\text{ср}} + \alpha_k \bar{\delta}_k = \sum_{i=1}^{m} (P_{\text{ср}\,i} + \alpha_i \bar{\delta}_i) - \sum_{j=1}^{n} (N_{\text{ср}\,j} + \alpha_j \bar{\delta}_j). \tag{4.6.22}$$

На основании теоремы Ляпунова распределение размеров конечного звена при достаточном числе составляющих звеньев и при независимости их в совокупности будет подчиняться закону распределения, достаточно близкому к нормальному и, следовательно, математическое ожидание $\mathbf{M}K$ размеров конечного звена будет совпадать с серединой поля допуска, а коэффициент его относительной асимметрии будет равен нулю, т. е.

$$\mathbf{M}K = \Delta_{0K} = K_{\text{ср}}.$$

Тогда окончательно получим:

$$K_{\text{ср}} = \sum_{i=1}^{m} (P_{\text{ср}\,i} + \alpha_i \bar{\delta}_i) - \sum_{j=1}^{n} (N_{\text{ср}\,j} + \alpha_j \bar{\delta}_j),$$

т. е. мы пришли к формуле (4.6.6).

Доказательство формулы (4.6.7). Так как размер конечного звена K как случайная величина представляет сумму составляющих звеньев, то, следовательно, его дисперсия является дисперсией суммы составляющих звеньев

$$\mathbf{D}K = \mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{m} P_i - \sum_{j=1}^{n} N_j\right). \tag{4.6.23}$$

Так как размеры звеньев при сборке механизма можно считать независимыми в совокупности, то на основании теоремы (3.4.17) о дисперсии суммы выражению (4.6.23) может быть придан вид:

$$\mathbf{D}K = \mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{m} P_i - \sum_{j=1}^{n} N_j\right) = \mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{m} P_i\right) + \mathbf{D}\left(\sum_{j=1}^{n} N_j\right) = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{D}P_i + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{D}N_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sigma_{P_i}^2 + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{N_j}^2 = \sum_{i=1}^{m+n} \sigma_i^2, \qquad (4.6.24)$$

откуда, используя (4.6.14), получим:

$$\sigma_K = \sqrt{\sum_{i=1}^{m+n} \lambda_i \overline{\delta}_i^2}$$

и далее

$$\lambda_K \overline{\delta}_K = \sqrt{\sum_{i=1}^{m+n} \lambda_i^2 \overline{\delta}_i^2},$$

откуда

$$\overline{\delta}_K = \frac{1}{\lambda_K} \sqrt{\sum_{i=1}^{m+n} \lambda_i^2 \overline{\delta}_i^2}, \qquad (4.6.25)$$

где λ_i и $\overline{\delta}_i$ — соответственно относительное среднее квадратическое отклонение и половина поля рассеивания (здесь — поля допуска) положительных и отрицательных составляющих звеньев;

λ_K и σ_K — то же для конечного звена.

Умножая правую часть равенства (4.6.25) на $1 = \frac{\lambda_н}{\lambda_н}$ (где $\lambda_н$ — относительное среднее квадратическое отклонение при нормальном законе распределения), получим:

$$\overline{\delta}_K = \frac{\lambda_н}{\lambda_K} \sqrt{\sum_{i=1}^{m+n} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_н}\right)^2 \overline{\delta}_i^2},$$

откуда

$$\overline{\delta}_K = \frac{\lambda_н}{\lambda_K} \sqrt{\sum_{i=1}^{m+n} k_i^2 \overline{\delta}_i^2}. \qquad (4.6.26)$$

На основании теоремы Ляпунова можно утверждать, что при достаточно большом числе звеньев в размерной цепи при их независимости в совокупности, распределение конечного звена будет подчинено закону, достаточно близкому к нормальному.

Для этого случая можно считать, что $\lambda_K = \lambda_н$ и, следовательно, формула (4.6.26) примет вид

$$\overline{\delta}_K = \sqrt{\sum_{i=1}^{m+n} k_i^2 \overline{\delta}_i^2},$$

т. е. мы пришли к соотношению (4.6.7).

В тех случаях, когда закон распределения вероятностей размеров конечного звена заведомо не может быть признан нормальным или мы хотим в качестве половины поля рассеивания (практически предельного отклонения) при нормальном законе принять не величину 3σ, а большую или меньшую величину, то можно для расчетов воспользоваться формулой (4.6.26).

Доказательство соотношения (4.6.8). Умножив обе части равенства (4.6.7) на 2, будем иметь:

$$\delta_K = \sqrt{\sum_{i=1}^{m+n} k_i^2 \delta_i^2}. \qquad (4.6.27)$$

Выражая допуски составляющих звеньев через произведение единиц допусков $0{,}5\sqrt[3]{d_{\text{ср}\,i}}$ на соответствующее число a_i таких единиц в допуске, получим:

$$\delta_K = \sqrt{\sum_{i=1}^{m+n} k_i^2 \cdot a_i^2 d_{\text{ср}_i}^{2/3} 0{,}5^2}.$$

Приняв единый класс точности для всех составляющих звеньев, будем иметь:

$$a_i = \text{const} = a$$

и, следовательно,

$$\delta_K = 0{,}5a \sqrt{\sum_{i=1}^{m+n} k_i^2 \cdot d_{\text{ср}\,i}^{2/3}},$$

откуда

$$a = \frac{2\delta_K}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m+n} k_i^2 \cdot d_{\text{ср}\,i}^{2/3}}}.$$

Таким образом, мы пришли к соотношению (4.6.8).

Заметим еще, что при вычислении по формулам (4.6.5) и (4.6.8) числа a единиц допуска класс точности составляющих звеньев, а в случае необходимости и посадка определяются с помощью табл. XI и XII приложений, а отклонения размеров по выбранному классу и посадке берутся из любого справочника по допускам и посадкам на гладкие сопряжения [1]).

Рассмотрим теперь несколько простых примеров.

Пример 4.6.1. Пусть требуется определить по методу «максимума-минимума» размер конечного звена K узла, показанного на черт. 57. Средние размеры звеньев определяем из показанных на чертеже отклонений по формуле

$$P_{\text{ср}} = \frac{P_{\text{нб}} - P_{\text{нм}}}{2},$$

$P_{\text{ср}\,A} = 30{,}025$; $P_{\text{ср}\,B} = 40{,}000$; $N_{\text{ср}\,C} = 5{,}105$; $N_{\text{ср}\,S} = 4{,}115$, $N_{\text{ср}\,L} = 59{,}825$.

По формуле (4.6.3) находим:

$$K_{\text{ср}} = (30{,}025 + 40{,}000) - (5{,}105 + 4{,}115 + 59{,}825) = 70{,}025 - 69{,}045 = 0{,}98 \text{ мм}.$$

По формуле (4.6.4) находим:

$$\overline{\delta}_k = 0{,}075 + 0{,}100 + 0{,}045 + 0{,}125 + 0{,}035 = 0{,}38 \text{ мм}.$$

Предельные размеры конечного звена равны:

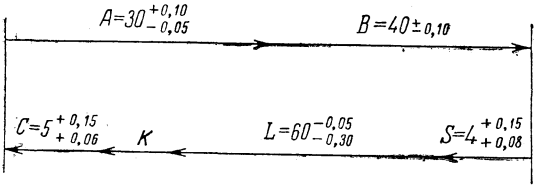
$$K_{\text{нб}} = 0{,}98 + 0{,}38 = 1{,}36 \text{ мм},$$

$$K_{\text{нм}} = 0{,}98 - 0{,}38 = 0{,}60 \text{ мм}.$$

---

[1]) См., например, Энциклопедический справочник — Машиностроение, т. V, стр. 7—18, 1947 (в дальнейшем обозначаемый ЭСМ).

Примем за номинальный размер конечного звена 1 *мм* по аналогии с ближайшим нормальным диаметром по ОСТ 6270 и тогда будем иметь:



Черт. 59. Схематическое изображение размерной цепи к примеру 4.6.1.

$$K = 1^{+0,36}_{-0,40}, \qquad \delta_k = 2\bar{\delta}_k = 0,76 \text{ мм}.$$

Схематическое изображение данной размерной цепи показано на черт. 59.

Пример 4.6.2. Пусть требуется определить методом максимума-минимума класс точности и отклонения составляющих звеньев примера 4.6.1, если отклонения конечного звена, определенные из условий работы механизма, должны быть $\pm 0,05$ *мм*.

Находим по таблицам ОСТ средние размеры для интервалов диаметров, в которые попадают номинальные размеры составляющих звеньев. Так, например, номинальный размер звена равен 30. Этот размер попадает в интервал диаметров по ОСТ от 18 до 30. Следовательно, для него средний размер интервала по ОСТ:

$$d_{\text{ср } A} = \frac{18+30}{2} = 24.$$

Подобно этому находим:

$$d_{\text{ср } B} = 40, \quad d_{\text{ср } C} = 4,5, \quad d_{\text{ср } L} = 65, \quad d_{\text{ср } S} = 4,5.$$

По формуле (4.6.5) находим число единиц допуска:

$$a = \frac{2 \cdot 100}{\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{4,5} + \sqrt[3]{65} + \sqrt[3]{4,5}} =$$

$$= \frac{200}{2,88 + 3,42 + 1,65 + 4,02 + 1,65} = \frac{200}{13,62} = 14,68.$$

По табл. XI приложений находим, что $a = 14,68$ соответствует примерно 2 классу точности для основного отверстия ($a = 16$) и 2а классу точности для основного вала ($a = 16$).

Пусть теперь регулирующим звеном будет звено B. По ЭСМ, т. V, стр. 10, берем для звеньев A, C, L и S отклонения по скользящей посадке 2а класса точности в «системе отверстия». Тогда

$$A = 30_{-0,021}; \quad C = 5_{-0,012}; \quad L = 60_{-0,03}; \quad S = 4_{-0,012}.$$

Заданные размеры конечного звена $K = 1 \pm 0,05$.

Определяем средний размер звена

$$B_{\text{ср}} = K_{\text{ср}} - A_{\text{ср}} + C_{\text{ср}} + L_{\text{ср}} + S_{\text{ср}} =$$

$$= 1 - 29,9895 + 4,994 + 59,985 + 3,994 = 39,9835.$$

Вычисляем половину допуска звена

$$\bar{\delta}_B = \bar{\delta}_K - \bar{\delta}_A - \bar{\delta}_C - \bar{\delta}_L - \bar{\delta}_S = 50 - 10,5 - 6 - 15 - 6 = 12,5 \text{ мк}.$$

Определяем предельные размеры звена B:

$$B_{\text{нб}} = 39,9835 + 0,0125 = 39,996,$$

$$B_{\text{нм}} = 39,9835 - 0,0125 = 39,971.$$

Таким образом, звено B будет иметь размер

$$B = 40^{-0,004}_{-0,029}.$$

Пример 4.6.3. Требуется определить λ и k для распределений по:
1) нормальному закону,
2) зокону равной вероятности,
3) закону равнобедренного треугольника (Симпсона).

1) Нормальный закон. При нормальном распределении обычно принимается $\bar{\delta}_н = 3\sigma_н$ и потому

$$\lambda_н = \frac{\sigma_н}{\bar{\delta}_н} = \frac{\sigma_н}{3\sigma_н} = \frac{1}{3}, \tag{4.6.28}$$

$$k_н = \frac{\lambda_н}{\lambda_н} = \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 1} = 1. \tag{4.6.29}$$

2. Закон равной вероятности. Используя (3.4.10), находим:

$$\lambda_{р.в} = \frac{\sigma_{р.в}}{\bar{\delta}_{р.в}} = \frac{\sigma_{р.в}}{\sqrt{3}\sigma_{р.в}} = 0{,}577, \tag{4.6.30}$$

$$k_{р.в} = \frac{\lambda_{р.в}}{\lambda_н} = \frac{1 \cdot 3}{\sqrt{3} \cdot 1} = 1{,}73. \tag{4.6.31}$$

3. Закон равнобедренного треугольника. Учитывая (3.4.13), находим:

$$\lambda_т = \frac{\sigma_т}{\bar{\delta}_т} = \frac{\sigma_т}{\sqrt{6}\sigma_т} = 0{,}408, \tag{4.6.32}$$

$$k_т = \frac{\lambda_т}{\lambda_н} = \frac{1 \cdot 3}{\sqrt{6} \cdot 1} = 1{,}22. \tag{4.6.33}$$

Таблица 4.6.1

Звенья	α_i	k_i
A	0	1
B	0	1,26
C	— 0,28	1,14
L	+ 0,63	0,75
S	+ 0,33	1,41

Пример 4.6.4. Пусть требуется определить теоретико-вероятностным методом размер конечного звена цепи по примеру 4.6.1, если коэффициенты относительной асимметрии α_i и коэффициенты относительного рассеивания k_i составляющих звеньев заданы табл. 4.6.1 (они взяты по табл. X приложений).

По формуле (4.6.6) находим средний размер конечного звена:

$$K_{ср} = [(30{,}025 + 0 \cdot 0{,}075) + (40{,}000 + 0 \cdot 0{,}10)] - [(5{,}105 - 0{,}28 \cdot 0{,}045) + (59{,}825 + 0{,}63 \cdot 0{,}125) + (4{,}115 + 0{,}33 \cdot 0{,}035)] = 70{,}025 - 69{,}123 = 0{,}902.$$

По формуле (4.6.7) находим половину поля рассеивания (здесь — поля допуска):

$$\bar{\delta}_K = \sqrt{1^2 \cdot 0{,}075^2 + 1{,}26^2 \cdot 0{,}10^2 + 1{,}14^2 \cdot 0{,}045^2 + 0{,}75^2 \cdot 0{,}125^2 + 1{,}41^2 \cdot 0{,}035^2} = \sqrt{0{,}035357} = 0{,}1880,$$

$$K_{нб} = 0{,}902 + 0{,}188 = 1{,}090, \quad K_{нм} = 0{,}902 - 0{,}188 = 0{,}714.$$

Выбираем номинальный размер равным единице по таблице нормальных диаметров.

Тогда окончательно

$$K = 1^{+0{,}090}_{-0{,}286}, \quad \delta_K = 0{,}376.$$

Пример 4.6.5. Требуется по условиям примера 4.6.4 определить размеры конечного звена K при условии, что $\bar{\delta}_K = 4\sigma_K$ и определить изменение процента риска выхода конечного звена за границы поля допуска по сравнению со случаем, когда $\bar{\delta}_K = 3\sigma_K$.

С помощью формулы (4.6.26) находим:

$$\lambda_{\text{н}} = \frac{1}{3}, \quad \lambda'_K = \frac{\sigma_K}{\bar{\delta}_K} = \frac{\sigma_K}{4\sigma_K} = \frac{1}{4};$$

$$\bar{\delta}_K = \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 1}\sqrt{0{,}035357} = \frac{4}{3} \cdot 0{,}1880 = 0{,}251; \quad \delta_K = 0{,}502.$$

Определим процент риска q_1 выхода из поля допуска при $\bar{\delta}_K = 3\sigma_K$. На основании формулы (4.3.35)

$$q_1\% = [1 - 2\Phi(3)]\,100 = (1 - 0{,}9973) \cdot 100 = 0{,}0027 \cdot 100 = 0{,}27\%.$$

Определим процент риска q_2 выхода из поля допуска при $\bar{\delta}_K = 4\sigma_K$.

$$q_2\% = (1 - 0{,}99994) \cdot 100 = 0{,}00006 \cdot 100 = 0{,}006\%.$$

Пример 4.6.6. Требуется определить теоретико-вероятностным методом класс точности и отклонения составляющих звеньев по условиям примера 4.6.3, если отклонения конечного звена, определенные из условий работы механизма, составляют $\pm 0{,}05$ *мм*.

В примере 4.6.2 мы имеем:

$$d_{\text{ср}A} = 24, \quad d_{\text{ср}B} = 40, \quad d_{\text{ср}C} = 4{,}5, \quad d_{\text{ср}L} = 65, \quad d_{\text{ср}S} = 4{,}5.$$

По формуле (4.6.8) определяем число единиц допуска, используя таблицу 4.6.1:

$$a = \frac{2 \cdot 100}{\sqrt{1^2 \cdot 24^{2/3} + 1{,}26^2 \cdot 40^{2/3} + 1{,}14^2 \cdot 4{,}5^{2/3} + 0{,}75^2 \cdot 65^{2/3} + 1{,}41^2 \cdot 4{,}5^{2/3}}} =$$

$$= \frac{200}{\sqrt{1 \cdot 8{,}320 + 1{,}587 \cdot 11{,}696 + 1{,}300 \cdot 2{,}726 + 0{,}5625 \cdot 16{,}166 + 1{,}988 \cdot 2{,}726}} =$$

$$= \frac{200}{\sqrt{44{,}94}} = \frac{200}{6{,}703} = 29{,}8.$$

По табл. XI приложений находим, что $a = 29{,}8$ соответствует 3 классу для основного отверстия и основного вала.

Пусть, как и в примере 4.6.2, регулирующим звеном будет звено B. По ЭСМ, т. V, стр. 10, берем для звеньев A, C, L и S отклонения по скользящей посадке 3 класса точности в «системе отверстия», т. е.

$$A = 30_{-0{,}045}; \quad C = 5_{-0{,}025}; \quad L = 60_{-0{,}06}; \quad S = 4_{-0{,}025}.$$

Определяем средний размер звена B:

$$B_{\text{ср}} = K_{\text{ср}} - (A_{\text{ср}} + \alpha_A\bar{\delta}_A) + (C_{\text{ср}} + \alpha_C\bar{\delta}_C) + (L_{\text{ср}} + \alpha_L\bar{\delta}_L) + (S_{\text{ср}} + \alpha_S\bar{\delta}_S) =$$

$$= 1 - (29{,}9775 + 0) + (4{,}9875 - 0{,}28 \cdot 0{,}0125) + (59{,}970 + 0{,}63 \cdot 0{,}030) +$$

$$+ (3{,}9875 + 0{,}33 \cdot 0{,}0125) = 39{,}987 \text{ мм}.$$

Вычисляем половину допуска звена B:

$$k_B^2\bar{\delta}_B^2 = \bar{\delta}_K^2 - k_A^2\bar{\delta}_A^2 - k_C^2\bar{\delta}_C^2 - k_L^2\bar{\delta}_L^2 - k_S^2\bar{\delta}_S^2 =$$

$$= 50^2 - 1^2 \cdot 22{,}5^2 - 1{,}14^2 \cdot 12{,}5^2 - 0{,}75^2 \cdot 30^2 - 1{,}41^2 \cdot 12{,}5^2 = 974;$$

$$k_B\bar{\delta}_B = \sqrt{974} = 31{,}2 \text{ мк}, \quad \bar{\delta}_B = 24{,}8 \text{ мк}.$$

Определяем предельные размеры звена B:

$$B_{\text{нб}} = 39{,}987 + 0{,}0248 = 40{,}0118 \text{ мм},$$

$$B_{\text{нм}} = 39{,}987 - 0{,}0248 = 39{,}9622 \text{ мм}.$$

Таким образом, размер звена B будет:

$$B = 40^{+0,012}_{-0,038}.$$

Сравнивая результаты решения примеров 4.6.2 и 4.6.6, заключаем, что при одинаковых условиях при расчете размерной цепи по теоретико-вероятностному методу допуски размеров составляющих звеньев оказались на один класс точности свободнее, чем при расчете по методу «максимума-минимума».

4.6.3. О выборе метода расчета. Представляется целесообразным рассмотреть теперь вопрос о том, как выбрать метод расчета размерной цепи для каждого данного случая.

Если считать, что действительные размеры каждого составляющего звена и конечного звена в теоретико-вероятностном смысле являются случайными величинами, то метод «максимума-минимума» представляется расчетом на такое положение, когда при сборке механизма размер конечного звена будет получен или путем суммирования наименьших размеров всех составляющих звеньев или путем суммирования всех наибольших их размеров.

Такое совпадение можно рассматривать как сложное событие A, заключающееся в наступлении или события $A_{\min}$ (совпадение наименьших размеров составляющих звеньев) или события $A_{\max}$ (совпадение наибольших размеров всех составляющих звеньев).

Так как события $A_{\min}$ и $A_{\max}$ несовместимы и входят в одну полную группу событий (это есть крайние отклонения размера конечного звена, а все его отклонения составляют полную группу событий), то на основании правила (2.2.8) сложения вероятностей имеет место соотношение

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_{\min}) + \mathbf{P}(A_{\max}). \tag{4.6.34}$$

В свою очередь событие $A_{\min}$ заключается в совместном наступлении n независимых событий, каждое из которых заключается в том, что при сборке механизма сборщик возьмет данную деталь (размер которой представляет собой звено в размерной цепи) с минимальным размером.

В данном случае для упрощения рассуждений мы полагаем, что размерная цепь состоит из одних только положительных звеньев, число которых равно n.

В общем случае при решении задачи по методу «максимума-минимума» размер конечного звена $A_{\min}$ получился бы при минимальных размерах положительных звеньев и при максимальных размерах отрицательных звеньев.

На основании следствия (2.2.22) из правила умножения вероятностей получим:

$$\mathbf{P}(A_{\min}) = \mathbf{P}(A_{\min_1}) \cdot \mathbf{P}(A_{\min_2}) \ldots \mathbf{P}(A_{\min_n}), \tag{4.6.35}$$

где $\mathbf{P}(A_{\min_1})$, $\mathbf{P}(A_{\min_2})$, ..., $\mathbf{P}(A_{\min_n})$ вероятности того, что сборщику попадутся детали с минимальными размерами, относящимися соответственно к первому, второму, ..., n-му звену размерной цепи.

Аналогично этому

$$\mathbf{P}(A_{\max}) = \mathbf{P}(A_{\max_1})\,\mathbf{P}(A_{\max_2}) \ldots \mathbf{P}(A_{\max_n}). \tag{4.6.36}$$

Для приближенной оценки вероятности $\mathbf{P}(A)$ можно принять, что:

1) $\mathbf{P}(A_{\min}) = \mathbf{P}(A_{\max})$,

2) $\mathbf{P}(A_{\min_1}) = \mathbf{P}(A_{\min_2}) = \ldots = \mathbf{P}(A_{\min_n})$,

3) «Типичное» звено размерной цепи может принимать такое число S дискретных значений, которое равно

$$S = \frac{\delta_T}{j},$$

где $\delta_т$ — допуск «типичного» звена, j — цена деления универсального измерительного инструмента, с помощью которого измеряются на производстве соответствующие размеры (обычно $j = \left(\frac{1}{8} \div \frac{1}{10}\right)\delta_т$).

Строго говоря, следовало бы считать число дискретных значений S равным $S = \frac{\delta_т}{j} + 1$, но при проведении упрощенного расчета мы считаем возможным приписать дискретные значения серединам участков, на которые разбивается допуск «типичного» звена, если каждый из участков полагать равным цене деления j измерительного инструмента.

В качестве «типичного» звена выбирают такое звено, для которого S оказывается наименьшим.

При этом допустимость применения для измерений размера звена измерительного инструмента с той или иной ценой деления поверяется по допускаемым ОСТ переходам за предельные размеры изделий при проверке их предельными калибрами.

Тогда, принимая распределение вероятностей отклонений конечного звена по закону равной вероятности, получим:

$$\mathbf{P}(A_{\min\, т}) = \mathbf{P}(A_{\max\, т}) = \frac{1}{S}. \tag{4.6.37}$$

На основании (4.6.34), (4.6.35), (4.6.36) и (4.6.37) получим:

$$\mathbf{P}(A) = 2\,[\mathbf{P}(A_т)]^n = 2\left(\frac{1}{S}\right)^n. \tag{4.6.38}$$

Продолжая вычисления дальше и находя с применением комбинаторики вероятности совпадения предкрайних значений отклонений составляющих звеньев и т. д., получим распределение вероятностей отклонений конечного звена, подсчитанных по способу «максимума-минимума»).

Задавшись теперь некоторым процентом риска не обеспечить взаимозаменяемость на сборке, найдем отклонения конечного звена, которыми можно пренебречь, сравнивая сумму вероятностей их получения с выбранным процентом риска.

Для упрощенной и вместе с тем приближенной ориентировки в выборе метода расчета можно ограничиться вероятностью получения крайних отклонений конечного звена, но сравнивать эту вероятность со значительно более низким процентом риска, чем это обычно принимается для расчетов. Например, можно принять, что если $\mathbf{P}(A) < 0{,}003\%$, то следует предпочесть теоретико-вероятностный способ расчета.

Пример 4.6.7. Размерная цепь состоит из пяти положительных составляющих звеньев, выполняемых в производстве независимо одно от другого.

Звено с наибольшим абсолютным размером допуска имеет размер $60Ш_3 = 60^{-0{,}095}_{-0{,}195}$, с наименьшим абсолютным размером допуска $5С_3 = 5_{-0{,}25}$.

Требуется определить вероятность совпадения в собранном узле или всех минимальных размеров составляющих звеньев или всех максимальных их размеров и выбрать по ней метод расчета данной размерной цепи.

Для простоты принимаем:

1) Допуски всех составляющих звеньев равными по абсолютной величине тому допуску одного из составляющих звеньев, расчет по которому дает наибольшую вероятность совпадения крайних отклонений.

2) Отклонения размеров от наименьшего предельного размера примем дискретным и подчиняющимися закону равной вероятности, что также приводит в общем к наибольшей вероятности совпадения крайних отклонений.

Определим сначала допуск, дающий наибольшую вероятность совпадения крайних звеньев.

Наибольший допуск $\delta_{нб} = -0{,}095 - (-0{,}195) = 0{,}100.$

Наименьший допуск $\delta_{нм} = 0 - (-0{,}025) = 0{,}025.$

При допуске в 0,100 мы будем производить измерения с помощью микрометра с ценой деления 0,010 *мм*, что дает нам 10 дискретных отклонений размера от наименьшего предельного размера с интервалами между ними, равными 0,010 *мм*.

При допуске в 0,025 *мм* измерения будем производить с помощью миниметра с ценой деления 0,002 *мм*, что дает 12 дискретных отклонений размера от наименьшего предельного размера с интервалами между ними, равными 0,002 *мм*.

Так как при 10 дискретных отклонениях получается большая вероятность совпадения крайних отклонений, чем при 12 дискретных отклонениях, то допуск каждого из пяти составляющих звеньев размерной цепи принимаем равным 0,100 *мм*.

Исходим из применения для измерений микрометра с ценой деления 0,01 *мм*.



Черт. 60. График распределения вероятностей отклонений «типичного звена» от наименьшего предельного размера.

График распределения вероятностей дискретных отклонений размеров от наименьшего предельного размера, согласно сделанному нами допущению о наличии закона равной вероятности, будет иметь вид, показанный на черт. 60.

Так как всех дискретных значений $S = 10$ и вероятности получения каждого из них равны одна другой, то вероятность получения каждого из дискретных отклонений равна

$$\mathbf{P}(x_i) = \frac{1}{S} = \frac{1}{10}.$$

Наименьшее отклонение $x_{нм}^{(K)}$ конечного звена может быть получено только при одной возможной комбинации: при минимальном отклонении размеров всех пяти составляющих звеньев, равном одной сотой миллиметра. Таким образом,

$$x_{нм}^{(K)} = 5 \cdot 1 = \text{пяти сотым долям миллиметра}.$$

Вероятность $\mathbf{P}(A = 5)$ отклонения конечного звена, равного 0,05 *мм*, представляет собой вероятность совместного получения (совпадения) минимальных отклонений $x_{нм} = 0{,}01$ *мм* у всех пяти составляющих звеньев.

На основании правила умножения она равна:

$$\mathbf{P}(A = 5) = \mathbf{P}(\text{и } A_{\min A} \text{ и } A_{\min B} \text{ и } A_{\min C} \text{ и } A_{\min L} \text{ и } A_{\min S}) =$$

$$= \prod_{i=1}^{5} \mathbf{P}(A_{\min i}) = \frac{1}{10^5} = 0{,}00001.$$

Аналогично этому

$$x_{нб}^{(K)} = 5 \cdot 10 = 50 \quad \text{и} \quad \mathbf{P}(A = 50) = 0{,}00001.$$

Вероятность совпадения или всех минимальных размеров составляющих звеньев, или всех максимальных их размеров на основании теоремы сложения равна:

$$\mathbf{P}(\text{или } A_{\min}, \text{ или } A_{\max}) = \mathbf{P}(A_{\min} = 5) + \mathbf{P}(A_{\max} = 50) = 0{,}00002 = 0{,}002\%.$$

Допустимый процент риска принимается равным $0{,}0027\%$.

Полученная нами вероятность мала, так как $0{,}002\% < 0{,}0027\%$.

Отсюда делаем вывод о том, что в данном случае следует предпочесть теоретико-вероятностный метод.

Говоря более строго, теоретический риск не обеспечить взаимозаменяемость на сборке при применении теоретико-вероятностного метода расчета размерной цепи при определенных условиях вообще не зависит от числа звеньев цепи, а зависит от типов законов распределения их размеров; от числа звеньев же зависит соотношение между полученными при расчетах по одному и другому методам допусками размера конечного звена.

Пример 4.6.8. Рассмотрим три размерные цепи с числами составляющих звеньев: в первой равным 2, во второй 5 и в третьей 10.

Пусть законы распределения размеров всех составляющих звеньев будут нормальными с математическими ожиданиями, расположенными в серединах соответствующих полей допусков. Допуски δ равны 12 *мм* и средние квадратические σ равны 2 *мм*.

Требуется определить для каждой из цепей допуски $\delta_м$ и $\delta_т$ размера конечного звена соответственно по методу «максимума-минимума» и по теоретико-вероятностному методу, соотношение ψ между этими допусками и риск q не обеспечить взаимозаменяемость на сборке.

Цепь I. Примем ориентировочно, что число интервалов разбиения поля допуска при измерениях $S = 10$;

$$\delta_{м,\,2} = 12 + 12 = 2 \cdot 12 = 24 \text{ мк};$$

$$\delta_{т,\,2} = 2\sqrt{6^2 + 6^2} = 2\sqrt{2 \cdot 6^2} = 2\sqrt{72} = 17 \text{ мк};$$

$$\psi_2 = \frac{\delta_{м,\,2}}{\delta_{т,\,2}} = \frac{24}{17} = \sqrt{2} = 1{,}41; \quad \bar{\delta}_{т,\,2} = \frac{\delta_{т,\,2}}{2} = \frac{17}{2} = 8{,}5 \text{ мк};$$

$$\sigma_{k,\,2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{2 \cdot 2^2} = \sqrt{8} = 2{,}83;$$

$$q_2 = 1 - 2\Phi\left(\frac{\bar{\delta}_{т,\,2}}{\sigma_{k,\,2}}\right) = 1 - 2\Phi\left(\frac{8{,}5}{2{,}83}\right) = 1 - \Phi(3) = 1 - 0{,}9973 = 0{,}0027 = 0{,}27\%;$$

$$\mathbf{P}(A_2) = 2\left(\frac{1}{S}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{2}{10^2} = 0{,}02 = 2\%.$$

Цепь II.

$$\delta_{м,\,5} = 5 \cdot 12 = 60 \text{ мк}; \quad \delta_{т,\,5} = 2\sqrt{5 \cdot 6^2} = 2\sqrt{180} = 26{,}8 \text{ мк};$$

$$\psi_5 = \frac{60}{26{,}8} = \sqrt{5} = 2{,}24; \quad \bar{\delta}_{т,\,5} = \frac{26{,}8}{2} = 13{,}4 \text{ мк};$$

$$\sigma_{k,\,5} = \sqrt{5 \cdot 2^2} = \sqrt{20} = 4{,}47;$$

$$q_5 = 1 - 2\Phi_1\left(\frac{13{,}4}{4{,}47}\right) = 1 - 2\Phi(3) = 1 - 0{,}9973 = 0{,}0027 = 0{,}27\%;$$

$$\mathbf{P}(A_5) = 2\left(\frac{1}{10}\right)^5 = 0{,}00002 = 0{,}002\%.$$

Цепь III.

$$\delta_{м,\,10} = 10 \cdot 12 = 120; \quad \delta_{т,\,10} = 2\sqrt{10 \cdot 6^2} = 2\sqrt{360} = 38;$$

$$\psi_{10} = \frac{120}{38} = \sqrt{10} = 3{,}16; \quad \bar{\delta}_{т,\,10} = \frac{38}{2} = 19;$$

$$\sigma_{к,\,10} = \sqrt{10 \cdot 2^2} = \sqrt{40} = 6{,}32;$$

$$q_{10} = 1 - 2\Phi\left(\frac{19}{6{,}32}\right) = 1 - 2\Phi(3) = 1 - 0{,}9973 = 0{,}0027 = 0{,}27\%;$$

$$\mathbf{P}(A_{10}) = 2\left(\frac{1}{10}\right)^{10} = 0{,}0000000002 = 0{,}00000002\%.$$

Обозначения в этом примере следующие:

$\delta_{м,\,2}$, $\delta_{м,\,5}$, $\delta_{м,\,10}$ — допуски размера конечного звена, подсчитанные по методу «максимума-минимума», соответственно для цепей с числом составляющих звеньев 2, 5 и 10;

$\delta_{т,\,2}$, $\delta_{т,\,5}$, $\delta_{т,\,10}$ — допуски размера конечного звена, подсчитанные по теоретико-вероятностному методу, для тех же цепей;

ψ_2, ψ_5, ψ_{10} — отношения между предыдущими величинами;

$\overline{\delta}_{т,\,2}$, $\overline{\delta}_{т,\,5}$, $\overline{\delta}_{т,\,10}$ — половины допусков;

$\sigma_{k,\,2}$, $\sigma_{k,\,5}$, $\sigma_{k,\,10}$ — средние квадратические отклонения размеров конечного звена для тех же цепей;

q_2, q_5, q_{10} — риск не обеспечить взаимозаменяемость на сборке для тех же цепей при расчете их по теоретико-вероятностному методу.

Таким образом, для всех трех цепей риск q оказался одинаковым и равным $0{,}27\%$, отношения ψ между допусками составляющих звеньев, подсчитанными по методу «максимума-минимума» и по теоретико-вероятностному методу, оказались соответственно равными 1,41; 2,24 и 3,16.

ГЛАВА V

ВЫБОРОЧНЫЙ МЕТОД И ПОЛУЧЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ОЦЕНОК РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

§ 1. Основные понятия выборочного метода и задачи математической статистики

5.1.1. Общие понятия о выборке. Основной задачей математической статистики, как мы видели, является разработка методов получения научно обоснованных выводов о массовых явлениях и процессах из данных наблюдения или эксперимента. Эти выводы и заключения относятся не к отдельным испытаниям, из повторений которых складывается данное массовое явление, а представляют утверждения об общих вероятностных характеристиках данного процесса, т. е. о вероятностях, законах распределения, математических ожиданиях и т. д. Такое использование фактических данных как раз и является отличительной чертой статистического метода.

Пусть мы располагаем некоторым материалом (обычно довольно ограниченным), например, о числе дефектных изделий в изготовленной в определенных производственных условиях продукции или о результатах испытаний материала на разрушение и т. п. Собранные нами данные могут представлять непосредственный интерес в смысле информации о качестве той или иной продукции в той или иной конкретной партии, изготовленной в определенное время в определенном месте. Но статистические проблемы возникают обычно тогда, когда мы на основе той же информации пожелаем сделать выводы относительно более широкого круга явлений. Так, например, нас может интересовать качество не одной только наблюденной конкретной партии изделий, а среднее качество всех тех изделий, которые производятся или могут производиться при одних и тех же условиях: другими словами, мы хотим охарактеризовать качество самого технологического процесса, оценивая, скажем, вероятность получения при нем дефектного изделия, среднюю продолжительность службы изделия, те или иные характеристики распределения прочности и т. д. В этом последнем случае мы рассматриваем собранный материал не ради него самого, а лишь как некоторую пробную группу или выборку, представляющую только один из возможных результатов, которые мы могли бы встретить при наблюдениях массового процесса в данной обстановке. Разумеется, мы должны отдавать себе отчет в том, что выводы и оценки, основанные на ограниченном материале наблюдения, отражают случайный состав нашей пробной группы и потому должны считаться лишь приближенными оценками вероятностного характера. Теория указывает, однако, во многих случаях, как наилучшим способом использовать имеющуюся у нас информацию для получения по возможности более точных и надежных характеристик, указывая при этом и степень надежности наших выводов, объясняющуюся ограниченностью запаса сведений. Возможность такого рода оценок и придает нашим заключениям научную ценность.

В наиболее простом виде соотношения между данными выборки и вероятностными характеристиками процесса выступают в той схеме независимых испытаний, которую мы рассмотрели в **2. 4. 1.**

Пусть имеется многочисленная совокупность однородных элементов (объектов), каждый из которых может обладать или не обладать каким-либо признаком; неизвестная нам доля тех из них, которые обладают этим признаком, и подлежит определению. Наше испытание заключается в том, что мы выбираем наугад один элемент из множества элементов, отмечаем, обладает или нет этот элемент данным признаком и возвращаем его обратно в совокупность. При выборе элемента из совокупности принимаются меры к тому, чтобы вероятность быть выбранным была одинакова для всех элементов. Тогда имеющееся множество элементов называется *генеральной совокупностью*. Группа из n элементов, наблюденных при повторных испытаниях, называется *случайной выборкой*, число отобранных элементов — *объемом выборки*, а описанный процесс отбора элементов — *простым случайным выбором*. Определив частость признака среди отобранных в выборке объектов, мы можем по ней, опираясь на теорему Лапласа, приближенно оценить долю признака в генеральной совокупности: в самом деле, эта доля в данных условиях играет роль неизменной вероятности появления объекта, обладающего интересующим нас признаком, при каждом из тиражей, а уклонения частости от вероятности приближенно следуют нормальному закону. При правильной организации отбора выборки мы должны обеспечить каждому объекту генеральной совокупности равную вероятность попадания в выборку.

На практике выбор из генеральной совокупности производится различными способами, в частности, выбор подразделяется на следующие разновидности:

1) *Выбор с возвратом или повторением*, или, иначе говоря, простой случайный выбор, о котором говорилось выше.

2) *Выбор без возврата или без повторения*, когда каждый отобранный индивидуум перед выбором следующего индивидуума обратно в генеральную совокупность не возвращается.

Полученная выборка называется *репрезентативной* (*представительной*), если она достаточно хорошо представляет пропорции генеральной совокупности.

Репрезентативность выборки обычно достигается *случайностью* выбора, когда каждому элементу обеспечивается равная со всеми остальными элементами вероятность попасть в выборку. Это в свою очередь обеспечивается тщательным перемешиванием (если это возможно) объектов генеральной совокупности перед отбором каждого объекта, использованием таблиц «случайных чисел» [1]), в которых числа расположены в случайном порядке, и другими специальными приемами.

Именно такая организация случайного процесса выборки, основанная на точном знании законов его протекания, дает существенный практический эффект, позволяя вместо сплошного обследования всех объектов генеральной совокупности ограничиться выборочным обследованием некоторой ее части.

Выбираемые образцы, конечно, могут подвергаться и более сложной классификации: по одному признаку мы можем различать несколько вариантов, можно классифицировать объекты по нескольким признакам одновременно и т. д.

Наконец, мы можем производить выбор из некоторой совокупности, объекты которой обладают количественным признаком, варьирующим от одного экземпляра к другому, таким, например, как размеры деталей в некоторой партии. Задачами выборки в этом случае могут являться оценка доли деталей, признак которых (скажем, размер) лежит в определенных границах, оценка среднего значения признака в партии, его дисперсии и т. д. В этих примерах выборка берется из определенной генеральной совокупности, которая каждый раз точно фиксируется и содержит конечное число объектов. Понятия вероятности, закона распределения и др. здесь играют вспомогательную роль, позволяя приближенно определить нужные нам характеристики генеральной совокупности путем специально организованного процесса случайной выборки.

---

[1]) См., например, книгу В. И. Романовского, Применение математической статистики в опытном деле, Гостехиздат, М. — Л., 1947, гл. I.

В других случаях, когда исследуем массовое явление, в котором интересующие нас величины претерпевают случайные колебания, мы в большинстве случаев также располагаем лишь ограниченным материалом наблюдений; наши же выводы хотим отнести к всему протеканию процесса в целом при неизменных основных условиях, а не к той его части, которая попала в орбиту нашего наблюдения. Такая экстраполяция наших выводов может быть оправдана далеко не всегда. Мы рассмотрим здесь только те случаи, когда данные наблюдения можно уподобить рассмотренной выше случайной выборке из некоторой «генеральной» совокупности. К этим случаям, правда, нередко оказывается возможным отнести различные физические и производственные эксперименты, наблюдения за ходом работы станков, за протеканием различных технологических процессов. Особенность последних случаев заключается в том, что здесь обычно не представляется возможным точно наперед очертить объем «генеральной» совокупности.

5.1.2. Распределение выборки, ее характеристики и их распределения. Рассмотрим исследование точности станка и приспособлений, связанное с величиной X отклонений размеров обрабатываемых деталей от номинала. Последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n$ наблюденных значений мы здесь будем рассматривать как некоторую «выборку», по которой мы хотим оценивать распределение вероятностей, размеров деталей в данных условиях, отвлекаясь от случайных обстоятельств, которые могли иметь место в процессе отбора пробных деталей из текущей продукции работающего станка. Обобщая использованную ранее терминологию, мы и здесь будем условно говорить о «выборке» из «генеральной совокупности» размеров деталей. Это будет означать, что в каждом случае отбора мы наблюдаем значение некоторой величины X, следующей определенному закону распределения. Мы предполагаем, следовательно, что основные условия, в которых протекает процесс изготовления деталей, остаются неизменными, а вероятностные законы, регулирующие поведение величины, также сохраняют свою силу неопределенно долго. Так понимаемая генеральная совокупность имеет, конечно, вполне определенный и реальный смысл, хотя и иной, чем это было в разобранных ранее примерах выборки из конечной совокупности. Последовательность наблюденных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ есть совокупность значений, принятых n одинаково распределенными независимыми величинами $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (представляющими n экземпляров одной и той же величины X, с которыми мы встречаемся в последовательных и независимых наблюдениях).

Если величина X следует закону распределения $F(x)$, то мы будем говорить, что *распределение «генеральной совокупности»* следует закону $F(x)$.

Пусть x — некоторая точка оси x; обозначим через n_x число выборочных значений, расположенных левее x на той же оси; следовательно, $\frac{n_x}{n}$ представляет частость наблюденных в выборке значений нашей случайной величины X, меньших x. Эта частость, очевидно, является функцией от x. Мы обозначим ее $\overline{F}_n(x)$ и назовем *функцией распределения выборки* или *эмпирической функцией распределения*. Таким образом,

$$\overline{F}_n(x) = \frac{n_x}{n}. \tag{5.1.1}$$

$\overline{F}_n(x)$ является оценкой вероятности неравенства $X < x$, т. е. теоретической функции распределения $F(x) = \mathbf{P}(X < x)$ величины X или, иными словами, *функции распределения генеральной совокупности*.

Исследуя $\overline{F}_n(x)$, мы по ней можем приближенно оценивать функцию $F(x)$, так же как по частости в выборке мы оцениваем вероятность события.

Формально функция $F_n(x)$ обладает всеми свойствами функции распределения; значения ее, однако, дают не вероятности, а частости неравенства $X < x$ в данной выборке. Для x, меньших (и равных) минимального члена выборки,

$$\overline{F}_n(x) = 0,$$

а для x, больших максимального члена выборки,

$$\overline{F}_n(x) = 1.$$

Если мы расположим члены выборки в порядке возрастания их величины, то в промежутке между двумя соседними членами $\overline{F}_n(x)$ сохраняет постоянное значение, равное целому кратному $\frac{1}{n}$ (т. е. дроби вида $\frac{k}{n}$). При переходе через точки оси x, отвечающие членам выборки, $\overline{F}_n(x)$ претерпевает разрыв, скачком изменяясь от одного своего значения к другому.

Заметим, что распределение это зависит лишь от положения выборочных значений на оси x, а не от порядка их в выборке так, что две выборки с одинаковым составом членов, но с разным их порядком будут иметь одну и ту же функцию распределения $\overline{F}_n(x)$.

Для распределения выборки можно вычислить все характеристики положения центра группирования, характеристики рассеивания, асимметрию, эксцесс и т. п. Эти характеристики будут *эмпирическими* или *выборочными характеристиками*, полученными из наблюдений. Так как $\overline{F}_n(x)$ мы считаем оценкой по выборке функции $F(x)$ генеральной совокупности, то естественно считать выборочные характеристики оценками соответствующих характеристик $F(x)$. Так, например, *среднее значение* (*среднюю арифметическую*) *выборки*

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

мы будем считать оценкой математического ожидания MX величины X.

Аналогично этому *медиану выборочного* распределения можно считать оценкой теоретической медианы и т. д. Конечно, эти выборочные характеристики будут отличаться от соответствующих характеристик случайной величины X, которые представляют *теоретические или генеральные характеристики*. Определение точности и надежности оценок будет рассматриваться нами далее.

Введенные определения непосредственно распространяются также на выборки из многомерных генеральных совокупностей, т. е. таких, в которых случайная величина является многомерной, имеющей больше одного измерения. Такими многомерными величинами будут, например, обработанные на станке детали с несколькими регистрируемыми размерами (диаметр, длина, высота микронеровностей и т. п.).

Значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, наблюденные в фактически осуществленной выборке, образуют наблюденное «значение» n-мерной случайной величины $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, где каждая величина X_i представляет как бы один из экземпляров величины X, с которым мы встречаемся в i-м по порядку наблюдении.

Таким образом, мы рассматриваем выборку как испытание, в котором реализуется значение сложной величины $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Повторяя выборки, мы, естественно, будем получать различные значения этой величины, распределение которой следует определенным (хотя иногда нам и не известным) вероятностным законам.

Каждую характеристику, получаемую нами на основании данных выборки, также следует рассматривать как значение некоторой случайной величины, варьирующей от выборки к выборке. Так, например, вычисляя среднюю арифметическую из наблюденных данных, мы получаем характеристику

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Если наблюденные значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ рассматривать как реализованные значения величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, то величина $\bar{x}$ будет являться реализовавшимся в выборке значением величины

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}.$$

В теоретических рассуждениях мы будем чаще всего говорить о средней арифметической $\bar{x}$ именно как о случайной величине $\overline{X}$ (не прибегая к специальному обозначению для подчеркивания этого обстоятельства). Аналогичное замечание относится и ко всем другим выборочным характеристикам: в дальнейшем они будут по преимуществу рассматриваться как случайные величины, а не как конкретные значения этих величин, полученные в данной выборке.

Распределение каждой величины X_i определяется одной и той же функцией $F(x)$. А так как величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ считаются независимыми, то закон распределения многомерной случайной величины

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

полностью определяется этой же функцией. Для каждой системы чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ мы имеем:

$$\mathbf{P}(X_1 < x_1;\ X_2 < x_2;\ \ldots;\ X_n < x_n) = \mathbf{P}(X_1 < x_1)\,\mathbf{P}(X_2 < x_2) \ldots \mathbf{P}(X_n < x_n) = F(x_i) \cdot F(x_2) \ldots F(x_n).$$

Таким образом, любая выборочная характеристика как функция величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ представляет случайную величину с законом распределения, однозначно определяемым функцией распределения $F(x)$.

Изучение законов распределения выборочных характеристик составляет существенную задачу математической статистики потому, что только на основании этого изучения можно охарактеризовать точность и надежность оценки генеральной совокупности по данным выборки.

5.1.3. Задача получения статистических оценок распределения. Итак, *первая задача*, которая подлежит решению с помощью математической статистики, заключается в получении *статистических оценок законов распределения и их характеристик*. Заметим, что в статистической литературе один и тот же термин «оценка» употребляется как для процесса получения оценки некоторой величины, так и для результата этого процесса.

Простейшим примером оценки может служить частость некоторого события A, используемая в качестве приближенного значения вероятности $\mathbf{P}(A)$. В качестве другого, более сложного примера можно привести задачу из теории ошибок по отысканию «истинного значения» нескольких неизвестных физических констант, входящих в формулу, по результатам произведенных наблюдений. В обоих случаях, помимо самих оценок, требуется еще указать *точность полученных оценок при определенном уровне надежности*.

Точность и надежность произведенной оценки характеризуются вероятностью того, что действительное отклонение найденного нами приближения от оцениваемой «истинной» величины не превзойдет заданного предела. Так, например, если принять уровень надежности 0,9973 и предположить, что уклонение оценки от истинной величины следует нормальному закону $N(z;\ 0,\ \sigma)$, то точность оценки будет характеризоваться верхней границей уклонений, равной 3σ.

Таким образом, точность и надежность оценки неразрывно между собой связаны, и мы можем сравнивать точности двух различных оценок только при одинаковой их надежности.

Если нам дана выборка наблюденных значений и по ним требуется получить оценки для параметров генерального распределения и определить точности этих оценок, то существует бесчисленное множество возможных решений, так как

может быть предложено бесчисленное множество различных функций от выборочных значений, могущих быть использованными в качестве оценок.

Поэтому важно не только уметь находить оценки, но и сравнивать их свойства в целях получения оценок максимально возможной точности при данном уровне надежности. Этому вопросу в основном и посвящена настоящая глава.

Второй задачей, решаемой с помощью математической статистики, которая будет подробнее рассмотрена в главе VI, является *статистическая проверка гипотез.*

§ 2. Распределение выборки и его характеристики

5.2.1. Вариационный ряд (упорядоченная выборка). Размах варьирования (широта распределения). На практике при проведении всякого статистического исследования приходится иметь дело с *совокупностями объектов.* Обычно нас интересуют определенные признаки объектов, чаще всего могущие получать количественное выражение в некоторых единицах. Приведем пример.

Пример 5.2.1. 12 марта 1951 г. была взята «проба» из продукции горизонтально-ковочной машины в количестве 20 штук, т. е. были отобраны последовательно отштампованные на этой машине штамповки внутренних колец шарикоподшипников. Взятые кольца были охлаждены до температуры помещения, после чего была измерена их высота, которая оказалась следующей (табл. 5.2.1):

Таблица 5.2.1

№ колец в порядке обработки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Высота в *мм*	32,17	32,61	32,68	32,29	32,36	32,25	32,28	31,74	32,46	32,48
№ колец в порядке обработки	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Высота в *мм*	31,70	32,30	31,73	32,28	31,60	32,47	32,74	32,26	32,92	32,63

Кольца, отштампованные на одной машине в одном и том же штампе с одной наладки машины, представляют однородные индивидуумы, обладающие качественной общностью.

Интересующим нас качественным признаком является в данном случае высота кольца. При ближайшем рассмотрении данных наблюдения мы замечаем, что высота последовательно обработанных колец меняется от кольца к кольцу, т. е. является варьирующим признаком.

Расположим теперь нашу пробу в порядке возрастания значений варьирующего признака (табл. 5.2.2).

Таблица 5.2.2

№ колец в порядке возрастания высоты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Высота в *мм*	31,60	31,70	31,73	31,74	32,17	32,25	32,26	32,28	32,28	32,29
№ колец в порядке возрастания высоты	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Высота в *мм*	32,30	32,36	32,46	32,47	32,48	32,61	32,63	32,68	32,74	32,92

В таком расположении рассматриваемая проба представляет *вариационный ряд, т. е. ряд данных, расположенных в порядке возрастания значений варьирующего признака.* Вариационный ряд называют еще *«упорядоченной выборкой».*

Проба составляет лишь небольшую часть всех колец данного типо-размера, так как за смену их штампуется около 2500, а численность партии, подряд штампуемой на одной машине, достигает нескольких десятков тысяч.

Беря пробу, мы обычно интересуемся не теми несколькими деталями, которые в нее попадут, а хотим иметь суждение о всей продукции данного станка, представляющей для нас *генеральную совокупность.* Таким образом, взятая нами проба представляет частный случай *выборочной совокупности,* или *выборки.*

При рассмотрении всякой статистической совокупности нас обычно интересует *доля* тех или иных индивидуумов в ней.

Так, например, нас может интересовать доля в пробе штамповок с размерами, лежащими в некоторых границах.

Доля колец с размерами, лежащими в границах от 31 до 32 *мм,* в вышеупомянутой выборке, как нетрудно видеть из приведенного вариационного ряда, составляет

$$\mathbf{W}(31 < X < 32) = \frac{4}{20} = 0{,}2.$$

Таким образом, *доля* или *частость* объектов с определенным признаком представляет отношение числа таких объектов к объему совокупности, т. е. определяется соотношением (2.1.1).

В **5.1.2** мы указывали на удобство рассмотрения генеральной совокупности, как состоящей не из объектов, а из значений случайной величины X с функцией распределения $F(x)$, например из значений высоты кольца в продукции горизонтально-ковочной машины.

Тогда выборка будет также состоять из попавших в нее значений случайной величины X.

Функция распределения выборки определится соотношением (5.1.1).

В нашем примере с кольцами эта функция будет принимать такие значения:

$$\bar{F}_{20}(31) = 0; \quad \bar{F}_{20}(32) = \frac{4}{20} = 0{,}2;$$

$$\bar{F}_{20}(32{,}5) = \frac{15}{20} = 0{,}75 \text{ и т. д.}$$

Эмпирическая функция распределения может быть задана таблицей частостей вида (табл. 5.2.3):

Таблица 5.2.3

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	
$\mathbf{W}(x_i)$	$\mathbf{W}(x_1)$	$\mathbf{W}(x_2)$	$\mathbf{W}(x_3)$	$\cdots$	$\mathbf{W}(x_n)$	$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{W}(x_i) = 1$

Очевидно, что поскольку частость некоторого i-го значения величины X в выборке представляет долю этого значения в ней, то сумма частостей всех значений, т. е. всех долей целого, всегда равна единице.

Для вышеприведенного случая с кольцами такая таблица имеет вид (табл. 5.2.4):

Таблица 5.2.4

X	31,60	31,70	31,73	31,74	32,17	32,25	32,26	32,28	32,29	32,30	
$W(x_i)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	
X	32,36	32,46	32,47	32,48	32,61	32,63	32,68	32,74	32,92		Σ
$W(x_i)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{20}{20}=1$	

Разность между экстремальными или крайними (наибольшим и наименьшим) значениями в выборке называется *размахом варьирования* или *широтой распределения* выборки. Размах варьирования R, следовательно, определяется соотношением

$$R = x_{\text{нб}} - x_{\text{нм}}. \qquad (5.2.1)$$

В нашем примере размах варьирования равен

$$R = 32{,}92 - 31{,}60 = 1{,}32 \text{ мм}.$$

5.2.2. Группировка значений выборки. При большом объеме n выборки и при большом числе различных значений величины X, встречающихся в выборке, приходится иногда прибегать к разбивке распределения на интервалы (разряды) значений и затем рассматривать не отдельные значения, а эти интервалы (разряды).

Число таких интервалов при объеме выборки, превышающем 200—300 штук, рекомендуется брать в пределах от 10 до 20.

При предполагаемом нормальном распределении часто берут число интервалов (разрядов), равное 12.

Пример 5.2.2. Был произведен выбор 200 штук деталей (валиков) из текущей продукции прецизионного токарного автомата. Диаметры валиков были измерены с помощью миниметра с ценой деления в 1 микрон, причем округления производились до $\frac{1}{2}$ цены деления. В протоколе измерений отмечались отклонения от номинального размера.

Протокол измерений деталей имел следующий вид (табл. 5.2.5):

Таблица 5.2.5

Протокол измерения деталей

(отклонения в микронах)

№ детали	Отклонение	№ детали	Отклонение	№ детали	Отклонение	№ детали	Отклонение	№ детали	Отклонение	№ детали	Отклонение	№ детали	Отклонение	№ детали	Отклонение
1	+ 1,0	11	+ 2,0	21	+ 4,5	31	+14,0	41	+19,0	51	+19,5	61	+ 7,5	71	+ 2,5
2	+ 1,5	12	+ 3,0	22	+ 3,5	32	+11,0	42	+23,5	52	+22,0	62	+ 8,5	72	+ 7,0
3	— 2,5	13	+11,0	23	+ 9,5	33	+11,0	43	+22,0	53	+13,5	63	+ 6,5	73	+ 4,5
4	0,0	14	— 1,0	24	+12,0	34	+13,0	44	+18,5	54	+18,5	64	+ 8,5	74	— 0,5
5	— 1,5	15	+ 5,0	25	+ 7,5	35	+16,0	45	+19,5	55	+21,5	65	+ 5,5	75	+ 4,0
6	+ 1,0	16	+ 4,5	26	+ 7,5	36	+14,5	46	+17,5	56	+30,5	66	+26,0	76	+ 5,5
7	+ 1,0	17	+ 0,5	27	+10,0	37	+19,0	47	+18,0	57	+21,0	67	+12,5	77	+ 1,0
8	+15,0	18	+ 3,5	28	+ 8,5	38	+14,0	48	+19,5	58	+13,5	68	+ 6,5	78	+ 4,0
9	— 1,0	19	+ 8,0	29	+10,0	39	+18,0	49	+17,5	59	+11,5	69	+ 8,5	79	+ 6,5
10	+ 2,0	20	+ 5,0	30	+11,0	40	+19,0	50	+25,5	60	+10,0	70	+ 7,5	80	+ 5,0

Продолжение

№ детали	Отклонение	№ детали	Отклонение	№ детали	Отклонение	№ детали	Отклонение	№ детали	Отклонение	№ детали	Отклонение	№ детали	Отклонение	№ детали	Отклонение
81	+ 4,5	96	—12,5	111	— 8,5	126	—15,0	141	+21,0	156	+ 4,5	171	+ 1,0	186	— 9,5
82	+ 5,0	97	+ 8,5	112	— 3,5	127	— 3,0	142	+10,5	157	— 1,0	172	+25,0	187	— 8,0
83	+ 7,5	98	+12,0	113	—11,5	128	— 8,0	143	+ 5,0	158	+11,0	173	+ 0,5	188	— 4,5
84	+ 5,0	99	+ 6,0	114	—11,5	129	— 1,0	144	+ 0,5	159	+ 4,0	174	— 3,0	189	+ 7,5
85	+15,5	100	+ 8,5	115	— 7,5	130	— 6,5	145	+ 4,0	160	+ 9,0	175	— 4,5	190	— 4,0
86	+ 6,0	101	0,0	116	—11,5	131	— 8,0	146	0,0	161	+ 4,5	176	+ 6,0	191	— 9,0
87	+ 6,5	102	+ 7,0	117	— 6,5	132	—13,5	147	+ 0,5	162	+11,5	177	+ 9,5	192	— 9,0
88	— 3,0	103	— 1,0	118	+ 2,0	133	—12,0	148	+ 3,5	163	+14,0	178	+12,5	193	+ 2,0
89	+ 5,0	104	— 3,0	119	—11,0	134	—17,0	149	+ 9,0	164	+10,0	179	+19,0	194	— 0,5
90	+ 3,5	105	+ 0,5	120	—17,5	135	—10,5	150	+ 2,5	165	+20,0	180	+13,0	195	+ 3,5
91	— 3,0	106	0,0	121	—15,0	136	+14,5	151	+ 2,0	166	+13,0	181	+ 1,5	196	+10,5
92	—14,0	107	— 2,0	122	—15,5	137	+10,0	152	+ 7,0	167	+ 7,0	182	+ 0,5	197	— 5,5
93	+17,0	108	— 4,5	123	+ 1,5	138	+ 9,5	153	+ 7,5	168	+12,0	183	+12,0	198	— 6,0
94	— 9,0	109	+ 2,0	124	—18,0	139	+ 7,0	154	+ 3,5	169	+ 7,5	184	+ 4,0	199	— 6,5
95	—13,0	110	—10,0	125	—20,0	140	+ 0,5	155	+ 7,0	170	+ 2,0	185	+ 6,5	200	— 8,0

Если подробно просмотреть протокол измерений, то можно обнаружить, что в нем встречается 78 различных значений отклонения от номинального размера, наименьшее из которых составляет — 20, а наибольшее + 30,5 *мк*. Соответствующая этому протоколу таблица частостей была бы слишком громоздкой. Поэтому широта распределения R (размах варьирования) выборки была разбита на $l = 10$ одинаковых интервалов (разрядов). Ширина каждого интервала (разряда), следовательно, была равна

$$\Delta x = \frac{R}{l} = \frac{30{,}5 - (-20)}{10} = \frac{50{,}5}{10} = 5{,}05 \approx 5.$$

Распределение отклонений по интервалам было произведено следующим образом.

Были последовательно выписаны интервалы в порядке возрастания отклонений. Для каждого интервала были указаны границы таким образом, чтобы они не перекрывались. Например, первый интервал включал отклонения от — 20 до —15, второй интервал от — 15 до — 10 и т. д.

Затем каждое наблюденное отклонение, начиная с 1-го до 200-го, было занесено в таблицу подсчета частот (т. е. чисел наблюдений) по интервалам в виде одной вертикальной черточки в строке, предназначенной для соответствующего интервала (табл. 5.2.6).

В такую таблицу вместо графы (2) «Границы интервалов» иногда включают графу «начало (представитель) интервала (разряда)». В этом случае в графе (2) стояли бы обозначения —20—, —15—, —10—, —5—, 0—, 5— и т. д.

Смысл этих обозначений тот же, что и обозначений «от —20 до —15», «от —15 до —10», «от —10 до —5» и т. д.

Записи в таблице подсчета частот делались следующим образом.

Первая по порядку деталь в протоколе измерений имеет отклонение + 1,0, поэтому первая вертикальная черточка ставится в строке пятого интервала, который включает отклонения от 0 до 5. Вторая деталь имеет отклонение +1,5, поэтому вторая черточка ставится также в строке пятого интервала, третья —2,5, так что третья черточка ставится в четвертом интервале, четвертая деталь 0,0, так что четвертая черточка — в четвертом интервале (но не в пятом) и т. д. Сумма

Таблица 5.2.6

№ интервалов	Границы интервалов (разрядов)	Подсчет частот	Частота k_j в интервале	Середина интервала x_j
1	2	3	4	5
1	от —20 до —15	||||||| = 7	7	—17,5
2	от —15 до —10	||||||||||| = 11	11	—12,5
3	от —10 до — 5	||||||||||||||| = 15	15	— 7,5
4	от — 5 до — 0	|||||||||||||||||||||||| = 24	24	— 2,5
5	от 0 до + 5	|||||||||||||||||||\

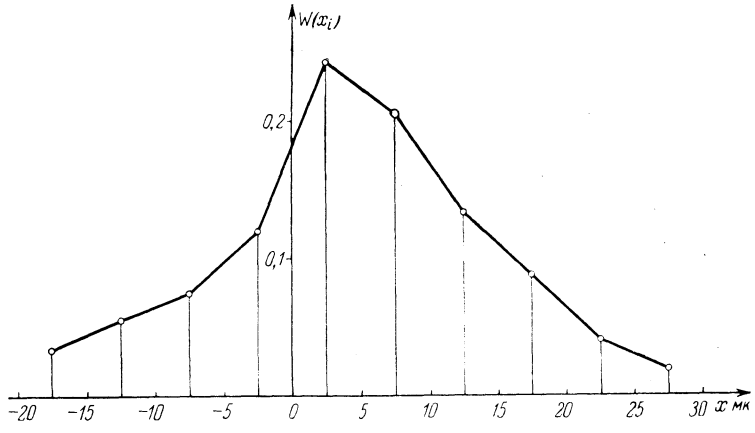
Очевидно, что разбивка на интервалы, облегчая исследование распределения, вместе с тем делает более грубыми все последующие выкладки, причем выкладки тем грубее, чем меньшее число интервалов выбрано по сравнению с числом различных значений в протоколе измерений (см. **5.2.11**).

5.2.3. Графики статистических распределений: полигон, гистограмма, ступенчатая кривая. Для наглядности выборочное распределение изображают графически несколькими различными способами.

Наиболее распространенными графиками выборочных распределений являются следующие три: 1) полигон, 2) гистограмма, 3) ступенчатая кривая.

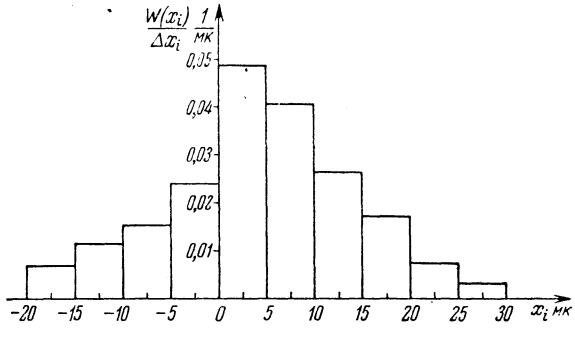
Полигон строится следующим образом: на оси абсцисс откладываются интервалы значений величины X, в серединах интервалов строятся ординаты, пропорциональные частостям или частотам, и концы ординат соединяются отрезками прямой.

На черт. 61 показан полигон распределения, описанного в примере 5.2.2.



Черт. 61. Полигон распределения валиков по наружным диаметрам в выборке объема 200 штук.

Гистограмма получается так: над каждым отрезком оси абсцисс, изображающим интервал значений X, строится прямоугольник, площадь которого пропорциональна частости или частоте в данном интервале. Если ширина всех интервалов постоянна (что обычно и бывает), то высоты прямоугольников пропорциональны также частостям или частотам.



Черт. 62. Гистограмма распределения валиков по диаметрам в выборке объема 200 штук.

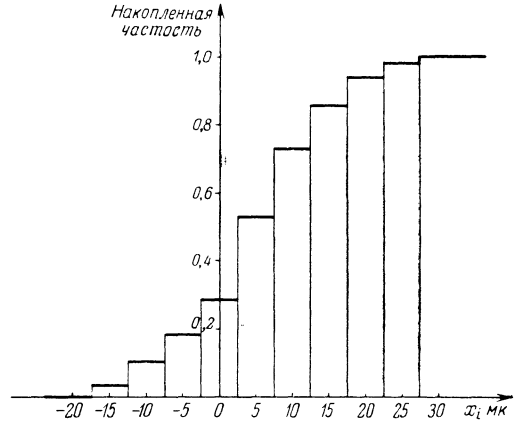
На чертеже 62 показана гистограмма распределения, описанного в примере 5.2.2.

Ступенчатая кривая строится следующим образом: над каждым отрезком оси абсцисс, изображающим расстояние между серединами интервалов значений X, проводится отрезок горизонтальной прямой на высоте, пропорциональной *накопленной частости* или *накопленной частоте* в данном интервале. Концы отрезков соединяются вертикальными прямыми.

Накопленной частостью в данном интервале называется сумма всех частостей, начиная с первого интервала до данного интервала включительно. Так,

в примере 5.2.2 в первом интервале накопленная частость равна 0,035; во втором — 0,090; в третьем — 0,165 и т. д. Аналогичный смысл имеет *накопленная частота*.

На черт. 63 показана ступенчатая кривая распределения, описанного в примере 5.2.2. Ступенчатая кривая, построенная для выборочного распределения, не разбитого на интервалы, представляет вместе с тем график эмпирической функции распределения. Вид подобного графика выборочного распределения существенно зависит от выбранного способа группировки наблюдений.



Черт. 63. Ступенчатая кривая распределения валиков по диаметрам в выборке объема 200 штук.

5.2.4. Характеристики центра группирования и рассеивания выборки. Остановимся теперь на характеристиках выборки.

Как уже указывалось в **5.1.2**, каждой *теоретической* (*вероятностной*) числовой характеристике может быть поставлена в соответствие аналогичная, иногда имеющая такое же название и всегда имеющая точно такую же структуру *эмпирическая* (*статистическая*) характеристика.

При проведении статистических исследований истинными или теоретическими характеристиками являются характеристики генеральной совокупности, интерпретируемые как характеристики случайной величины X, а эмпирическими характеристиками служат характеристики выборки, вычисленные по наблюденным значениям этой величины.

Таким образом, эмпирические числовые характеристики случайных величин подобно теоретическим характеристикам можно подразделить на:

1) характеристики положения центра группирования и

2) характеристики рассеивания.

В **3.3.1** указывалось, что в технике наиболее часто употребляются следующие числовые характеристики положения центра группирования:

1) *среднее значение*, называемое, когда речь идет о выборке, т. е. эмпирическом распределении, *средней арифметической* и обозначаемое в этом случае $\bar{x}$,

2) *медиана*, которую в случае эмпирического распределения мы будем обозначать через m_e,

3) *мода*, которую мы в этом случае будем обозначать через m_0.

Средняя арифметическая $\bar{x}$ выборки определяется уже приводившимся в главе III соотношением

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \qquad (5.2.2)$$

где x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — все наблюденные значения случайной величины X, вошедшие в выборку объема n.

Это основное соотношение редко применяется на практике. Вместо него при больших n применяются другие более удобные для вычислений формулы, о которых будет сказано в дальнейшем.

Медиана m_e выборки на практике чаще всего используется тогда, когда объем n выборки невелик и представляет нечетное число. В этом случае, составив

вариационный ряд, за медиану принимают то значение величины X, которое оказалось посредине распределения.

Если n четное, то за медиану принимают среднюю арифметическую из двух значений, лежащих в середине распределения.

Пример 5.2.3. Пусть требуется найти медиану выборки по условиям примера 5.2.1. Обратившись к вариационному ряду, находим, что десятый и одиннадцатый члены, лежащие в середине, равны 32,29 и 32,30. Таким образом,

$$m_e = \frac{32{,}29 + 32{,}30}{2} = 32{,}295 \text{ мм}.$$

Мода m_0 выборки представляет значение, имеющее наибольшую частоту или частость.

Пример 5.2.4. Пусть требуется найти моду выборки по условиям примера 5.2.2. По таблице частостей обнаруживаем, что наибольшую частоту и частость имеет значение, равное $+2{,}5$. Следовательно, $m_0 = 2{,}5$ *мк*.

Наиболее употребительными эмпирическими характеристиками рассеивания являются:

1) *дисперсия*, обозначаемая через s^2,

2) *среднее квадратическое отклонение, или стандарт*, обозначаемое через s,

3) *коэффициент вариации* $v = \frac{s}{\bar{x}}$. (5.2.3)

Кроме того, на практике в качестве характеристики рассеивания используют еще *размах варьирования* R и положения крайних (экстремальных) членов выборки.

Крайние члены $x_{\text{нм}}$ и $x_{\text{нб}}$ берутся непосредственно из вариационного ряда и никаких вычислений не требуют. Так, в примере 5.2.1 крайними членами являются значения 31,60 и 32,92 *мм*, а в примере 5.2.2 — значения -20 и $+30{,}5$ *мк*.

Размах варьирования, как мы уже видели в примере 5.2.2, очень просто вычисляется по соотношению (5.2.1).

Некоторые затруднения представляет вычисление дисперсии s^2, представляющей центральный момент второго порядка:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}. \qquad (5.2.4)$$

5.2.5. Статистические (эмпирические) моменты и их упрощенные вычисления. Так как на практике часто приходится вычислять первые четыре момента эмпирического распределения, по которым в свою очередь легко определяются средняя арифметическая, дисперсия, асимметрия и эксцесс эмпирического распределения (выборки), то мы теперь непосредственно и перейдем к рациональным методам вычисления моментов.

Статистические (*эмпирические*) *моменты* выборки по своей структуре полностью отвечают теоретическим моментам распределения, описанным в **3.6.1**.

Обычный момент r-го порядка b_r выборки определяется соотношением

$$b_r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - c)^r}{n}, \qquad (5.2.5)$$

где x_i — то же, что в соотношении (5.2.2), а c — начальное значение или «ложный нуль» — произвольное число, выбираемое наиболее близким к предполагаемому среднему арифметическому $\bar{x}$ в целях упрощения вычислений.

Начальным моментом r-го порядка a_r будем называть обычный момент того же порядка при начальном значении («ложном нуле») $c = 0$. Таким образом:

$$a_r = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^r}{n}, \tag{5.2.6}$$

где обозначения те же, что в соотношении (5.2.5).

Центральный момент r-го порядка m_r определяется соотношением

$$m_r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^r}{n}, \tag{5.2.7}$$

где x_i — то же, что в соотношении (5.2.5), $\bar{x}$ — средняя арифметическая.

Моменты выборки связаны с характеристиками выборки и между собой соотношениями, вполне аналогичными тем, которыми связаны теоретические моменты (см. **3.6.1**). В частности, по аналогии с соотношениями (3.6.4) и (3.6.5) имеют место тождества

$$\bar{x} = a_1, \tag{5.2.8}$$

$$s^2 = m_2. \tag{5.2.9}$$

К эмпирическим моментам в силу их одинаковой с теоретическими моментами структуры соответственно применимы также соотношения, полученные из теорем о математических ожиданиях и дисперсиях. Последнее обстоятельство широко используется для упрощения вычислений моментов. Эти упрощения идут в двух направлениях:

во-первых, переносят начало отсчета, выбирая начальное значение c таким образом, чтобы свести к минимуму числа, которыми приходится оперировать;

во-вторых, при разбивке большого выборочного распределения на интервалы значения середин интервалов x_j выражают в долях ширины интервала (шага разбиения) Δx, тем самым сводя эти значения к значениям y_j, представляющим целые числа ... —2, —1, 0, +1, +2, ...

5.2.6. Вычисление статистических моментов с помощью произвольного начального значения («ложного нуля»). Из соотношений (5.2.2) и (5.2.5) имеем:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + c - c = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - c)}{n} + c = b_1 + c;$$

окончательно

$$\bar{x} = b_1 + c, \tag{5.2.10}$$

откуда

$$b_1 = \bar{x} - c. \tag{5.2.11}$$

Из соотношений (5.2.4) и (5.2.6) получаем:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2\bar{x}\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + \bar{x}^2 =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = a_2 - a_1^2;$$

окончательно

$$s^2 = a_2 - a_1^2. \tag{5.2.12}$$

С другой стороны, используя (5.2.11), имеем:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-c+c-\bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}[(x_i-c)-(\bar{x}-c)]^2}{n} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}[(x_i-c)^2-2(x_i-c)(\bar{x}-c)+(\bar{x}-c)^2]}{n} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-c)^2}{n} - 2(\bar{x}-c)\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-c)}{n} + (\bar{x}-c)^2 =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-c)^2}{n} - 2(\bar{x}-c)^2 + (\bar{x}-c)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-c)^2}{n} - (\bar{x}-c)^2 = b_2 - b_1^2;$$

окончательно

$$s^2 = b_2 - b_1^2. \tag{5.2.13}$$

Таким образом, дисперсия не зависит от выбранного начала отсчета.

Эти результаты можно было бы получить также, применяя теоремы (3.3.12), (3.3.15), (3.4.15) и (3.4.16) о математических ожиданиях и дисперсиях.

Заметим еще, что

$$m_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n} - \bar{x} = \bar{x} - \bar{x} = 0;$$

окончательно

$$m_1 = 0. \tag{5.2.14}$$

Покажем на простом примере пользу данного упрощения.

Пример 5.2.5. Пусть требуется вычислить среднюю арифметическую выборки, описанной в примере 5.2.1.

При вычислении по формуле (5.2.2) будем иметь:

$$\bar{x} = \frac{1}{20}(31{,}60+31{,}70+31{,}73+31{,}74+32{,}17+32{,}25+32{,}26+32{,}28+$$
$$+32{,}28+32{,}29+32{,}30+32{,}36+32{,}46+32{,}47+32{,}48+32{,}61+32{,}63+$$
$$+32{,}68+32{,}74+32{,}92) = \frac{1}{20}\cdot 645{,}95 = 32{,}298 \text{ мм}.$$

Воспользуемся теперь формулой (5.2.10).

Выберем c, стремясь его приблизить к ожидаемой средней арифметической. Такому условию отвечает медиана m_e, которая в данном случае равна

$$m_e = \frac{32{,}29+32{,}30}{2} = 32{,}295 \text{ мм}.$$

Округлив, примем:

$$c = 32{,}30 \text{ мм}.$$

Тогда по формуле (5.2.10), учитывая (5.2.5), получим:

$$\bar{x} = \frac{1}{20}(-0{,}70-0{,}60-0{,}57-0{,}56-0{,}13-0{,}05-0{,}04-0{,}02-0{,}02-0{,}01+0+$$
$$+0{,}06+0{,}16+0{,}17+0{,}18+0{,}31+0{,}33+0{,}38+0{,}44+0{,}62)+32{,}300 =$$
$$= \frac{1}{20}(2{,}65-2{,}70)+32{,}300 = 32{,}300-\frac{0{,}05}{20} = 32{,}300-0{,}0025 = 32{,}298 \text{ мм}.$$

Таким образом, при вычислениях по формуле (5.2.10) нам пришлось оперировать малыми числами (—0,70; —0,60 и т. д.), а не большими (31,60; 31,70 и т. д.), как это было при пользовании формулой (5.2.2).

Формулы (5.2.10) и (5.2.13) приводят к наиболее простым выкладкам при вычислениях средней арифметической и дисперсии малой выборки ($n \leqslant 20$).

Легко убедиться в том, что в качестве c целесообразно принимать число, возможно близкое к $\bar{x}$.

Из соотношения (5.2.11) имеем:

$$b_1 = \bar{x} - c,$$

т. е. чем ближе c и $\bar{x}$, тем меньше по абсолютной величине момент b_1 и, следовательно, меньше числа, из которых он составлен, а потому вычисления проще.

Перейдем теперь ко второму упрощению.

5.2.7. Вычисление статистических моментов с помощью выражения значений по интервалам в долях ширины интервала. В этом случае мы заменяем значения, соответствующие серединам x_j интервалов, на которые разбито распределение, *относительными отклонениями* от начального значения

$$y_j = \frac{x_j - c}{\Delta x}, \tag{5.2.15}$$

где $x_j (j = 1, 2, \ldots, l)$ — значения, соответствующие серединам l интервалов, на которые разбито распределение; Δx — ширина интервала (шаг разбиения); c — то же, что в соотношении (5.2.5).

Тогда от обычных моментов b_r мы переходим к относительным моментам $\bar{b}_r$. *Относительными моментами* мы будем называть моменты, определяемые соотношением

$$\bar{b}_r = \frac{\sum_{j=1}^{l} k_j y_j^r}{n}, \tag{5.2.16}$$

где k_j — частота значения x_j, полученная из «таблицы подсчета частот по интервалам» (см. пример 5.2.2); y_j определяется соотношением (5.2.15). Из (5.2.5) (5.2.15) следует, что

$$b_r = (\Delta x)^r \bar{b}_r. \tag{5.2.17}$$

В свою очередь из соотношений (5.2.10), (5.2.13), (3.6.8), (3.6.9) и (5.2.17) вытекает следующее:

$$\bar{x} = \Delta x \bar{b}_1 + c, \tag{5.2.18}$$

$$s^2 = (\Delta x)^2 (\bar{b}_2 - \bar{b}_1^2), \tag{5.2.19}$$

$$m_3 = (\Delta x)^3 (\bar{b}_3 - 3\bar{b}_2\bar{b}_1 + 2\bar{b}_1^3), \tag{5.2.20}$$

$$m_4 = (\Delta x)^4 (\bar{b}_4 - 4\bar{b}_3\bar{b}_1 + 6\bar{b}_2\bar{b}_1^2 - 3\bar{b}_1^4), \tag{5.2.21}$$

где обозначнния — те же, что в соотношениях (5.2.15), (5.2.17) и (5.2.7).

В целях уменьшения ошибок от округления при вычисленим центральных моментов второго и более высоких порядков рекомендуется пользоваться

следующими формулами:

$$m_2 = s^2 = (\Delta x)^2 \frac{h_2 - \frac{h_1^2}{n}}{n} = \frac{nh_2 - h_1^2}{n^2}(\Delta x)^2, \tag{5.2.22}$$

$$m_3 = (\Delta x)^3 \frac{h_3 - \frac{3h_1h_2}{n} + \frac{2h_1^3}{n^2}}{n}, \tag{5.2.23}$$

$$m_4 = (\Delta x)^4 \frac{h_4 - \frac{4h_1h_3}{n} + \frac{6h_1^2h_2}{n^2} - \frac{3h_1^4}{n^3}}{n}, \tag{5.2.24}$$

где

$$h_r = \sum_{j=1}^{l} k_j y_j^r, \tag{5.2.25}$$

остальные обозначения — те же, что в формуле (5.2.21).

Зная центральные моменты третьего и четвертого порядков, легко вычислить *асимметрию* и *эксцесс* выборки по соотношениям, аналогичным формулам, приведенным в **4.3.6**, а именно:

$$\overline{S}_k = \frac{m_3}{s^3}, \tag{5.2.26}$$

$$\overline{E}_k = \frac{m_4}{s^4} - 3. \tag{5.2.27}$$

Остановимся на упрощенных способах вычисления статистических моментов выборки.

Моменты больших выборок ($n > 100$) вычисляются двумя способами: способом произведений и способом сумм.

5.2.8. Вычисление статистических моментов по способу произведений. Вычисления по способу произведений упрощаются при применении расчетной таблицы, приводимой в примере 5.2.6.

Пример 5.2.6. Пусть для выборки, описанной в примере 5.2.2, требуется вычислить моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков и по ним подсчитать среднюю арифметическую, дисперсию, асимметрию и эксцесс.

Пусть $c = +2{,}5$.

Пользуясь «таблицей подсчета частот по интервалам» (пример 5.2.2), составим таблицу подсчета моментов по способу произведений (табл. 5.2.8).

В графу (1) «таблицы подсчета моментов по способу произведений» заносим абсолютные значения отклонений, подсчитанных по формуле (5.2.15), причем за c принимаем $+2{,}5$ *мк*. Заметим, что ширина интервала $\Delta x = 5$. Таким образом, абсолютные значения отклонений $|y_j| = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

В графы (2) и (3) заносим из «таблицы подсчета частот по интервалам» (пример 5.2.2) частоты соответствующих положительных и отрицательных отклонений.

Так, например, отклонение, равное нулю, получится в пятом интервале, так как $x_5 = +2{,}5$ *мк* и потому $y_5 = \frac{+2{,}5 - 2{,}5}{5} = 0$. Частота этого отклонения равна 49. Отклонение, равное $+1$, получится в шестом интервале, так как $x_6 = +7{,}5$ и $y_6 = \frac{7{,}5 - 2{,}5}{5} = +1$. Частота этого отклонения равна 41. Отклонение, равное -1, получится в четвертом интервале, так как $x_4 = -2{,}5$ и $y_4 = \frac{-2{,}5 - 2{,}5}{5} = -1$. Частота этого отклонения равна 24. Таким образом, в первой строке в графе (2) ставим число 49, а во второй строке в графе (2) ставим 41 и в графе (3) ставим 24.

Таблица 5.2.8

Таблица подсчета моментов по способу произведений

№ интервалов	Значения границ интервалов	x_j	Абсолютное значение разности $\lvert x_j - c \rvert$	Абсолютное отклонение $\lvert y_j \rvert$ от начального значения c в долях Δx	Частоты k_j, соответствующие: положительному отклонению y_j	Частоты k_j, соответствующие: отрицательному отклонению y_j	(2) + (3)	(2) − (3)	$k_j y_j = (5) \times (1)$	$k_j y_j^2 = (4) \times (1)^2$	$k_j y_j^3 = (6) \times (1)^2$	$k_j y_j^4 = (7) \times (1)^2$	Проверка: Отклонения y_j, увеличенные на 1: положительные	Проверка: Отклонения y_j, увеличенные на 1: отрицательные	(2) × (10)⁴	(3) × (11)⁴	(12) + (13)
(а)	(б)	(в)	(г)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)
5	от 0 до 5	+ 2,5	0	0	49	—	49	49	0	0	0	0	+1	—	49	—	49
4 6	от — 5 до 0 от 5 до 10	— 2,5 + 7,5	5	1	41	24	65	17	17	65	17	65	+2	0	656	0	656
3 7	от —10 до —5 от 10 до 15	— 7,5 +12,5	10	2	26	15	41	11	22	164	88	656	+3	—1	2106	15	2121
2 8	от —15 до —10 от 15 до 20	—12,5 +17,5	15	3	17	11	28	6	18	252	162	2268	+4	—2	4352	176	4528
1 9	от —20 до —15 от 20 до 25	—17,5 +22,5	20	4	7	7	14	0	0	224	0	3584	+5	—3	4375	567	4942
10	от 25 до 30	+27,5	25	5	3	—	3	3	15	75	375	1875	+6	—	3888	—	3888
				Итого	—	—	200 n	—	72 h_1	780 h_2	642 h_3	8448 h_4	—	—	15426	758	16184

В графу (4) заносим сумму чисел, стоящих в графах (2) и (3), а в графу (5)— разность этих чисел. Заметим, что в графе (5) могут оказаться как положительные, так и отрицательные числа.

В графу (6) заносим произведение частоты k_j на отклонение y_j, т. е. $k_j y_j$, получающееся путем перемножения чисел, стоящих в графах (5) и (1).

В графу (7) заносим произведение вида $k_j y_j^2$, получающееся умножением числа, стоящего в графе (4), на квадрат отклонения, стоящего в графе (1).

В графу (8) заносим произведение вида $k_j y_j^3$, получающееся умножением числа, стоящего в графе (6), на квадрат отклонения, записанного в графу (1).

В графу (9) заносим произведение вида $k_j y_j^4$, получающееся путем умножения числа, стоящего в графе (7), на квадрат отклонения, стоящего в графе (1).

Просуммировав числа по графам (6), (7), (8) и (9), мы получаем соответственно суммы

$$\sum_{j=1}^{l} k_j y_j = h_1, \quad \sum_{j=1}^{l} k_j y_j^2 = h_2, \quad \sum_{j=1}^{l} k_j y_j^3 = h_3 \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{l} k_j y_j^4 = h_4.$$

Если каждую из полученных сумм поделить на объем n выборки, то получатся относительные моменты $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \overline{b}_3$ и $\overline{b}_4$, определяемые соотношением (5. 2.16

В нашем примере имеем:

$$\overline{b}_1 = \frac{72}{200} = +0{,}36, \quad \overline{b}_2 = \frac{780}{200} = 3{,}9, \quad \overline{b}_3 = \frac{642}{200} = +3{,}21, \quad \overline{b}_4 = \frac{8448}{200} = 42{,}24.$$

По этим же суммам могут быть найдены характеристики выборки. Так, среднюю арифметическую находим по формуле (5.2.18):

$$\bar{x} = 5 \cdot \frac{72}{200} + 2{,}5 = 4{,}3 \ мк.$$

Дисперсию выборки находим по формуле (5.2.22):

$$s^2 = 5^2 \cdot \frac{780 - \frac{72^2}{200}}{200} = 94{,}26 \ мк^2.$$

Третий и четвертый центральные моменты находим по формулам (5.2.23) и (5.2.24):

$$m_3 = \frac{642 - \frac{3 \cdot 72 \cdot 780}{200} + \frac{2 \cdot 72^3}{200^2}}{200} \cdot 5^3 = \frac{642 - 842{,}4 + 18{,}66}{200} \cdot 125 = -113{,}59 \ мк^3,$$

$$m_4 = \frac{8448 - \frac{4 \cdot 72 \cdot 642}{200} + \frac{6 \cdot 72^2 \cdot 780}{200^2} - \frac{3 \cdot 72^4}{200^3}}{200} \cdot 5^4 =$$

$$= \frac{8488 - 924{,}48 + 606{,}53 - 10{,}08}{200} \cdot 625 = \frac{8059{,}97}{200} \cdot 625 = 25\,187 \ мк^4.$$

Асимметрию и эксцесс подсчитываем по соотношениям (5.2.26) и (5.2.27):

$$\bar{S}_k = \frac{-113{,}59}{(\sqrt{94{,}26})^3} = -0{,}12,$$

$$E_k = \frac{25\,187}{94{,}26^2} = -0{,}15.$$

Графы (10)—(14) «таблицы подсчета моментов по способу произведений» предназначены для проверки произведенных вычислений.

В графу (10) мы заносим положительные отклонения из графы (1), увеличенные на единицу.

Таким образом, прибавив к нулю единицу, мы получаем в первой строке $+1$, а во второй строке пишем $+2$, так как $1+1=+2$, в третьей строке $+3$, так как $2+1=+3$ и т. д.

В графу (11) мы заносим отрицательные отклонения из графы (1), увеличенные на единицу. Таким образом, во второй строке мы получаем $-1+1=0$, в третьей строке $-2+1=-1$ и т. д.

В графу (12) записываем произведение частоты, стоящей в графе (2), на четвертую степень положительного отклонения, стоящего в графе (10). Так, например, во второй строке мы получим $41 \cdot 2^4 = 656$.

В графу (13) мы заносим произведение частоты, проставленной в графе (3), на четвертую степень отклонения, проставленного в графе (11). Так, мы в четвертой строке получим $11 \cdot (-2)^4 = 176$. Графа (14) содержит сумму цифр, проставленных в графах (12) и (13).

Проверку наших вычислений мы производим с помощью тождества

$$\bar{b}_4' = \bar{b}_4 + 4\bar{b}_3 + 6\bar{b}_2 + 4\bar{b}_1 + \bar{b}_0, \qquad (5.2.28)$$

где

$$\bar{b}_4' = \frac{\sum_{j=1}^{l} k_j (y_j + 1)^4}{n}, \qquad (5.2.29)$$

$\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$, $\bar{b}_3$ и $\bar{b}_4$ — относительные моменты, определяемые соотношением (5.2.16) (заметим, что относительный момент нулевого порядка $\bar{b}_0 = 1$).

В нашем примере

$$\overline{b}_4' = \frac{16\,184}{200} = 80{,}92; \quad \begin{aligned} \overline{b}_4 &= 42{,}24 \\ 4\overline{b}_3 &= 12{,}84 \\ 6\overline{b}_2 &= 23{,}40 \\ 4\overline{b}_1 &= 1{,}44 \\ \overline{b}_0 &= 1{,}00 \\ \hline & 80{,}92 \end{aligned}$$

Тождество (5.2.28) выполнено. Следовательно, вычисления сделаны правильно.

Тождество (5.2.28) легко получается из (5.2.29) по формуле Ньютона

$$\overline{b}_4' = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{l} k_j\,(y_j+1)^4 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{l} k_j\left(y_j^4 + 4y_j^3 + \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}y_j^2 + \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}y_j + 1\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{l} k_j y_j^4 + \frac{4}{n}\sum_{j=1}^{l} k_j y_j^3 + \frac{6}{n}\sum_{j=1}^{l} k_j y_j^2 + \frac{4}{n}\sum_{j=1}^{l} k_j y_j +$$

$$+ \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{l} k_j y_j^0 = \overline{b}_4 + 4\overline{b}_3 + 6\overline{b}_2 + 4\overline{b}_1 + \overline{b}_0.$$

5.2.9. Вычисление статистических моментов по способу сумм. Перейдем к вычислению моментов больших выборок *по способу сумм*. Этот способ отличается исключительной простотой. Рассмотрим применение способа сумм на примере.

Пример 5.2.7. Пусть для выборки, описанной в примере 5.2.2, требуется вычислить относительные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков и по ним подсчитать среднюю арифметическую, дисперсию, асимметрию и эксцесс выборки.

Пусть, как и раньше, $c = +2{,}5$.

Составим следующую расчетную таблицу (табл. 5.2.9).

Таблица 5.2.9

Таблица подсчета моментов по способу сумм

№ п/п	x_j	k_j (0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1	— 17,5	7	7	7	7	7	
2	— 12,5	11	18	25	32		
3	— 7,5	15	33	58			
4	— 2,5	24	57				
5	+ 2,5	49					
6	+ 7,5	41	94				
7	+ 12,5	26	53	93			
8	+ 17,5	17	27	40	56		
9	+ 22,5	7	10	13	16	19	
10	+ 27,5	3	3	3	3	3	3
11		$n = 200$	115	90	39	7	—
12			187	149	75	22	3
13		$e =$	302	239	114	29	3
14		$d =$	+ 72	+ 59	+ 36	+ 15	+ 3

В графу x_j «таблицы подсчета моментов по способу сумм» вносятся из «таблицы подсчета частот по интервалам» (пример 5.2.2) значения, соответствующие серединам интервалов. Такими значениями являются — 17,5, — 12,5, — 7,5 и т. д.

В графу (0) вносятся частоты тех же значений из той же таблицы. Строка, отвечающая начальному значению $c = +2{,}5$, прочеркивается по графам (1)—(5). В графе (1) проставляются накопленные частоты сверху до черты и снизу до той же черты. Так, например, в первой строке этой графы проставлена частота 7 значения $-17{,}5$, а во второй строке — сумма $7 + 11 = 18$, где 11 есть частота значения $-12{,}5$. В третьей строке стоит сумма $18 + 15 = 33$, где 15 есть частота значения $-7{,}5$ и т. д. до черты, проведенной в пятой строке, отвечающей значению $c = +2{,}5$.

Аналогично этому, идя снизу, в десятой строке графы (1) мы проставляем частоту 3 значения $+27{,}5$. В девятой строке этой графы мы ставим сумму $3 + 7 = 10$, где 7 есть частота значения $+22{,}5$. В восьмой строке мы ставим сумму $10 + 17 = 27$, где 17 есть частота значения $+17{,}5$ и т. д. до черты, проведенной в пятой строке.

В графах (2), (3), (4) и (5) мы записываем накопленные числа предыдущей графы сверху по направлению к черте (пятая строка в нашем примере) и снизу к черте.

В графе (2), идя сверху и снизу, мы не доходим на одну строку до черты, в графе (3) — на две строки, в графе (4) — на три строки и т. д.

В первой строке графы (2) ставим число, стоящее в первой же строке графы (1), т. е. ставим число 7. Во второй строке графы (2) мы ставим сумму $7 + 18 = 25$, где 18 есть число, стоящее во второй строке графы (1). В третьей строке графы (2) мы ставим сумму $25 + 33 = 58$, где 33 есть число, стоящее в третьей строке графы (1). На этом мы в графе (2) записи прекращаем, так как мы уже дошли до третьей строки, которая на *одну* строку не доходит до черты.

Аналогично этому, идя снизу вверх в строке десятой графы (2), мы ставим число 3, стоящее в той же строке графы (1). В девятой строке графы (2) мы ставим сумму $3 + 10 = 13$, где 10 есть число, стоящее в девятой строке графы (1), и т. д.

Совершенно таким же способом в графе (3) мы проставляем накопленные числа из графы (2), сверху и снизу, не доходя на две строки до черты; в графе (4) ставим накопленные числа из графы (3), не доходя сверху и снизу на три строки до черты, и т. д. Пятая графа вычисляется для целей проверки. Последовательность заполнения граф указана в табл. 5.2.9. После строки, отведенной для последнего интервала значений (в нашем случае после десятой строки), идут четыре строки итогов (в нашем случае 11-я, 12-я, 13-я и 14-я строки).

В первой строке итогов (одиннадцатая строка), начиная с графы (1), ставим сумму чисел, стоящих в данной графе сверху черты. Так, в первой строке итогов в графе (1) мы ставим сумму $7 + 18 + 33 + 57 = 115$; в той же строке в графе (2) мы ставим сумму $7 + 25 + 58 = 90$ и т. д.

Во второй строке итогов (двенадцатая строка) мы ставим, начиная с графы (1), сумму чисел, расположенных в данной графе снизу от черты.

Так, во второй строке итогов в графе (1) мы ставим сумму $94 + 53 + 27 + 10 + 3 = 187$, в той же строке в графе (2) мы ставим сумму $93 + 40 + 13 + 3 = 149$ и т. д.

В третьей строке итогов (тринадцатая строка), которую обозначаем буквой e, мы ставим сумму чисел, стоящих в данной графе в первой и второй строках итогов. Так, в третьей строке итогов в графе (1) мы ставим сумму $115 + 187 = 302$, в той же строке в графе (2) мы ставим сумму $90 + 149 = 239$ и т. д.

В четвертой строке итогов (четырнадцатая строка), которую обозначаем буквой d, мы ставим разность чисел, стоящих во второй и первой строках итогов (в двенадцатой и одиннадцатой строках). Так, в четвертой строке итогов в графе (1) мы ставим разность $187 - 115 = +72$, в той же строке в графе (2) ставим разность $149 - 90 = +59$ и т. д. Разности приписываем соответствующий знак $+$ или $-$. В нашем случае все разности оказались положительными.

Заполняя указанным способом таблицу, мы тут же, попутно, производим проверку.

Графа (1) проверяется путем сложения трех чисел — двух примыкающих к черте чисел графы (1) и числа, стоящего против черты в графе (0); в нашем примере такими числами будут

$$57 + 94 + 49 = 200.$$

Сумма этих трех чисел должна быть равна итогу по графе (0), который равен в свою очередь объему n выборки.

Графа (2) и все последующие проверяются путем сложения ближайшего к черте числа с ближайшим к черте числом предыдущей графы. В нашем примере такой суммой в нижней части графы (2) будут

$$93 + 94 = 187.$$

Эта сумма должна быть равна сумме чисел предыдущей графы, расположенных с той же стороны черты. Заметим, что в нашем примере во втором итоге (двенадцатая строка) по графе (1) стоит как раз число 187. Таким образом, подсчет сделан правильно.

Для проверки, например, верхней части графы (4) складываем числа

$$7 + 32 = 39.$$

Полученная сумма равна числу 39, стоящему в первом итоге (одиннадцатая строка) по графе (3). Таким образом, и здесь подсчет сделан верно.

После заполнения «таблицы подсчета моментов по способу сумм» находим интересующие нас суммы по формулам

$$h_1 = d_1, \tag{5.2.30}$$

$$h_2 = e_1 + 2e_2, \tag{5.2.31}$$

$$h_3 = d_1 + 6d_2 + 6d_3, \tag{5.2.32}$$

$$h_4 = e_1 + 14e_2 + 36e_3 + 24e_4, \tag{5.2.33}$$

где h_1, h_2, h_3 и h_4 — суммы, определяемые соотношением (5.2.25)[1]).

d_1, d_2 и d_3 — четвертые итоги по «таблице подсчета моментов по способу сумм» (в нашем примере стоящие в четырнадцатой строке) соответственно по графам (1), (2) и (3);

e_1, e_2, e_3 и e_4 — третьи итоги по той же таблице (в нашем примере стоящие в тринадцатой строке) соответственно по графам (1), (2), (3) и (4).

По формулам (5.2.30), (5.2.31), (5.2.32) и (5.2.33) находим:

$$h_1 = +72,$$

$$h_2 = 302 + 2 \cdot 239 = 780,$$

$$h_3 = 72 + 6 \cdot 59 + 6 \cdot 36 = 642,$$

$$h_4 = 302 + 14 \cdot 239 + 36 \cdot 114 + 24 \cdot 29 = 8448.$$

Таким образом, мы получим тот же результат, что в примере 5.2.6. По полученным суммам h_1, h_2, h_3 и h_4 легко найдем $\bar{x}$, s^2, $\bar{S}_k$ и $\bar{E}_k$, пользуясь ранее приведенными формулами. Соответствующие вычисления для данного случая уже сделаны в конце примера 5.2.6.

5.2.10. Другие формулы для вычисления статистических моментов. В литературе иногда встречаются формулы для вычисления средней арифметической и дисперсии, отличающиеся от вышеприведенных формул (5.2.10) и (5.2.13), рекомендуемых при малых выборках, и формул (5.2.18) и (5.2.22), рекомендуемых при больших выборках.

---

[1]) Вывод формул (5.2.30), (5.2.31), (5.2.32) и (5.2.33) имеется в книге: Л. К. Лахтин, Кривые распределения, Гостехиздат, М.

К таким формулам относятся:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{l} k_j x_j}{n}, \tag{5.2.34}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{l} k_j (x_j - c)}{n} + c; \tag{5.2.35}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}, \tag{5.2.36}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{j=1}^{l} k_j (x_j - \bar{x})^2}{n}, \tag{5.2.37}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{j=1}^{l} k_j x_j^2}{n} - \bar{x}^2, \tag{5.2.38}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{j=1}^{l} k_j (x_j - c)^2}{n} - (\bar{x} - c)^2, \tag{5.2.39}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{j=1}^{l} k_j (x_j - c)^2 - \frac{\left[\sum_{j=1}^{l} k_j (x_j - c)\right]^2}{n}}{n}. \tag{5.2.40}$$

Легко убедиться, что эти формулы приводят к тем же результатам, что и формулы (5.2.10), (5.2.13), (5.2.18) и (5.2.22), но менее удобны для пользования.

5.2.11. Поправки к группировке (Шеппарда). Как уже указывалось в **5.2.2**, при обработке обширного материала, полученного в выборке, на практике часто прибегают к группировке, разбивая шкалу рассматриваемого признака на некоторое число (10—20) равных интервалов (разрядов), и подсчитывают затем численности групп наблюдений, попавших в последовательные интервалы. При дальнейших расчетах, например при вычислении моментов различных порядков, наблюдения, попавшие в некоторый интервал подразделения, приурочивают к середине этого интервала, считая, таким образом, что все эти наблюдения обладают одним и тем же округленным значением признака, соответствующим середине данного интервала.

Пусть x_0 — середина одного из интервалов, длины которых мы обозначим через h. Середина ближайшего справа интервала будет $x_1 = x_0 + h$, а ближайшего слева будет $x_{-1} = x_0 - h$. Аналогичным образом занумеруем следующие друг за другом по порядку интервалы:

$$x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_0 + 2h, \quad \ldots, \quad x_k = x_0 + kh;$$
$$x_{-1} = x_0 - h, \quad x_{-2} = x_0 - 2h, \quad \ldots, \quad x_{-k} = x_0 - kh.$$

Округленному значению $x_i (i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm k)$ отвечает интервал

$$\Delta_i = \left(x_i - \frac{h}{2}, \; x_i + \frac{h}{2}\right)$$

с центром в точке x_i.

Любому наблюдению, попавшему в этот интервал, приписывается округленное значение x_i. При таком округлении, очевидно, совершается погрешность, не превосходящая, впрочем, половины длины интервала, т. е. $\frac{h}{2}$.

Поступая таким образом с каждым наблюдением величины X, которую мы будем предполагать непрерывно распределенной с некоторой плотностью $\varphi(x)$, мы, в сущности, заменяем ее дискретной величиной X_0, могущей принимать лишь округленные значения x_i с вероятностью

$$\mathbf{P}(X_0 = x_i) = p_i = \int_{x_i - \frac{h}{2}}^{x_i + \frac{h}{2}} \varphi(x)\, dx.$$

С этой же вероятностью мы можем ожидать попадания величины X в интервал Δ_i. Выгода, которую мы получаем при переходе от непрерывной величины X к дискретной величине X_0, заключается в большой простоте последующих вычислений с округленными значениями и в более простой и удобообозримой картине распределения выборочных значений, сведенных в небольшое число интервалов. Однако эта выгода достигается за счет некоторой потери информации, которая дается первоначальными измерениями до их округления и приводит к систематической ошибке при оценке моментов ν_r распределения X по эмпирическим моментам a_r.

В самом деле, эти последние теперь уже определяются по округленным значениям с помощью равенств

$$\bar{a}_r = \sum_i W_{0i} x_i^r = \sum_i \frac{k_i}{n} x_i^r,$$

где $W_{0i} = \frac{k_i}{n}$ есть частость наблюдений, попавших в интервал Δ_i и отвечающих округленному значению x_i.

Так как согласно (4.2.4)

$$\mathbf{M}\left(\frac{k_i}{n}\right) = p_i,$$

то

$$\mathbf{M}\bar{a}_r = \sum_i \mathbf{M}\left(\frac{k_i}{n}\right) x_i^r = \sum_i p_i x_i^r = \mathbf{M}X_0^r = \nu_{0r}.$$

Таким образом, округленные выборочные моменты $\bar{a}_r$ будут оценивать не моменты

$$\nu_r = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r \varphi(x)\, dx \tag{5.2.41}$$

величины X, а моменты

$$\nu_{0r} = \sum_i x_i^r \int_{x_i - \frac{h}{2}}^{x_i + \frac{h}{2}} \varphi(x)\, dx \tag{5.2.42}$$

вспомогательной величины X_0.

Другими словами, $\bar{a}_r$ не будут на языке современной статистики «состоятельными» и «несмещенными» оценками величин ν_r, т. е. расхождение между (5.2.41) и (5.2.42) будет иметь систематический характер; величина его зависит от степени грубости округления, иными словами, от длины h интервалов Δ_i и от аналитических свойств функции $\varphi(x)$.

Делая некоторые добавочные допущения о плотности $\varphi(x)$, которые на практике выполняются всякий раз, когда график функции $\varphi(x)$ на концах распределения имеет соприкосновение с осью x достаточно высокого порядка (т. е. когда сама функция $\varphi(x)$ и ее производные до некоторого порядка включительно обращаются на концах в нуль), можно дать приближенные формулы для определения систематического расхождения между ν_r и ν_{0r}. После этого легко определить поправки к моментам $\bar{a}_r$ для того, чтобы их сделать доброкачественными оценками интересующих нас моментов ν_r величины X.

Эти поправки мы приведем, не давая их вывода, который можно найти в полных курсах [1]).

Оказывается, что между моментами ν_r и ν_{0r} можно установить следующее приближенное соотношение:

$$\nu_{0r} = \frac{1}{r+1} \sum_{i=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]} C_{r+1}^{2i+1} \left(\frac{h}{2}\right)^{2i} \nu_{r-2i}, \tag{5.2.43}$$

где $r = 1, 2, \ldots$ есть порядок момента, $\left[\frac{r}{2}\right]$ представляет наибольшее целое число, содержащееся в дроби $\frac{r}{2}$, и C_{r+1}^{2i+1} — число сочетаний из $r+1$ по $2i+1$.

Из линейных соотношений (5.2.43) можно выразить истинные моменты ν_r через «групповые» моменты ν_{0r}. Мы получим тогда следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned} \nu_1 &= \nu_{01}, \\ \nu_2 &= \nu_{02} - \frac{h^2}{12}, \\ \nu_3 &= \nu_{03} - \frac{1}{4}\nu_{01}h^2, \\ \nu_4 &= \nu_{04} - \frac{1}{2}\nu_{02}h^2 + \frac{7}{240}h^4. \end{aligned}\right\} \tag{5.2.44}$$

Если поместить начало отсчета в среднюю точку распределения, то $\nu_1 = \nu_{01} = 0$ и получаются поправки для центральных моментов:

$$\left.\begin{aligned} \mu_2 &= \mu_{02} - \frac{1}{12}h^2, \\ \mu_3 &= \mu_{03}, \\ \mu_4 &= \mu_{04} - \frac{1}{2}\mu_{02}h^2 + \frac{7}{240}h^4. \end{aligned}\right\} \tag{5.2.45}$$

Эти поправки известны под названием *поправок Шеппарда*.

Определив по округленным данным групповые моменты $\bar{a}_r$ и по ним соответствующие центральные моменты $\bar{m}_r$, мы вносим далее поправки Шеппарда, руководствуясь формулами (5.2.45), и получаем исправленные моменты m_r:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \bar{a}_1, \\ m_1 &= \bar{m}_1 = 0, \\ m_2 &= \bar{m}_2 - \frac{1}{12}h^2, \\ m_3 &= \bar{m}_3, \\ m_4 &= \bar{m}_4 - \frac{1}{2}\bar{m}_2h^2 + \frac{7}{240}h^4. \end{aligned}\right\} \tag{5.2.46}$$

[1]) См., например, В. И. Романовский, Математическая статистика, ГОНТИ, М.—Л., 1938, стр. 157—165.

Фактически, как мы видим, исправлению подлежат лишь моменты второго и четвертого порядков.

Смысл поправок Шеппарда можно уяснить с несколько иной точки зрения. Проделанное нами округление наблюдений является как бы источником вносимой при этом добавочной случайной погрешности η, которая прибавляется к величине X. Полученная нами величина $X_0 = X + \eta$ оказывается суммой двух величин: изучаемой нами величины X и независимой от нее и притом равномерно распределенной по интервалу $\left(-\frac{h}{2}, +\frac{h}{2}\right)$ величины η, представляющей погрешность от округления. Между моментами величин X_0 и X теперь легко установить соотношение, принимая во внимание, что $\mathbf{M}\eta = 0$,

$$\mathbf{M}\eta^s = \frac{1}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} x^s dx = \begin{cases} 0 \text{ при } s \text{ нечетном}, \\ \dfrac{h^s}{2^s(s+1)} \text{ при } s \text{ четном}. \end{cases} \tag{5.2.47}$$

Например, $\mathbf{M}X_0^4 = \nu_{04} = \mathbf{M}(X+\eta)^4 = \mathbf{M}(X^4 + 4X^3\eta + 6X^2\eta^2 + 4X\eta^3 + \eta^4) = \nu_4 + 6\nu_2\frac{h^2}{12} - \frac{h^4}{80}$, что совпадает с тем, что дает формула (5.2.43).

Разумеется, поправки Шеппарда следует вносить лишь в том случае, когда величина их сравнима со случайной погрешностью, которой обладают выборочные моменты. Если h составляет небольшую долю среднего квадратического отклонения, то, как правило, вносить их нецелесообразно.

Пример 5.2.8. Пусть требуется скорректировать статистические моменты, вычисленные в примере 5.2.6, с помощью поправок Шеппарда.

По формулам (5.2.46) получим:

$$\overline{x'} = \overline{x} = a_1 = 4{,}3 \text{ мк},$$

$$m_2 = \overline{m}_2 - \frac{1}{12}h^2 = 94{,}26 - \frac{1}{12}\cdot 5^2 = 92{,}18 \text{ мк}^2,$$

$$m_3 = \overline{m}_3 = -113{,}59 \text{ мк}^3,$$

$$m_4 = \overline{m}_4 - \frac{1}{2}\overline{m}_2 h^2 + \frac{7}{240}h^4 = 25\,187 - 94{,}26\cdot\frac{25}{2} + \frac{7}{240}5^4 =$$

$$= 25\,187 - 1178 + 18 = 24\,027 \text{ мк}^4.$$

В данном случае поправка к $s' = \sqrt{\overline{m}_2}$ составляет всего лишь немногим больше 1%, что видно из следующего:

$$s' = \sqrt{94{,}26} = 9{,}709,$$

$$s = \sqrt{92{,}18} = 9{,}601,$$

$$\frac{s'-s}{s'}100 = \frac{0{,}108\cdot 100}{9{,}709} = 1{,}11\%.$$

§ 3. Статистические оценки параметров распределения

5.3.1. Проблема оценки параметров. Требования к оценкам: состоятельность, несмещенность и эффективность. Достаточные оценки (статистики). В § 1 настоящей главы уже указывалось на то, что применение статистических методов к данным наблюдения связано с рассмотрением этих последних как случайной выборки из некоторой генеральной совокупности. При этом распре-

деление частостей, полученное в выборке, рассматривается как эмпирическое приближение к теоретическому распределению вероятностей в генеральной совокупности. Выяснение или оценка закона распределения по данным выборки (*так называемая параметризация*) и составляет существенную проблему математической статистики: только овладев законами распределения изучаемых величин, мы можем решать возникающие на практике задачи по анализу, сравнению и предсказанию результатов массового процесса. На практике во многих задачах вид или, иначе говоря, форма теоретического распределения может считаться известной. Так, например, при обработке деталей на металлорежущих станках по методу автоматического получения размера, при устойчивом технологическом процессе можно считать, что распределение погрешностей деталей подчиняется нормальному закону распределения. Точно так же на практике очень часто исходят из того, что нормальному закону следуют и погрешности измерений. Суммарную погрешность измерения можно рассматривать как результат действия большого числа независимых или слабо зависимых причин и поэтому наблюденную ошибку можно представлять как сумму «элементарных ошибок»; последние же в свою очередь вследствие теоремы (4.3.37) Ляпунова позволяют с высокой степенью приближения считать наблюденную ошибку нормально распределенной. В артиллерийских расчетах обычно, опираясь на обширный опытный материал, полагают, что распределение точек поражения на плоскости следует двумерному нормальному закону распределения. В ряде физических и биологических схем теоретическим законом распределения является несомненно закон Пуассона или показательный закон $\lambda e^{-\lambda x}$ и т. д.

Такое положение наблюдается всегда, когда рассматриваемый процесс может быть с некоторым приближением подведен под теоретическую схему, анализируемую средствами теории вероятностей.

Во всех этих случаях мы можем считать, что теоретический закон распределения принадлежит к некоторому семейству, зависящему от одного или нескольких параметров. Если бы точные значения параметров, таких, как, например, a и σ при нормальном законе (3.3.1) или λ при законе Пуассона (2.4.5), были известны — закон распределения для данного случая был бы полностью определен. Иными словами, здесь задача нахождения закона распределения изучаемой величины (или величин) сводится к нахождению неизвестных значений параметров, т. е. к параметризации. Именно ради определения этих параметров весьма часто и производится само статистическое исследование. Так, знание параметров a и σ в вышеуказанных случаях, связанных с нормальным распределением, дает возможность решать инженерные задачи из области точности обработки и точности измерений.

Мы видели, например, в **3.7.2**, что, образуя средние арифметические из значений случайных величин, представляющих результаты выборочного наблюдения интересующего нас признака, можно, основываясь на законе больших чисел, приближенно оценить математическое ожидание или параметр a нормального закона; аналогично можно рассматривать дисперсию выборки s^2 как оценку теоретической (генеральной) дисперсии σ^2. Тем самым будет с некоторым приближением найдена и теоретическая функция нормального закона распределения вероятностей данной задачи.

В общем случае задача оценки параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ распределения сводится к нахождению таких функций $\overline{\theta}_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \overline{\theta}_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots$ $\ldots, \overline{\theta}_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от выборочных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые могли бы быть использованы для приближенного определения значений параметров. При этом мы должны быть уверены, что, по крайней мере, при больших n распределения случайных величин $\overline{\theta}_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \overline{\theta}_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ так тесно сконцентрированы около значений неизвестных параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$, что

можно без существенной ошибки приближенно полагать на практике, что почти наверно

$$\overline{\theta}_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \approx \theta_1,$$
$$\overline{\theta}_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \approx \theta_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\overline{\theta}_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \approx \theta_k.$$

Эта концентрация распределений статистических оценок около оцениваемых параметров, как легко понять, характеризует точность и надежность производимых оценок.

Можно и более точно сформулировать требования, предъявляемые к выбору функций $\overline{\theta}_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \overline{\theta}_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, называемых *«статистическими оценками» параметров*. Но для этого надо обратиться к выборочным законам распределения этих оценок.

Понятно, что для каждой функции распределения $F_X(x, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ интересующего нас семейства закон распределения каждой из возможных статистических оценок $\overline{\theta}_i(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ вполне определен. В самом деле, функции $\overline{\theta}_i(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ образуют систему случайных величин, непосредственно определяемых по возможным или случайным результатам $X_1, X_2, \ldots, X_n$ выборки.

В свою очередь закон распределения этих последних полностью определяется законом распределения исходной случайной величины X с функцией $F_X(x, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$. Ибо $X_1, X_2, \ldots, X_n$ являются, как мы знаем, независимыми величинами, представляющими как бы n экземпляров одной и той же величины X, и каждая из них в отдельности распределена по закону $F_X(x, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$.

Очевидно, что закон распределения каждой оценки $\overline{\theta}_i (i = 1, 2, \ldots, k)$ зависит поэтому от значений параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$, от которых зависит функция $F_X(x, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$. Эта зависимость для разумно выбранной оценки должна быть такого рода, чтобы облегчить по возможности саму задачу приближенного определения параметров.

Знание выборочного закона распределения той или иной статистической оценки позволяет вычислять вероятность ее отклонений от оцениваемого параметра, ее математическое ожидание и ее дисперсию. А с помощью этих последних как раз и могут быть более точно сформулированы требования к статистическим оценкам.

В качестве *первого требования*, которому должна удовлетворять рационально построенная оценка $\overline{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ для некоторого параметра θ, можно поставить требование *сходимости по вероятности оценки к оцениваемому параметру* при неограниченном возрастании объема наблюдения, т. е. (по вероятности)

$$\overline{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n) \underset{n\to\infty}{\to} \theta. \tag{5.3.1}$$

Другими словами, при любом $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\left[\,|\,\overline{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n) - \theta\,| < \varepsilon\right] \underset{n\to\infty}{\to} 1, \tag{5.3.2}$$

т. е. вероятность отклонения статистической оценки $\overline{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ от оцениваемого параметра θ на величину, меньшую как угодно малого положительного числа ε, должна стремиться к единице при неограниченном увеличении числа n произведенных наблюдений.

В **3.7.2** мы видели из теоремы (3.7.11) Чебышева, что этому требованию удовлетворяет средняя арифметическая, рассматриваемая как статистическая

оценка математического ожидания, т. е. центра группирования данной случайной величины.

Оценки, удовлетворяющие требованию (5.3.2), называются *состоятельными*.

С помощью неравенства (3.7.10) Чебышева и выведенного из него соотношения (3.7.20) легко обнаружить, что для состоятельности оценки достаточно, чтобы

$$\mathbf{M}\,[\overline{\theta}\,(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n) - \theta]^2 \underset{n\to\infty}{\to} 0. \tag{5.3.3}$$

Состоятельность статистической оценки как раз и обеспечивает ее практическую близость, по крайней мере при больших значениях n, к оцениваемому параметру. Однако при малых значениях n из состоятельности оценки еще нельзя сделать никаких выводов о ее пригодности для приближенного определения соответствующего параметра.

Вторым из естественных требований, которые часто (хотя и не всегда) предъявляются к статистическим оценкам (характеристикам), является требование *несмещенности*, т. е. *отсутствия в ней систематической погрешности*.

Для *несмещенной оценки* при любом конечном n (в том числе и при малом) должно быть выполнено равенство

$$\mathbf{M}\,[\overline{\theta}\,(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)] = \theta, \tag{5.3.4}$$

т. е. *математическое ожидание несмещенной оценки должно быть равно оцениваемому параметру*. Оценка называется *положительно смещенной*, если $\mathbf{M}\,[\overline{\theta}\,(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)] > \theta$, и *отрицательно смещенной*, если $\mathbf{M}\,[\overline{\theta}\,(X_1, X_2, \ldots,\ X_n)] < \theta$.

Таким образом, центр рассеивания несмещенной оценки совпадает как раз с искомым значением параметра. Вообще говоря, не всякая состоятельная оценка будет несмещенной: ее математическое ожидание может, например, не быть равным θ, а лишь неограниченно приближаться к нему при возрастании n. При конечном же числе n такая оценка может быть смещена в ту или другую сторону.

Требование несмещенности особенно важно при *малом объеме* наблюдений. В распоряжении наблюдателя часто имеются данные по большому числу малочисленных серий наблюдений. Для того чтобы использовать оценки, относящиеся к отдельным сериям, для получения путем осреднения более точной общей оценки, нужно быть уверенным в отсутствии систематической ошибки у каждой частной оценки. Это будет лишь тогда, когда частная оценка является несмещенной.

Примером несмещенной оценки для центра рассеивания является среднее арифметическое значение, так как на основании теоремы (3.3.13) имеем:

$$\mathbf{M}\bar{x} = \mathbf{M}\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{M}X_i = \frac{n\mathbf{M}X}{n} = \mathbf{M}X = a, \tag{5.3.5}$$

где $\bar{x} = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ — средняя арифметическая из n некоторых, естественно, одинаково распределенных выборочных значений $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (из того, что $X_1, X_2, \ldots, X_n$ одинаково распределены, следует, что $\mathbf{M}X_1 = \mathbf{M}X_2 = \ldots = \mathbf{M}X_n = \mathbf{M}X = a$), a — центр рассеивания исследуемого распределения, определяемый его математическим ожиданием $\mathbf{M}X$.

Примером смещенной оценки может служить эмпирическая дисперсия, или, что то же самое, эмпирический центральный момент второго порядка

$$s^2 = m_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}.$$

Этот момент представляет, как мы скоро увидим, состоятельную, но смещенную оценку теоретической дисперсии σ^2. Дело в том, что m_2 сходится по вероятности к σ^2 при $n \to \infty$ (поэтому-то он и будет состоятельной оценкой σ^2), но математическое ожидание его $\mathbf{M}m_2$ не равно σ^2 и при конечном n дает преуменьшенное значение оцениваемого параметра σ^2. В **5.3.4** мы покажем, что

$$\mathbf{M}m_2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2,$$

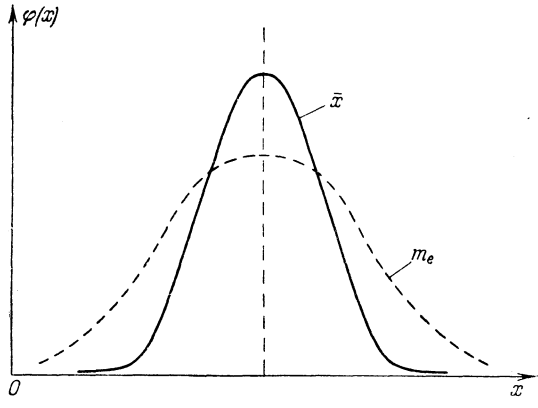
и потому, оценивая σ^2 по m_2, мы допускаем благодаря отрицательному смещению систематическую ошибку, равную $\frac{\sigma^2}{n}$, при больших n она *пренебрежимо мала.*

Аналогичным образом при оценке величины σ с помощью характеристики $s = \sqrt{m_2}$ получим состоятельную, но при малом n довольно значительно смещенную оценку σ.

Состоятельные несмещенные оценки могут быть иногда построены различными способами. Так, для оценки центра рассеивания нормального закона может быть взята наряду со средней арифметической $\bar{x}$ также эмпирическая медиана m_e (по крайней мере, для нечетных значений n объема выборки). Из дальнейшего будет видно, что медиана m_e подобно $\bar{x}$ представляет несмещенную состоятельную оценку центра группирования. Из двух состоятельных несмещенных оценок $\bar{\theta}'$ и $\bar{\theta}''$ для одного и того же параметра θ естественно отдать предпочтение той, в распределении которой (см. **5.1.2**) масса вероятностей более тесно сконцентрирована около параметра θ (черт. 64). В качестве обычной меры рассеивания той или иной статистической оценки $\bar{\theta}$ около оцениваемого параметра θ чаще всего рассматривается дисперсия

$$\mathbf{D}\bar{\theta} = \sigma^2_{\bar{\theta}} = \mathbf{M}(\bar{\theta} - \theta)^2, \quad (5.3.6)$$

где $\mathbf{M}\bar{\theta} = \theta$ в силу несмещенности оценки.



Черт. 64. Кривые плотностей выборочных распределений средней арифметической $\bar{x}$ и медианы m_e.

Практически можно часто считать из двух оценок $\bar{\theta}'$ и $\bar{\theta}''$ одного и того же параметра θ лучшей ту, у которой дисперсия меньше. Тогда можно поставить вопрос о разыскании несмещенной состоятельной оценки с наименьшей дисперсией. При весьма общих предположениях можно показать, что дисперсия оценок, построенных на основе выборки объема n, не меньше некоторой нижней границы. Так, для случая одного параметра для дисперсии любой несмещенной оценки выполняется неравенство

$$\sigma^2_{\bar{\theta}} \geqslant \frac{1}{nA(\theta)}. \quad (5.3.7)$$

Для неотрицательной величины $A(\theta)$ можно дать два равносильных выражения:

$$A(\theta) = \mathbf{M}\left\{\left[\frac{\partial \ln \varphi(x, \theta)}{\partial \theta}\right]^2\right\} = -\mathbf{M}\left[\frac{\partial^2 \ln \varphi(x, \theta)}{\partial \theta^2}\right], \quad (5.3.8)$$

где n — объем выборки, $\varphi(x, \theta)$ — плотность вероятности случайной величины при непрерывном ее распределении; в случае дискретного распределения $\varphi(x, \theta)$

означает вероятность значения x величины X

$$\varphi(x,\ \theta) = \mathbf{P}(X = x;\ \theta).$$

В (5.3.8) стоят математические ожидания величин, которые получим, если в функциях

$$\left[\frac{\partial \ln \varphi(x,\ \theta)}{\partial \theta}\right]^2 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \ln \varphi(x,\ \theta)}{\partial \theta^2}$$

заменим первый аргумент случайной величиной X.

Если существует такая несмещенная оценка $\bar{\theta}$, для которой дисперсия $\sigma^2_{\bar{\theta}}$ достигает нижней границы, равной правой части в неравенстве (5.3.7), то она называется *эффективной оценкой*. Эффективная оценка всегда состоятельна. Если мы имеем какую-либо другую несмещенную оценку $\bar{\theta}$, то *«сравнительную эффективность»* этой оценки (по сравнению с наилучшей оценкой — эффективной) естественно измерять отношением дисперсий

$$\varepsilon(\bar{\theta}) = \frac{\sigma^2_{\bar{\theta}_э}}{\sigma^2_{\bar{\theta}}}, \tag{5.3.9}$$

где $\sigma^2_{\bar{\theta}_э}$ есть дисперсия эффективной оценки, а $\sigma^2_{\bar{\theta}}$ — дисперсия сравниваемой оценки. Сравнительная эффективность $\varepsilon(\bar{\theta})$ всякой несмещенной оценки не больше единицы. Так, для простой случайной выборки из нормальной совокупности эффективной оценкой параметра a является средняя арифметическая $\bar{x}$, а сравнительная эффективность медианы m_e при выборке большого объема будет приближенно равна

$$\frac{\sigma^2_{\bar{x}}}{\sigma^2_{m_e}} = \frac{2}{\pi} = 0{,}6366, \tag{5.3.10}$$

как это будет показано далее (см. **5.3.8**).

Практически это означает, что центр распределения a определяется по медиане m_e с той же точностью при n наблюдениях, как при $\frac{2}{\pi} n = 0{,}6366n$ наблюдениям по средней арифметической $\bar{x}$.

Пример 5.3.1. Пусть случайная величина X представляет частость появлений события A при возвратной (повторной) выборке объема s. Таким образом, sX следует биномиальному закону (2.4.1), параметр s которого считается известным. Требуется найти эффективную оценку параметра p этого же закона, т. е. вероятности появления события A в единичном испытании, если известны результаты n выборок объема s. Пусть i-я из произведенных n выборок объема s дает частость $\frac{k_i}{s}$, которую можно считать приближеной оценкой для p. Мы должны использовать n независимо от наблюденных частостей $\frac{k_1}{s}, \frac{k_2}{s}, \ldots, \frac{k_n}{s}$ для более точной оценки p.

По формуле (5.3.8) находим:

$$nA(\theta) = -n\mathbf{M}\left[\frac{\partial^2 \ln \varphi(x,\ \theta)}{\partial \theta^2}\right] = -n\mathbf{M}\left[\frac{\partial^2 \ln \varphi(x,\ p)}{\partial p^2}\right] = -n\mathbf{M}\left[\frac{\partial^2 \ln C_s^x p^x q^{s-x}}{\partial p^2}\right] =$$

$$= -n\mathbf{M}\left[-\left(\frac{x}{p^2} + \frac{s-x}{q^2}\right)\right] = n\left(\frac{\mathbf{M}X}{p^2} + \frac{s - \mathbf{M}X}{q^2}\right) = n\left[\frac{s(q+p)}{pq}\right] = \frac{ns}{pq},$$

так как

$$\frac{\partial \ln C_s^x p^x q^{s-x}}{\partial p} = \frac{x}{p} - \frac{s-x}{1-p} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \ln C_s^x p^x q^{s-x}}{\partial p^2} = -\left(\frac{x}{p^2} + \frac{s-x}{q^2}\right),$$

а по (4.2.3) при биномиальном законе $\mathbf{M}X = sp$.

Таким образом, при биномиальном законе согласно (5.3.7) имеем:

$$\sigma^2_{\bar{p}} \geqslant \frac{pq}{ns}, \tag{5.3.11}$$

т. е. нижней границей дисперсий для возможных статистических оценок параметра p при известном s является

$$\frac{pq}{ns}.$$

Проверим, является ли эффективной несмещенной оценкой следующая статистическая оценка вероятности p:

$$t = \frac{\bar{x}}{s} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{sn}, \tag{5.3.12}$$

где X_1, X_2, ..., X_n — числа появлений события A в n возвратных выборках объема s.

Используя теоремы (3.3.12) и (3.3.13), находим:

$$\mathbf{M}\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{sn}\right) = \frac{1}{sn}\mathbf{M}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \frac{n\mathbf{M}X}{sn} = \frac{\mathbf{M}X}{s},$$

так как X_1, X_2, ..., X_n — n одинаково распределенных по биномиальному закону экземпляров величины X.

Но из (4.2.3) следует:

$$\mathbf{M}X = sp,$$

а потому

$$\frac{\mathbf{M}X}{s} = \frac{sp}{s} = p.$$

Это и доказывает, что статистическая оценка t является несмещенной оценкой p.

Найдем теперь дисперсию оценки t:

$$\sigma^2_t = \sigma^2_{\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{sn}} = \frac{1}{s^2n^2}\sigma^2_{X_1 + X_2 + \ldots + X_n} = \frac{n\sigma^2_X}{s^2n^2} = \frac{\sigma^2_X}{s^2n}.$$

Но из (4.2.9) имеем:

$$\sigma^2_X = spq,$$

а потому

$$\frac{\sigma^2_X}{s^2n} = \frac{spq}{s^2n} = \frac{pq}{sn}.$$

Мы пришли как раз к выражению, стоящему в правой части (5.3.11), а это и означает, что статистическая оценка $t = \frac{x}{s}$ является эффективной несмещенной оценкой параметра p при известном s.

Пример 5.3.2. Пусть случайная величина X следует закону Пуассона. Требуется проверить, является ли эмпирический первый начальный момент $a_1 = \bar{x}$ несмещенной эффективной оценкой для параметра λ этого закона.

По формуле (5.3.7) находим:

$$\frac{1}{n\mathbf{M}\left[\frac{\partial^2 \ln \varphi(x, \theta)}{\partial \theta^2}\right]} = \frac{1}{n\mathbf{M}\left[\frac{\partial^2 \ln \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}}{\partial \lambda^2}\right]} = \frac{1}{n\mathbf{M}\left[-\frac{k}{\lambda^2}\right]} = \frac{\lambda^2}{n\mathbf{M}k} = \frac{\lambda^2}{n\lambda} = \frac{\lambda}{n},$$

так как

$$\frac{\partial \ln \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}}{\partial \lambda} = \frac{k}{\lambda} - 1 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \ln \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}}{\partial \lambda^2} = -\frac{k}{\lambda^2},$$

но по соотношению (4.2.26) при законе Пуассона $\mathbf{M}k = \lambda$.

Таким образом, при законе Пуассона

$$\sigma^2_{\bar{\lambda}} \geqslant \frac{\lambda}{n}, \tag{5.3.13}$$

т. е. $\frac{\lambda}{n}$ представляет нижнюю границу дисперсий для возможных статистических оценок параметра λ.

Найдем теперь дисперсию величины

$$a_1 = \bar{x} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n},$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_n$ представляют числа появлений интересующего события в n независимых сериях испытаний

$$\left(\sigma_{\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}}\right) = \frac{1}{n^2}\sigma^2_{X_1+X_2+\ldots+X_n} = \frac{n\sigma^2_X}{n^2} = \frac{\sigma^2_X}{n} = \frac{\lambda}{n},$$

так как независимые случайные переменные $X_1, X_2, \ldots, X_n$ одинаково распределены по закону Пуассона, а при этом законе из соотношения (4.2.27) следует, что $\sigma^2_X = DX = \lambda$.

Мы в итоге пришли к тому выражению, которое стоит в правой части соотношения (5.3.13), а это и означает, что $a_1 = \bar{x}$ является несмещенной эффективной оценкой параметра λ закона Пуассона.

Введем еще одно важное понятие *достаточной* оценки, играющей большую роль в современной математической статистике. Пусть плотность распределения $\varphi(x, \theta)$ величины X зависит от параметра θ; $X_1, X_2, \ldots, X_n$ есть n независимых экземпляров этой величины и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — возможные их значения, с которыми мы встречаемся в выборке O_n объема n. Плотность многомерной величины $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ представляется произведением значений плотностей $\varphi(x, \theta)$ в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (так как X_i независимы)

$$\mathbf{P}(O_n, \theta) = \varphi(x_1, \theta)\,\varphi(x_2, \theta)\ldots\varphi(x_n, \theta) \tag{5.3.14}$$

и при данных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ может рассматриваться как функция параметра θ. Эта функция называется *функцией правдоподобия*.

Если величина X дискретна, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ представляют какие-либо из ее возможных значений, то функция правдоподобия определяется аналогичным выражением

$$\mathbf{P}(O_n, \theta) = p(x_1, \theta)\; p(x_2, \theta)\ldots p(x_n, \theta), \tag{5.3.15}$$

где $p(x_i, \theta)$ — вероятность равенства $X_i = x_i$.

Предположим теперь, что мы располагаем такой оценкой θ с помощью характеристики $\bar{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, что условное распределение величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ при известных значениях характеристики $\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не зависит от параметра θ. Это обстоятельство аналитически выражается в том, что функцию правдоподобия можно представить в виде произведения двух множителей

$$\mathbf{P}(O_n, \theta) = \varphi_1[\hat{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n); \theta] \cdot \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, \bar{\theta}), \tag{5.3.16}$$

где первый множитель дает плотность распределения характеристики $\hat{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при данном значении параметра θ, а второй множитель представляет условную плотность совокупности наших величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ при фиксированном значении параметра $\bar{\theta}$. Этот второй множитель совсем не зависит от параметра θ, который входит только в первый множитель. Если характеристика $\bar{\theta}$ обладает указанным свойством, то она называется *достаточной оценкой* (или *достаточной статистикой*) для параметра θ.

Замечательное свойство достаточных оценок заключается в том, что они как бы вбирают в себя всю информацию, которая дается выборкой относительно параметра θ.

Пусть мы, кроме достаточной статистики $\bar{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, располагаем другой оценкой $\bar{\theta}'(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Тогда распределение $\bar{\theta}'(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при данном значении $\bar{\theta}$ не зависит от θ, так как при этом условии распределение системы $X_1, X_2, \ldots, X_n$ не зависит от θ. Это определение может быть легко распространено на любое число параметров. Система оценок $\bar{\theta}_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\bar{\theta}_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \bar{\theta}_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

называется достаточной для системы параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$, если функция правдоподобия выборки $\mathbf{P}(O_n, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ может быть представлена в виде произведения

$$\varphi_1[\overline{\theta}_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ldots \overline{\theta}_k(x_1, x_2, \ldots, x_n), \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k] \times$$

$$\times \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, \overline{\theta}_1, \overline{\theta}_2, \ldots, \overline{\theta}_k). \quad (5.3.17)$$

Аналогичное определение можно дать и для случая дискретного распределения. Поясним сказанное несколькими примерами.

Пусть мы имеем нормально распределенную величину X с плотностью $n(x; a, \sigma)$. Функция правдоподобия выборки представлена в этом случае следующим образом:

$$\mathbf{P}(O_n; a, \sigma) = n(x_1; a, \sigma) \cdot n(x_2; a, \sigma) \ldots n(x_n; a, \sigma) =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \frac{1}{\sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_1-a)^2 - \frac{1}{2\sigma^2}(x_2-a)^2 - \ldots - \frac{1}{2\sigma^2}(x_n-a)^2} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2}.$$

Но, полагая

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

будем, как мы видели в (5.2.13), иметь:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 + n(\overline{x} - a)^2.$$

Далее, полагая

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2,$$

можем записать:

$$\mathbf{P}(O_n; a, \sigma) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[ns^2 + n(\overline{x}-a)^2]} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} e^{-\frac{ns^2}{2\sigma^2}} e^{-n\frac{(\overline{x}-a)^2}{2\sigma^2}},$$

откуда можно легко заключить, что в данном случае функция правдоподобия полностью определена, если известны характеристики s^2 и $\overline{x}$. Кроме того, условие (5.3.17), очевидно, выполняется для a и σ. Следовательно, $\overline{x}$ и s являются достаточными оценками для a и σ.

В качестве другого примера рассмотрим величину X, принимающую целые значения (0, 1, 2, ...) и распределенную по закону Пуассона:

$$\mathbf{P}(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}.$$

Функция правдоподобия выборки здесь может быть записана в следующем виде:

$$\mathbf{P}(O_n, \lambda) = \frac{e^{-n\lambda}\lambda^{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}}{x_1!\, x_2! \ldots x_n!}$$

или, полагая

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \overline{x},$$

запишем:

$$\mathbf{P}(O_n, \lambda) = \frac{e^{-n\lambda}\lambda^{n\overline{x}}}{(n\overline{x})!} \cdot \frac{(n\overline{x})!}{x_1!\, x_2! \ldots x_n!}.$$

Первый множитель есть вероятность равенства

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n = n\overline{x}, \quad (5.3.18)$$

определяемая по закону Пуассона, которому согласно (4.2.29) следует сумма величин. Второй множитель представляет условную вероятность при выполнении условия (5.3.18) получить значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Параметр λ входит лишь в первый множитель и условие (5.3.16) выполняется. Следовательно, средняя арифметическая $\overline{x}$ будет достаточной оценкой λ.

Достаточные оценки в том случае, когда они существуют (что, к сожалению, бывает в довольно специальном классе случаев), представляют наилучшие оценки для параметров.

Заслуга точной формулировки тех требований, которым должны удовлетворять статистические характеристики, служащие для оценки неизвестных параметров, принад-

лежит выдающемуся русскому математику академику А. А. Маркову, впервые применившему понятия несмещенности и эффективности для обоснования метода наименьших квадратов. Дальнейшее развитие этой теории применительно к задачам математической статистики связано с именем Р. Фишера.

5.3.2. Оценка средней и дисперсии по выборке из конечной совокупности. Дисперсия выборочной средней арифметической в этом случае. Здесь мы рассмотрим одну из простейших задач выборочного метода: оценку средней некоторой конечной (т. е. конечного объема N) совокупности по данным выборки. Частным случаем этой задачи будет являться классическая проблема оценки вероятности по наблюденной частости. Случай конечной совокупности представляет некоторые специфические трудности, если выборка производится без возвращения. В этом случае теоретически приходится учитывать зависимость между наблюдениями, так как вероятность появления объекта с рассматриваемым признаком при данном тираже в этом случае зависит от исходов предшествующих тиражей. Зависимость эта сказывается на конечных формулах, по крайней мере, в тех случаях, когда отношение $\frac{n}{N}$ объема выборки к объему всей совокупности достигает заметной величины $\left(\text{например, } \frac{n}{N} > 0{,}2\right)$. Далее мы подробно исследуем, каким образом указанная зависимость влияет на точность и надежность оценки генеральных параметров.

Предположим, что генеральная совокупность имеет конечное число N объектов, которые характеризуются некоторым количественным признаком X. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_N$ — различные значения признака у объектов генеральной совокупности, причем для простоты мы предположим, что никакие два объекта не имеют равных значений признака. Пусть среднее значение признака в генеральной совокупности будет

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}, \tag{5.3.19}$$

а дисперсия признака будет равна

$$\mu_2 = \sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - a)^2. \tag{5.3.20}$$

Пусть мы отобрали n объектов из нашей генеральной совокупности и желаем по этой выборке (бесповторной) оценить параметр a — среднюю генеральной совокупности. Пусть $\bar{x}$ есть средняя арифметическая из наблюденных в выборке значений X. Посмотрим, с какой точностью $\bar{x}$ оценивает величину a. Мы предполагаем, что любое из C_N^n сочетаний, которое можно образовать из N возможных значений по n, имеет равные шансы попасть в выборку. Равным образом любое из значений $x_1, x_2, \ldots, x_N$ с равной вероятностью p может попасть (и с вероятностью $1-p$ не попасть) в выборку. Эту вероятность p легко подсчитать. В самом деле, число таких сочетаний по n, которые содержат некоторое фиксированное значение, например x_j, будет равно C_{N-1}^{n-1}, так как, отбрасывая x_j от каждого сочетания по n, мы получим некоторое сочетание по $(n-1)$, составленное из $(N-1)$ остальных значений $x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, x_{j+2}, \ldots, x_N$.

Поэтому

$$p = \frac{C_{N-1}^{n-1}}{C_N^n} = \frac{(N-1)!n!(N-n)!}{(n-1)!(N-n)!N!} = \frac{n}{N}. \tag{5.3.21}$$

К этому же результату мы, естественно, пришли бы, если бы воспользовались формулой (2.2.5), положив $k = K = 1$, $S = N$ и $s = n$.

Аналогичным образом легко подсчитать вероятность попадания какой-либо пары (x_i, x_j) $i \neq j$ фиксированных значений X в нашу выборку. Для этого достаточно заметить, что число сочетаний по n, в которые входит рассматриваемая пара, будет равно C_{N-2}^{n-2} и, следовательно,

$$p' = \frac{C_{N-2}^{n-2}}{C_N^n} = \frac{(N-2)!\, n!\, (N-n)!}{(n-2)!\, (N-n)!\, N!} = \frac{n(n-1)}{N(N-1)}. \tag{5.3.22}$$

Точно так же (5.3.22) мы могли бы получить из (2.2.5), положив $k=K=2$, $S=N$ и $s=n$.

Поставим теперь в соответствие каждому значению x_i случайную величину l_i, принимающую только два значения: 1 и 0; при этом $l_i = 1$, когда x_i попадает в выборку, и $l_i = 0$ в противном случае. Следовательно,

$$\mathbf{P}(l_i = 1) = p = \frac{n}{N} \quad \text{и} \quad \mathbf{P}(l_i = 0) = 1 - p = 1 - \frac{n}{N}. \tag{5.3.23}$$

Заметим, что величины $l_i (i = 1, 2, \ldots, N)$ зависимы: они связаны соотношением

$$l_1 + l_2 + \ldots + l_N = n, \tag{5.3.24}$$

выражающим тот очевидный факт, что ровно n величин l_i должны получить значение 1 и $N-n$ величин — значение 0, так как ровно n значений X из общего числа N значений попадает в выборку.

Мы можем представить теперь среднюю арифметическую $\bar{x}$ (рассматриваемую как случайную величину) в следующем виде:

$$\bar{x} = \frac{x_1 l_1 + x_2 l_2 + \ldots + x_N l_N}{n}. \tag{5.3.25}$$

Если выборка реализована и вышли значения X с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_n$, то это значит, что $l_{i_1} = l_{i_2} = \ldots = l_{i_n} = 1$, тогда как все остальные величины l_k равны нулю и средняя арифметическая в выборке получила значение

$$\bar{x} = \frac{x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_n}}{n}.$$

Таким образом, числитель (5.3.25) представляет сумму тех значений X, которые попали в выборку.

Найдем теперь математическое ожидание и дисперсию величины $\bar{x}$.

Прежде всего из (5.3.25), (3.3.12) и (3.3.13) следует:

$$\mathbf{M}\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{M}(x_i l_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N} x_i \mathbf{M} l_i,$$

так как x_i здесь постоянные величины — значения признака в генеральной совокупности.

Но из (3.3.1) и (5.3.21) следует:

$$\mathbf{M} l_i = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p = \frac{n}{N} \tag{5.3.26}$$

и потому

$$\mathbf{M}\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i = a. \tag{5.3.27}$$

Таким образом, *средняя арифметическая $\bar{x}$ является несмещенной оценкой для a.*

Вычислим теперь дисперсию величины $\bar{x}$.

Так как на основании (5.3.24) и (5.3.25) мы можем написать:

$$\bar{x} - a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} x_i l_i - a\,\frac{\sum_{i=1}^{N} l_i}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}(x_i - a)\,l_i,$$

то

$$\mathbf{D}\bar{x} = \mathbf{M}(\bar{x} - a)^2 = \mathbf{M}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}(x_i - a)\,l_i\right]^2 = \frac{1}{n^2}\mathbf{M}\left[\sum_{i=1}^{N}(x_i - a)\,l_i\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{n^2}\mathbf{M}\left[\sum_{i=1}^{N}(x_i - a)^2 l_i^2 + \sum_{i\neq j}(x_i - a)(x_j - a)\,l_i l_j\right] =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{N}(x_i - a)^2\mathbf{M}l_i^2 + \frac{1}{n^2}\sum_{i\neq j}(x_i - a)(x_j - a)\,\mathbf{M}(l_i l_j). \qquad (5.3.28)$$

Но из (3.3.1) и (5.3.21) имеем:

$$\mathbf{M}l_i^2 = 1^2\cdot p + 0^2\cdot(1-p) = p = \frac{n}{N}, \qquad (5.3.29)$$

а из (3.3.1) и (5.3.22)

$$\mathbf{M}(l_i l_j) = 1\cdot 1\cdot p' + (0\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 0)(1-p') = 1^2\cdot p' = \frac{n(n-1)}{N(N-1)}; \qquad (5.3.29')$$

из (5.3.28), (5.3.29), (5.3.29′) и (5.3.20) следует:

$$\mathbf{D}\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N}(x_i - a)^2 + \frac{n-1}{N(N-1)n}\sum_{i\neq j}(x_i - a)(x_j - a) =$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} + \frac{n-1}{N(N-1)n}\sum_{i=1}^{N}\left[(x_i - a)\sum_{j\neq i}(x_j - a)\right], \qquad (5.3.30)$$

но из (5.2.10)

$$\sum_{j=1}^{N}(x_j - a) = \sum_{j=1}^{N} x_j - Na = Na - Na = 0$$

и потому при каждом фиксированном i, естественно,

$$\sum_{j\neq i}(x_j - a) = \sum_{j=1}^{N}(x_j - a) - (x_i - a) = 0 - (x_i - a) = -(x_i - a).$$

Отсюда и из (5.3.20) следует:

$$\sum_{i=1}^{N}\left[(x_i - a)\sum_{j\neq i}(x_j - a)\right] = -\sum_{i=1}^{N}(x_i - a)^2 = -N\sigma^2;$$

подставляя это значение в (5.3.30), получим:

$$\mathbf{D}\bar{x} = \frac{\sigma^2}{n} - \frac{n-1}{N-1}\,\frac{\sigma^2}{n},$$

откуда

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \mathbf{D}\bar{x} = \frac{N-n}{N-1}\,\frac{\sigma^2}{n} = \frac{1-\frac{n}{N}}{1-\frac{1}{N}}\,\frac{\sigma^2}{n} \qquad (5.3.31)$$

и

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{1-\frac{n}{N}}{1-\frac{1}{N}}}. \qquad (5.3.32)$$

Если признак X имеет лишь качественный характер и каждый объект генеральной совокупности может только обладать или не обладать им, то подлежит оценке доля объектов, обладающая признаком X в генеральной совокупности. Мы можем и этот случай привести к только что рассмотренной схеме, приписывая объектам выборки значения 1 и 0, смотря по тому, обладают они или не обладают данным признаком.

Пусть $x_1 = x_2 = \ldots = x_\mu = 1$ и $x_{\mu+1}, x_{\mu+2}, \ldots, x_N = 0$, так что

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{\mu \cdot 1 + 0 \cdot (N-\mu)}{N} = \frac{\mu}{N} = p \tag{5.3.33}$$

будет долей признака в генеральной совокупности.

Далее

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \frac{\mu}{N}\right)^2 = \frac{\mu}{N}\left(1-\frac{\mu}{N}\right)^2 + \frac{N-\mu}{N}\cdot\frac{\mu^2}{N^2} = \frac{\mu}{N}\left(1-\frac{\mu}{N}\right) = p(1-p). \tag{5.3.34}$$

Подставляя (5.3.34) в (5.3.32) и замечая, что в данном случае среднее арифметическое $\bar{x}$ совпадает с частостью $\frac{m}{n}$ признака в выборке, получим:

$$\sigma_{\frac{m}{n}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \cdot \sqrt{\frac{1-\frac{n}{N}}{1-\frac{1}{N}}}. \tag{5.3.35}$$

Точность и надежность определения a (или p) по выборке данного объема в первую очередь характеризуется величиной среднего квадратического отклонения $\sigma_{\bar{x}}$ $\left(\text{или } \sigma_{\frac{m}{n}}\right)$.

Мы видим, что величины $\sigma_{\bar{x}}$ и $\sigma_{\frac{m}{n}}$ отличаются в бесповторной выборке от соответствующих им значений (3.4.21) и (3.7.16) в повторной лишь множителем

$$C = \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \sqrt{\frac{1-\frac{n}{N}}{1-\frac{1}{N}}},$$

который меньше единицы. Однако это различие в большинстве случаев не имеет практического значения, так как обычно отношение $\frac{n}{N}$ объема n выборки к объему N генеральной совокупности мало, и множитель C близок к единице.

Так, при $10^0/_0$-ной выборке $\frac{n}{N} = 0{,}1$, $0{,}95 = \sqrt{0{,}9} < C < 1$ и поэтому $\sigma_{\bar{x}}$ составляет от 0,95 до 1 своего значения в повторной выборке.

Вообще точность оценки a по $\bar{x}$, как следует из (5.3.32), мало зависит от объема N совокупности и гораздо больше зависит от абсолютного значения объема n выборки.

При возрастании n точность выборки возрастает примерно в $\sqrt{n}$ раз так, как в этом отношении (приблизительно) уменьшается среднее квадратическое отклонение $\sigma_{\bar{x}}$.

Такая зависимость $\sigma_{\bar{x}}$ от n приводит к тому, что применяемые на практике объемы выборок обычно бывают сравнительно невелики, так как небольшое их дальнейшее увеличение очень мало влияет на точность оценки, а значительное дальнейшее повышение точности требует уже несоразмерно больших объемов выборки.

Пример 5.3.3. Из партии деталей в 2000 штук отобрана проба объема в 140 штук.

Средняя высота детали оказалась равной $\bar{x} = 32{,}46$ *мм* и эмпирическое среднее квадратическое отклонение $s = 0{,}31$ *мм*. Требуется сравнить средние квадратические отклонения $\sigma_{\bar{x}}$ средней арифметической для возвратной и безвозвратной выборки.

Для возвратной выборки по соотношению (3.4.21) будем иметь:

$$\sigma_{\bar{x}} \cong \frac{0{,}31}{\sqrt{140}} = 0{,}026 \text{ мм}.$$

Для безвозвратной выборки, учитывая конечный объем генеральной совокупности $N = 2000$, мы с помощью соотношения (5.3.32) получим:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{0{,}31}{\sqrt{140}} \sqrt{\frac{1 - \frac{140}{2000}}{1 - \frac{1}{2000}}} = 0{,}025 \text{ мм}.$$

В данном примере разница между двумя приближенными значениями $\sigma_{\bar{x}}$ составила 4%.

Пример 5.3.4. Пусть требуется сравнить средние квадратические отклонения с учетом и без учета объема совокупности частости поковок с окалиной в партии из 2000 штук деталей, если в выборке из 140 штук оказалось 7 штук поковок с окалиной.

Принимая частость признака в выборке $\frac{7}{140} = 0{,}05 = 5\%$ за приближенное значение доли p в генеральной совокупности по формулам (3.7.15) и (5.3.35), получим:

$$\sigma_{\frac{m}{n}} \approx \sqrt{\frac{0{,}05\,(1 - 0{,}05)}{140}} = 0{,}0185 = 1{,}85\%,$$

$$\sigma'_{\frac{m}{n}} \approx \sqrt{\frac{0{,}05\,(1 - 0{,}05)}{140}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \frac{140}{2000}}{1 - \frac{1}{2000}}} = 0{,}0178 = 1{,}78\%.$$

Так же как и в примере 5.33, здесь разница получилась около 4%.

Остановимся еще на оценке дисперсии конечной генеральной совокупности.

Выше мы представили случайную величину $\bar{X}$ с помощью случайных величин l_i равенством (5.3.25).

Рассмотрим теперь величину

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N} l_k (x_k - \bar{X})^2, \tag{5.3.36}$$

где x_k представляет, так же как в (5.3.25), возможные значения величины X в совокупности. Если в выборке реализовались значения величины X с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_n$, то средняя арифметическая $\bar{X}$ примет значение

$$\frac{x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_n}}{n} = \bar{x} \quad \text{и} \quad l_{i_1} = l_{i_2} = \ldots = l_{i_n} = 1,$$

тогда как все остальные значения l_k (при $k \neq i_1, i_2, \ldots, i_n$) равны нулю. Поэтому возможным значением величины s^2 будет

$$s^2 = \frac{(x_{i_1} - \overline{x})^2 + (x_{i_2} - \overline{x})^2 + \ldots + (x_{i_n} - \overline{x})^2}{n},$$

т. е. выборочная дисперсия, определяемая (5.2.4).

Случайную величину s^2 можно записать в несколько ином виде

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} l_k (x_k - a + a - \overline{X})^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} l_k (x_k - a)^2 + \frac{2(a-\overline{X})}{n}\sum_{k=1}^{N} l_k (x_k - a) + \frac{(\overline{X}-a)^2}{n}\sum_{k=1}^{N} l_k.$$

Но так как

$$\sum_{k=1}^{N} l_k = n \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{N} l_k (x_k - a) = \sum_{k=1}^{N} l_k x_k - a\sum_{k=1}^{N} l_k = n\overline{X} - na = n(\overline{X} - a),$$

то

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} l_k (x_k - a)^2 - 2(\overline{X} - a)^2 + (\overline{X} - a)^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} l_k (x_k - a)^2 - (\overline{X} - a)^2.$$

Таким образом,

$$\mathbf{M}s^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} (x_k - a)^2 \mathbf{M}l_k - \mathbf{M}(\overline{X} - a)^2.$$

Но, принимая во внимание (5.3.26) и (5.3.31), найдем:

$$\mathbf{M}s^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} (x_k - a)^2 \frac{n}{N} - \mathbf{D}\overline{X} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N}(x_k - a)^2 - \mathbf{D}\overline{X} = \mathbf{D}X - \mathbf{D}\overline{X} =$$

$$= \sigma^2 - \sigma_{\overline{x}}^2 = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}\frac{\left(1 - \frac{n}{N}\right)}{1 - \frac{1}{N}} = \sigma^2\left[1 - \frac{N-n}{n(N-1)}\right] =$$

$$= \sigma^2 \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{N}{N-1} = \sigma^2 \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{N}}. \qquad (5.3.37)$$

Отсюда следует, что величина

$$s^{*2} = \frac{n}{n-1}\frac{N-1}{N}s^2 = \frac{N-1}{N}\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \qquad (5.3.38)$$

будет несмещенной оценкой дисперсии σ^2 в безвозвратной (бесповторной) выборке. Переход от s^2 к s^{*2} в большинстве случаев не является целесообразным, так как множитель $\frac{n}{n-1}\frac{N-1}{N}$ несущественно отличается от единицы.

Пример 5.3.5. Требуется по условиям примера 5.3.3 сравнить эмпирическую дисперсию s^2 с несмещенной оценкой s^{*2} дисперсии.

По формуле (5.3.38) получаем:

$$s^{*2} = \frac{2000-1}{2000} \cdot \frac{140 \cdot 0{,}31^2}{140-1} = \frac{1999}{2000} \cdot \frac{140}{139} \cdot 0{,}0961 = 0{,}0967.$$

Эмпирическая дисперсия s^2 будет равна

$$s^2 = 0{,}31^2 = 0{,}0961.$$

Разница между эмпирической дисперсией и несмещенной оценкой дисперсии составила в данном случае только 0,6%.

5.3.3. Оценка средней при выборке по группам («типическая выборка»). Сравнительное уменьшение дисперсии средней арифметической. Иногда на практике обследуемая совокупность *по имеющимся заранее данным* может быть разбита на группы известного объема, обладающие (по отношению к интересующему нас признаку) большей однородностью, чем вся совокупность; в этом случае выбор производится из отдельных групп, причем назначение числа единиц из каждой группы, включаемых в выборку, производится не случайным, а заранее обдуманным способом. Такая выборка приводит при одном и том же суммарном объеме к значительно лучшему результату. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Пусть мы имеем совокупность ω, разбитую на k групп ω_j ($j = 1, 2, \ldots, k$), каждая с функцией распределения $F_j(x)$, так что $F_j(x) = \mathbf{P}(X < x \mid X \subset \omega_j)$ — вероятности неравенства $X < x$ при условии, что объект берется из группы ω_j.

Обозначим через

$$p_j = \mathbf{P}(X \subset \omega_j)$$

вероятность наудачу взятому объекту совокупности принадлежать группе ω_j.

Тогда, очевидно,

$$\sum_{j=1}^{k} p_j = 1.$$

Чтобы найти функцию распределения X, мы можем применить формулу (2.2.23) полной вероятности

$$F(x) = \mathbf{P}(X < x) = \sum_{j=1}^{k} \mathbf{P}(X \subset \omega_j)\,\mathbf{P}(X < x \mid X \subset \omega_j) = \sum_{j=1}^{k} p_j F_j(x). \quad (5.3.39)$$

Таким образом, $F(x)$ является средним взвешенным из условных функций распределения $F_j(x)$. Отсюда легко вывести, что начальный момент ν_s величины X выражается как взвешенное среднее начальных моментов ν_{sj} условных распределений с весами p_j ($j = 1, 2, \ldots, k$). В частности, обозначая математическое ожидание величины X через a и ее дисперсию через σ^2, мы будем иметь:

$$\nu_1 = a = \sum_{j=1}^{k} p_j a_j, \quad (5.3.40)$$

где $a_j = \nu_{1j}$ представляет первый начальный момент группы ω_j.

Аналогично

$$\nu_2 = \sum_{j=1}^{k} p_j \nu_{2j}. \quad (5.3.41)$$

Используя соотношение $\sigma^2 = \nu_2 - a^2$, получим:

$$\sigma^2 + a^2 = \sum_{j=1}^{k} p_j (\sigma_j^2 + a_j^2),$$

где σ_j^2 представляет дисперсию распределения, соответствующего $F_j(x)$, откуда

$$\sigma^2 = \sum_{j=1}^{k} p_j (\sigma_j^2 + a_j^2) - a^2 = \sum_{j=1}^{k} p_j \sigma_j^2 + \sum_{j=1}^{k} p_j a_j^2 - a^2 = \sum_{j=1}^{k} p_j \sigma_j^2 + \sum_{j=1}^{k} p_j (a_j - a)^2 \quad (5.3.42)$$

или

$$\sigma^2 = \bar{\sigma}^2 + \sigma_a^2, \tag{5.3.43}$$

где $\bar{\sigma}^2$ есть *средняя взвешенная дисперсий* в отдельных группах (ее называют также остаточной дисперсией «внутри групп»), и величина $\sigma_a^2 = \sum_{j=1}^{k} p_j (a_j - a)^2$ характеризует рассеивание групповых средних a_j около генеральной средней, т. е. степень неоднородности совокупности (она часто называется «дисперсией между группами»).

Если производится возвратная выборка объема n, то, как мы знаем из (3.4.20), дисперсия средней арифметической $\bar{x}$ как оценка неизвестной генеральной средней a определяется величиной $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$, где σ^2 задается выражением (5.3.42). Мы покажем теперь, что в некоторых случаях возможно оценивать a более точным образом при том же объеме n выборки. Предположим, например, что вероятности p_j известны; это будет всякий раз так, когда известны численности $N_1, N_2, \ldots, N_k$ отдельных групп $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$. Тогда при случайном отборе

$$p_j = \frac{N_j}{N}. \tag{5.3.44}$$

Пусть выборка O_n отбирается теперь по следующему правилу: из группы ω_1 отбирается часть $O^{(1)}$ объема n_1, из группы ω_2, независимо от первой, отбирается часть $O^{(2)}$ объема $n_2, \ldots$, из группы ω_k — часть $O^{(k)}$ объема n_k. Числами n_j ($j = 1, 2, \ldots, k$) мы можем располагать по своему усмотрению, лишь бы удовлетворялось соотношение

$$\sum_{j=1}^{n} n_j = n.$$

Обозначим через $\bar{x}_R$ среднюю арифметическую всей выборки O_n и через $\bar{x}_j$ среднюю арифметическую выборки $O^{(j)}$ из группы ω_j.

Тогда, очевидно,

$$\bar{x}_R = \sum_{j=1}^{k} \bar{x}_j \frac{n_j}{n}, \tag{5.3.45}$$

$$\mathbf{M}\bar{x}_R = \sum_{j=1}^{k} \mathbf{M}\bar{x}_j \frac{n_j}{n} = \sum_{j=1}^{k} a_j \frac{n_j}{n}, \tag{5.3.46}$$

так как $\mathbf{M}\bar{x}_j = a_j$.

Если мы хотим использовать $\bar{x}_R$ в качестве несмещенной оценки математического ожидания a, согласно (5.3.40) равного

$$a = \sum_{j=1}^{k} a_j p_j,$$

то мы вводим требование

$$\sum_{j=1}^{k} a_j p_j = \sum_{j=1}^{k} a_j \frac{n_j}{n} \quad \text{при любых } a_j.$$

Ясно, что такое требование равносильно тому, чтобы n_j было равно $p_j n$. Если

$$n_j = np_j = n\frac{N_j}{N}, \tag{5.3.47}$$

то выборку O_n называют «*типической выборкой*».

Преимущество «типической выборки» по группам заключается в том, что при одинаковых объемах выборок выполняется неравенство

$$\sigma^2_{\bar{x}_R} \leqslant \sigma^2_{\bar{x}}, \tag{5.3.48}$$

т. е. дисперсия $\sigma^2_{\bar{x}_R}$ средней арифметической типической выборки не больше дисперсии $\sigma^2_{\bar{x}}$ простой выборки того же объема, причем знак равенства имеет место лишь в том весьма редком случае, когда все a_j равны между собой.

Докажем неравенство (5.3.48).

Заметим, что при $\frac{n_j}{n} = p_j$ (5.3.45) дает:

$$\bar{x}_R = \sum_{j=1}^{k} p_j \bar{x}_j. \tag{5.3.49}$$

Другими словами, в качестве оценки a мы берем среднее взвешенное из средних арифметических отдельных выборок из групп ω_j с весами, равными $p_j = \frac{N_j}{N}$. Учитывая независимость x_j, мы с помощью теоремы (3.4.17) и соотношения (5.3.28) найдем:

$$\sigma^2_{\bar{x}_R} = \sum_{j=1}^{k} \sigma^2_{\bar{x}_j} p_j^2,$$

но согласно (5.3.31)

$$\sigma^2_{\bar{x}_j} = \frac{1 - \frac{n_j}{N_j}}{1 - \frac{1}{N_j}} \frac{\sigma_j^2}{n_j},$$

а потому

$$\sigma^2_{\bar{x}_R} = \sum_{j=1}^{k} p_j^2 \frac{1 - \frac{n_j}{N_j}}{1 - \frac{1}{N_j}} \frac{\sigma_j^2}{n_j}. \tag{5.3.50}$$

С другой стороны, нетрудно усмотреть неравенство

$$\sigma^2_{\bar{x}_j} \leqslant \frac{\sigma_j^2}{n_j}, \tag{5.3.51}$$

выражающее то обстоятельство, что дисперсия средней арифметической при безвозвратной выборке не превосходит дисперсию при возвратной выборке. Ввиду этого

$$\sigma^2_{\bar{x}_R} \leqslant \sum_{j=1}^{k} \frac{\sigma_j^2}{n_j} p_j^2 = \sum_{j=1}^{k} p_j \frac{n_j}{n} \frac{\sigma_j^2}{n_j} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} p_j \sigma_j^2 = \frac{\bar{\sigma}^2}{n}. \tag{5.3.52}$$

В правой части (5.3.52) стоит остаточная дисперсия, которую мы в (5.3.43) обозначили через $\bar{\sigma}^2$.

Так как согласно (5.3.43)

$$\sigma^2 = \bar{\sigma}^2 + \sigma_a^2,$$

то

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\bar{\sigma}^2 + \sigma_a^2}{n} > \frac{\bar{\sigma}^2}{n}$$

и, значит,

$$\sigma^2_{\bar{x}_R} < \sigma^2_{\bar{x}}.$$

Тем самым (5.3.48) доказано.

Таким образом, на практике дисперсия $\sigma^2_{\bar{x}_R}$ средней арифметической при «типической выборке» бывает меньше дисперсии $\sigma^2_{\bar{x}}$ средней арифметической при простой выборке того же объема n на величину

$$\sim \frac{\sigma_a^2}{n} \tag{5.3.53}$$

и, следовательно, приводит к значительно лучшим результатам, особенно в том случае, когда дисперсия σ_a^2 между группами (т. е. неоднородность) значительна по сравнению с суммарной дисперсией σ^2.

Не вдаваясь в подробности, заметим, что в том случае, когда, кроме объемов N_j группы, известны также (хотя бы приближенно) дисперсии σ_j^2 каждой группы, можно еще более уточнить оценку величины a, определяя численность выборки из каждой группы следующим равенством:

$$n_j = \frac{n p_j \sigma_j}{\sum_{i=1}^{k} p_i \sigma_i}. \tag{5.3.54}$$

В этом случае дисперсия характеристики

$$y = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i = \sum_{i=1}^{k} x_i \frac{N_i}{N}$$

будет меньше, чем у величины $\bar{x}_R$, определенной ранее.

Отметим еще два важных частных случая выборки по группам.

В первом случае, когда все группы имеют одинаковый объем, т. е.

$$N_1 = N_2 = \ldots = N_k = \frac{N}{k},$$

и объем выборок из групп постоянен, т. е.

$$n_1 = n_2 = \ldots = n_k = \frac{n}{k}.$$

Так как

$$p_j = \frac{1}{k}, \quad p_j^2 = p_j \frac{1}{k} \quad \text{и} \quad \frac{1 - \frac{n_j}{N_j}}{1 - \frac{1}{N_j}} \cdot \frac{1}{n_j} = \frac{1 - \frac{n}{N}}{1 - \frac{k}{N}} \frac{k}{n},$$

то по аналогии с выводом (5.3.48)

$$\sigma^2_{\bar{x}_R} = \frac{1 - \frac{n}{N}}{1 - \frac{k}{N}} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} p_j \sigma_j^2 = \frac{1 - \frac{n}{N}}{1 - \frac{k}{N}} \frac{\bar{\sigma}^2}{n}. \tag{5.3.55}$$

Во втором случае, когда все группы также имеют одинаковый объем, т. е.

$$N_1 = N_2 = \ldots = N_k = \frac{N}{k},$$

а объем выборок из групп равен единице, т. е.

$$n_1 = n_2 = \ldots = n_k = 1 = \frac{n}{n} \quad \text{и} \quad k = n,$$

то из (5.3.55) вытекает, что

$$\sigma^2_{\bar{x}_R} = \frac{\bar{\sigma}^2}{n}. \qquad (5.3.56)$$

Выборка такого рода называется «механической» выборкой.

Пример 5.3.6. Имеется партия штамповок одного типа, полученных за 7 смен работы горизонтально-ковочной машины, в следующих количествах:

смена № 1	500
» № 2	400
» № 3	300
» № 4	400
» № 5	400
» № 6	500
» № 7	500
Итого . . .	3000 штук

Из продукции за каждую смену работы машины были отобраны выборки в объеме 5% от числа штамповок, выработанных за данную смену.

Отобранные штамповки были измерены по высоте, и для каждой выборки были вычислены средние арифметические и несмещенные оценки дисперсий σ^2_j в следующем виде.

Таблица 5.3.1

№ смен	1	2	3	4	5	6	7	Итого
$\bar{x}_j$	32,49	32,74	32,54	32,45	32,30	32,35	32,31	—
s^2_j	0,067	0,136	0,168	0,068	0,066	0,102	0,137	—
Объем выборки n_j	25	20	15	20	20	25	25	150

Требуется по выборочным данным определить среднюю арифметическую и оценку ее среднего квадратического отклонения при «типической» выборке.

По формуле (5.3.45) находим:

$$\bar{x}_R = 32{,}49 \cdot \frac{25}{150} + 32{,}74 \cdot \frac{20}{150} + 32{,}54 \cdot \frac{15}{150} + 32{,}45 \cdot \frac{20}{150} + 32{,}30 \cdot \frac{20}{150} + 32{,}35 \cdot \frac{25}{150} + 32{,}31 \cdot \frac{25}{150} = 32{,}44 \text{ мм}.$$

По формуле (5.3.50), полагая $p_j = \frac{N_j}{N}$ и заменяя теоретические дисперсии σ_j их приближенными значениями, получаем:

$$\bar{s}^2_{\bar{x}_R} = \frac{1}{3000^2}\left(500^2 \cdot \frac{1-\frac{25}{500}}{1-\frac{1}{500}} \cdot \frac{0{,}067}{25} + 400^2 \cdot \frac{1-\frac{20}{400}}{1-\frac{1}{400}} \cdot \frac{0{,}136}{20} + 300^2 \cdot \frac{1-\frac{15}{300}}{1-\frac{1}{300}} \cdot \frac{0{,}168}{15} + 400^2 \cdot \frac{1-\frac{20}{400}}{1-\frac{1}{400}} \cdot \frac{0{,}068}{20} + 400 \cdot \frac{1-\frac{20}{400}}{1-\frac{1}{400}} \cdot \frac{0{,}066}{20} + 500^2 \cdot \frac{1-\frac{25}{500}}{1-\frac{1}{500}} \cdot \frac{0{,}102}{25} + 500^2 \cdot \frac{1-\frac{25}{500}}{1-\frac{1}{500}} \cdot \frac{0{,}137}{25}\right) = 0{,}00066 \text{ мм}^2;$$

$$\bar{s}_{\bar{x}_R} = 0{,}026.$$

Пример 5.3.7. Пусть продукция горизонтально-ковочной машины за 7 смен составила 2800 штук колец по 400 колец в каждую смену. Из продукции за каждую смену берется по 20 колец. Средняя арифметическая высота кольца и несмещенные оценки дисперсий в выборках по сменам пусть остаются такими же, как это было показано в примере 5.3.6.

Теперь требуется оценить среднее квадратическое отклонение общей по сменам средней высоты кольца.

Находим:

$$\bar{x}_R = \frac{32{,}49 + 32{,}74 + \ldots + 32{,}31}{7} = 32{,}45 \text{ мм},$$

$$\bar{s}_j^2 = \frac{0{,}067 + 0{,}136 + \ldots + 0{,}137}{7} = 0{,}106 \text{ мм}^2,$$

По формуле (5.3.55) находим:

$$\bar{s}^2_{\bar{x}_R} = \frac{1 - \frac{140}{2800}}{1 - \frac{7}{2800}} \cdot \frac{0{,}106}{140} = 0{,}00072 \text{ мм}^2,$$

$$\bar{s}_{\bar{x}_R} = \sqrt{0{,}00072} = 0{,}027 \text{ мм}.$$

5.3.4. Случай большой выборки из совокупности неограниченного объема Метод моментов. Оценки центра распределения и дисперсии. Здесь мы рассмотрим случай большого числа наблюдений, когда n достаточно велико, чтобы иметь право с хорошим приближением пользоваться асимптотическими формулами; генеральную совокупность мы предположим для простоты неограниченно большой.

Как уже указывалось в **5.3.1**, в этом случае достаточно, чтобы статистическая оценка того или иного неизвестного параметра удовлетворяла лишь первому из трех вышеописанных требований, а именно, чтобы она была состоятельной. Здесь можно не требовать, чтобы оценка была строго несмещенной и эффективной, если при большом числе наблюдений систематическая ошибка будет пренебрежимо мала, а дисперсия выборочного распределения оценки будет так или иначе обеспечивать достаточно хорошую концентрацию ее значений около оцениваемого параметра. При большом числе наблюдений в качестве оценок неизвестных параметров теоретического распределения могут быть непосредственно использованы эмпирические моменты, подсчитываемые по значениям выборки с помощью формул (5.2.5) ÷ (5.2.40). Такой способ получения оценок носит название *метода моментов*.

Состоятельность этого метода проще всего обнаружить, применяя теорему А. Я. Хинчина, утверждающую, что ко всякой последовательности одинаково распределенных независимых величин $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$, математическое ожидание которых имеет определенное конечное значение

$$\mathbf{M}Z_1 = \mathbf{M}Z_2 = \ldots = \mathbf{M}Z_n = a,$$

применим закон больших чисел или, другими словами, средняя арифметическая $\frac{Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n}{n}$ этих величин сходится по вероятности к a при $n \to \infty$.

В самом деле, момент r-го порядка $a_r = \frac{X_1^r + X_2^r + \ldots + X_n^r}{n}$ является средней арифметической из величин $Z_k = X_k^r$, одинаково распределенных и обладающих одним и тем же математическим ожиданием $\mathbf{M}Z_k = \mathbf{M}X_k^r = \nu_r$. Таким образом, если существует момент ν_r теоретического распределения, т. е. если ряд для дискретной величины или интеграл для непрерывной величины, определяющие момент ν_r в соотношении (3.6.2), сходятся абсолютно (см. соот-

ношение (3.3.3)), то эмпирический начальный момент a_r порядка r сходится по вероятности к теоретическому начальному моменту ν_r того же порядка. Аналогично этому эмпирические центральные моменты m_r сходятся по вероятности к теоретическим центральным моментам μ_r. Это и означает, что *эмпирические моменты являются состоятельными оценками соответствующих теоретических моментов.*

Чтобы получить по методу моментов статистические оценки для параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$, заметим, что теоретические моменты μ_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ являются определенными функциями от параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$, от которых зависит закон распределения рассматриваемой величины X. Обратно, зная моменты $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$, можно через них выразить параметры θ_i так, что в этом случае параметры

$$\theta_i = \theta_i(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k) \tag{5.3.57}$$

будут определенными функциями моментов μ_i. Заменяя теперь в (5.3.57) значения $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_k$ по данным выборки их приближенными статистическими оценками $m_1, m_2, \ldots, m_k$ и принимая во внимание, что моменты m_i зависят от наблюденных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, будем иметь:

$$\begin{aligned}\theta_i &= \theta_i(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k) \approx \theta_i(m_1, m_2, \ldots, m_k) = \\ &= \theta_i[m_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), m_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, m_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = \\ &= \bar{\theta}_i(x_1, x_2, \ldots, x_n).\end{aligned} \tag{5.3.58}$$

Полученные таким образом функции $\bar{\theta}_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и будут служить приближенными оценками параметров θ_i. В самом деле, ввиду сходимости по вероятности моментов m_i к моментам μ_i функции $\bar{\theta}_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \theta_i(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ будут (при некоторых добавочных ограничениях) состоятельными оценками функций $\theta_i(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k)$, т. е. параметров θ_i.

Точность соотношений (5.3.58) зависит от степени приближения эмпирических моментов к оцениваемым теоретическим [1]).

Согласно теореме (4.3.37) Ляпунова при достаточно большом числе наблюдений выборочные распределения эмпирических моментов, представляющих средние арифметические независимых величин вида $X_k^r (k = 1, 2, \ldots, n)$, и будут близки к нормальному распределению с центром $\mathbf{M}X_k^r = \mu_r$ и дисперсией $\mathbf{D}\left(\frac{\sum X_k^r}{n}\right)$ (выражающейся в свою очередь через моменты более высоких порядков).

Обратимся теперь к средней арифметической $\bar{x}$ как к оценке первого начального момента ν_1 распределения, т. е. его математического ожидания.

Ранее мы уже видели (соотношение (5.2.45)), что $\mathbf{M}\bar{x} = \nu_1$, т. е. что *средняя арифметическая $\bar{x}$ является несмещенной оценкой первого начального момента ν_1 распределения* (вместе с тем она является, конечно, и состоятельной оценкой).

Выборочное распределение средней арифметической $\bar{x}$, полученной из (практически) любой генеральной совокупности, при большом объеме n выборки достаточно близко к нормальному. Параметры этого нормального распределения, как мы уже видели в **3.4.3**, определяются соотношениями

$$\mathbf{M}\bar{x} = \nu_1 = a, \quad \mathbf{D}\bar{x} = \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}, \quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

В этом последнем случае теоретическая или генеральная дисперсия σ^2 также является неизвестной и ее приходится оценивать в свою очередь по *эмпириче-*

[1]) См., например, книгу Г. Крамер, Математические методы статистики, ИЛ, М., 1948, § 24.4.

ской дисперсии, т. е. по эмпирическому центральному моменту второго порядка $m_2 = s^2$. Заметим прежде всего, что на основании (5.2.4), выбрав «ложный нуль» в точке $c = \nu_1$, будем иметь тождество

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum (x_i - \nu_1)^2 - (\bar{x} - \nu_1)^2.$$

Поэтому

$$\mathbf{M}s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}\,(X_i - \nu_1)^2 - \mathbf{M}\,(\bar{X} - \nu_1)^2. \tag{5.3.59}$$

Но $X_1, X_2, \ldots, X_n$ мы рассматриваем как n экземпляров одной и той же величины X и

$$\mathbf{M}(X_1 - \nu_1)^2 = \ldots = \mathbf{M}(X_n - \nu_1)^2 = \mathbf{M}(X - \nu_1)^2 = \mathbf{D}X = \sigma^2$$

и согласно (3.4.21)

$$\mathbf{M}\,(\bar{X} - \nu_1)^2 = \mathbf{D}\bar{x} = \frac{\sigma^2}{n},$$

а потому из (5.3.59) следует:

$$\mathbf{M}s^2 = \frac{1}{n}\,n\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \sigma^2\left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

т. е.

$$\mathbf{M}m_2 = \mathbf{M}s^2 = \sigma^2\frac{n-1}{n}. \tag{5.3.60}$$

Отсюда видно, что *эмпирическая дисперсия не является несмещенной оценкой теоретической дисперсии.*

Чтобы получить несмещенную оценку $\bar{s}^2$ теоретической дисперсии $\mathbf{D}X = \mu_2$, необходимо эмпирическую дисперсию $s^2 = m_2$ умножить на $\frac{n}{n-1}$, т. е.

$$\bar{s}^2 = \frac{n}{n-1}\,s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}. \tag{5.3.61}$$

Таким образом, несмещенная оценка теоретической дисперсии отличается от эмпирической дисперсии только тем, что при ее вычислении сумму квадратов вида $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ делят не на n, а на $n-1$. Практически эту поправку вносят при вычислении оценок дисперсии лишь в тех случаях, когда n меньше 30—40.

Легко убедиться в том, что $\bar{s}^2$ действительно является несмещенной оценкой параметра μ_2. В самом деле, из (5.3.60) и (5.3.61) получаем:

$$\mathbf{M}\bar{s}^2 = \mathbf{M}\left(\frac{n}{n-1}\,s^2\right) = \frac{n}{n-1}\,\mathbf{M}s^2 = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\,\mu_2 = \mu_2.$$

Окончательно

$$\mathbf{M}\bar{s}^2 = \mu_2 = \mathbf{D}x = \sigma_X^2, \tag{5.3.62}$$

а это и означает, что $\bar{s}^2$ является несмещенной оценкой теоретического второго центрального момента, или, что то же самое, теоретической дисперсии.

Для третьего и четвертого теоретических центральных моментов μ_3 и μ_4 несмещенными оценками будут[1]):

$$\bar{m}_3 = \frac{n^2}{(n-1)(n-2)}\,m_3, \tag{5.3.63}$$

$$\bar{m}_4 = \frac{n(n^2 - 2n + 3)}{(n-1)(n-2)(n-3)}\,m_4 - \frac{3n(2n-3)}{(n-1)(n-2)(n-3)}\,m_2^2, \tag{5.3.64}$$

[1]) См., например, книгу В. И. Романовского, Математическая статистика, ГОНТИ, М. — Л., 1938, § 49.

где n — объем выборки, m_2, m_3 и m_4 — соответственно второй, третий и четвертый эмпирические центральные моменты, вычисляемые по данным выборки с помощью формул (5.2.4) ÷ (5.2.40).

Найдем теперь дисперсию $\mathbf{D}m_2 = \mathbf{D}s^2$ эмпирической дисперсии $m_2 = s^2$. Для этого возьмем квадрат эмпирической дисперсии, который согласно (5.2.12) и (5.2.13) может быть представлен в виде

$$m_2^2 = (a_2 - a_1^2)^2 = (a_2 - \bar{x}^2)^2 = a_2^2 - 2a_2\bar{x}^2 + \bar{x}^4. \tag{5.3.65}$$

Полагая всюду $\nu_1 = 0$, получим:

$$\mathbf{M}a_2^2 = \mathbf{M}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2 = \frac{1}{n^2}\mathbf{M}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2.$$

Так как

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2 = x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_n^4 + 2x_1^2x_2^2 + 2x_1^2x_3^2 + \ldots + 2x_{n-1}^2x_n^2,$$

то, беря математическое ожидание и замечая, что ввиду равноправности отдельных наблюдений

$$\mathbf{M}x_1^4 = \mathbf{M}x_2^4 = \ldots = \mathbf{M}x_n^4 = \mu_4;$$

$$\mathbf{M}(x_1^2x_2^2) = \mathbf{M}x_1^2 \cdot \mathbf{M}x_2^2 = \mu_2\mu_2 = \mu_2^2$$

и аналогично

$$\mathbf{M}(x_1^2x_3^2) = \ldots = \mathbf{M}(x_{n-1}^2x_n^2) = \mu_2^2,$$

мы получим:

$$\mathbf{M}a_2^2 = \frac{1}{n^2}\mathbf{M}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) = \frac{n\mu_4 + 2\dfrac{n(n-1)}{2}\mu_2^2}{n^2} = \frac{\mu_4 + (n-1)\mu_2^2}{n}. \tag{5.3.66}$$

Далее точно так же

$$\mathbf{M}(\bar{x}^2 \cdot a_2) = \frac{1}{n^3}\mathbf{M}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\right] = \frac{\mu_4 + (n-1)\mu_2^2}{n^2}. \tag{5.3.67}$$

Таким же образом

$$\mathbf{M}\bar{x}^4 = \frac{1}{n^4}\mathbf{M}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^4 = \frac{\mu_4 + 3(n-1)\mu_2^2}{n^3}. \tag{5.3.68}$$

Принимая во внимание (5.3.65), (5.3.66), (5.3.67) и (5.3.68), будем иметь:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}m_2^2 &= \mathbf{M}(a_2^2 - 2a_2\bar{x}^2 + \bar{x}^4) = \mathbf{M}a_2^2 - 2\mathbf{M}(a_2\bar{x}^2) + \mathbf{M}\bar{x}^4 = \\ &= \frac{\mu_4 + (n-1)\mu_2^2}{n} - 2\frac{\mu_4 + (n-1)\mu_2^2}{n^2} + \frac{\mu_4 + 3(n-1)\mu_2^2}{n^3} = \\ &= \mu_2^2 + \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{n} - \frac{2\mu_4 - 5\mu_2^2}{n^2} + \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{n^3}.\end{aligned} \tag{5.3.69}$$

Теперь дисперсия эмпирической дисперсии s^2 может быть получена из соотношений (3.4.7), (5.3.69) и (5.3.60) в следующем виде:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}s^2 = \mathbf{D}m_2 &= \mathbf{M}m_2^2 - (\mathbf{M}m_2)^2 = \mu_2^2 + \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{n} - \frac{2\mu_4 - 5\mu_2^2}{n^2} + \\ &+ \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{n^3} - \left(\frac{n-1}{n}\mu_2\right)^2 = \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{n} - \frac{2(\mu_4 - 2\mu_2^2)}{n^2} + \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{n^3}.\end{aligned} \tag{5.3.70}$$

На основании (5.3.70) приближенным выражением для дисперсии s^2 можно считать следующее:

$$\mathbf{D}s^2 \approx \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{n} \tag{5.3.71}$$

и

$$\sigma_{s^2} \approx \sqrt{\frac{\mu_4 - \mu_2^2}{n}}. \tag{5.3.72}$$

Из (5.3.70) или (5.3.71) следует, что $\mathbf{D}s^2 \to 0$ при $n \to \infty$, а это и означает, что оценка s^2 является состоятельной оценкой σ^2.

Если выборка взята из нормальной генеральной совокупности, то с помощью соотношений (4.3.20) и (4.3.27) мы можем соотношения (5.3.60) и (5.3.70) привести к виду

$$\mathbf{M}s^2 = \mathbf{M}m_2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \approx \sigma^2, \tag{5.3.73}$$

$$\mathbf{D}s^2 = \mathbf{D}m_2 = \frac{3\sigma^4 - \sigma^4}{n} - \frac{2(3\sigma^4 - 2\sigma^4)}{n^2} + \frac{3\sigma^4 - 3\sigma^4}{n^3} = \frac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4 \approx \frac{2\sigma^4}{n} \tag{5.3.74}$$

и

$$\sigma_{s^2} \approx \sqrt{\frac{2}{n}}\sigma^2. \tag{5.3.75}$$

Если хотят оценить дисперсию или среднее квадратическое отклонение величины s^2, то при большом значении величины n, используя метод моментов, заменяют в правой части формул (5.3.71) и (5.3.72) моменты μ_4 и μ_2 величинами m_4 и $m_2 = s^2$. Таким образом, получают:

$$\mathbf{D}s^2 \approx \frac{m_4 - m_2^2}{n} \tag{5.3.76}$$

и

$$\sigma_{s^2} \approx \sqrt{\frac{m_4 - m_2^2}{n}}. \tag{5.3.77}$$

Используя (3.5.7) для среднего квадратического отклонения функции случайной величины, получим из (5.3.77) с помощью (5.3.60) и (5.3.72), рассматривая функцию $s = \sqrt{X}$, где $X = s^2$,

$$\sigma_s = \sigma_{\sqrt{X}} = \left(\frac{1}{2\sqrt{\mathbf{M}s^2}}\right)\sigma_{s^2} \approx \frac{1}{2\sqrt{\sigma^2}}\sigma_{s^2} = \frac{\sqrt{\mu_4 - \mu_2^2}}{2\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\mu_4 - \sigma^4}}{2\sigma\sqrt{n}}. \tag{5.3.78}$$

В случае нормального закона распределения с помощью (4.3.27) из (5.3.78) получаем:

$$\sigma_s \approx \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}. \tag{5.3.79}$$

Из (5.3.78) следует, что s является в общем случае состоятельной, но вообще говоря, смещенной оценкой σ. Если распределение нормально, то это смещение легко учитывается (см. **5.4.2**).

Пример 5.3.8. Пусть по условиям примера 5.2.6 требуется оценить среднее квадратическое отклонение эмпирической дисперсии s^2.

В примере 5.2.6 мы нашли, что

$$m_2 = 94{,}26 \text{ мк}^2, \quad m_4 = 25\,187 \text{ мк}^4 \quad \text{и} \quad n = 200.$$

По формуле (5.3.77) получаем:

$$\sigma_{s^2} \approx \sqrt{\frac{25\,187 - 94{,}26^2}{200}} \approx \sqrt{81{,}5} = 9{,}03 \text{ мк}^2.$$

Для вывода математических ожиданий и дисперсий различных функций от моментов часто приходится применять приближенные формулы, которые мы вывели в § 5 главы III. Рассмотрим для примера коэффициент вариации, который мы определим как частное

$$v = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{m_2}}{\bar{x}}.$$

Примем m_2 и $\bar{x}$ за аргументы, от которых зависит функция v; при этом согласно (5.3.60), (5.3.71) и (5.3.5) мы имеем:

$$\mathbf{M}m_2 \approx \sigma^2, \quad \mathbf{D}m_2 \approx \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{n},$$

$$\mathbf{M}\bar{x} = \nu_1, \qquad \mathbf{D}\bar{x} = \frac{\mu_2}{n}.$$

Кроме того, для математического ожидания произведения $\bar{x} \cdot m_2$ имеет место приближенное равенство

$$\mathbf{M}(\bar{x}\, m_2) \approx \frac{\mu_3}{n}.$$

Согласно (3.5.11)

$$\sigma_v \approx \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial m_2}\right)^2 \mathbf{D}m_2 + 2\mathbf{M}(\bar{x} \cdot m_2)\left(\frac{\partial v}{\partial \bar{x}}\right)_0 \left(\frac{\partial v}{\partial m_2}\right)_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{x}}\right)_0^2 \mathbf{D}\bar{x}}. \quad (5.3.80)$$

При этом частные производные в $(\ )_0$ берутся при значениях аргументов, совпадающих с их средними значениями (μ_2 и ν_1). Но

$$\frac{\partial v}{\partial m_2} = \frac{1}{2\sqrt{m_2}\,\bar{x}}, \quad \frac{\partial v}{\partial \bar{x}} = -\frac{\sqrt{m_2}}{\bar{x}^2},$$

поэтому

$$\left(\frac{\partial v}{\partial m_2}\right)_0 = \frac{1}{2\sqrt{\mu_2}\,\nu_1}, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{x}}\right)_0 = -\frac{\sqrt{\mu_2}}{\nu_1^2}$$

и, наконец,

$$\sigma_v \approx \sqrt{\frac{\nu_1^2(\mu_4 - \mu_2^2) - 4\nu_1\mu_2\mu_3 + 4\mu_2^3}{4\nu_1^4\mu_2 n}}.$$

5.3.5. Применение теоремы Ляпунова при оценке генеральных средней и дисперсии. Выбор числа наблюдений. Рассмотрим теперь применение предельного нормального распределения при оценке генеральной средней $a = \nu_1 = \mathbf{M}X$ и дисперсии $\sigma^2 = \mu_2 = \mathbf{D}X$ по средней арифметической $\bar{x}$ и эмпирической дисперсии $s^2 = m_2$ выборки большого объема. Предположим, например, что мы располагаем выборкой объема n из конечной генеральной совокупности, содержащей N объектов, распределенных по некоторому количественному признаку.

Пусть для определенности среди объектов нет двух с одинаковыми значениями признака. Имея в виду, что на практике отношение $\frac{n}{N}$ бывает чаще всего достаточно мало, мы можем принять для упрощения, что выборка является возвратной. Тогда результатом выборки является n независимых величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$; каждая из этих величин в выборке может получить любое из N возможных значений $x_1, x_2, \ldots, x_N$ с вероятностью $\frac{1}{N}$, так что

$$\mathbf{P}(X_i = x_j) = \frac{1}{N}; \quad i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, N.$$

Мы имеем, таким образом, n экземпляров (независимых и одинаково распределенных) одной и той же величины X, распределенной в нашей совокупности, все N возможных значений x_j которой равновозможны.

Таким образом:

$$MX = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N} = \nu_1 = a,$$

$$\sigma_X^2 = DX = \frac{(x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2 + \ldots + (x_N - a)^2}{N}.$$

Средняя арифметическая

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

и среднее квадратическое отклонение

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{x})^2}$$

являются функциями величин X_i.

Применяя к последовательности величин X_i теорему (4.3.37) Ляпунова, получим, что вероятность неравенства

$$\frac{\bar{x} - a}{\sigma_X / \sqrt{n}} < z_1$$

имеет пределом нормальную функцию распределения

$$N(z_1;\ 0;\ 1) = \frac{1}{2} + \Phi(z_1),$$

где $\Phi(z_1)$ — функция (4.3.30) Лапласа, значения которой приведены в табл. IV приложений.

Мы можем утверждать также [1]), что величина

$$\frac{\bar{x} - a}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

также будет при больших n следовать закону $N(z;\ 0;\ 1)$, так как отношение $\frac{s}{\sigma_X}$ по вероятности стремится к единице при $n \to \infty$ (ввиду того, что σ при этом стремится к нулю, как это видно из (5.3.79)).

Таким образом, для достаточно больших n будем иметь:

$$P\left\{|\bar{x} - a| < z \frac{s}{\sqrt{n}}\right\} \approx 2\Phi(z).$$

При заданной вероятности α (например, $\alpha = 0{,}95$, $\alpha = 0{,}99$ и т. д.) мы можем по таблицам функции $\Phi(z)$ определить z_α так, чтобы $\Phi(z_\alpha) = \alpha$. Тогда с вероятностью α мы можем утверждать, что неизвестный параметр a заключен (при достаточно большом n) в границах

$$\bar{x} - z_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + z_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}}. \qquad (5.3.81)$$

Определим теперь погрешность эмпирического среднего квадратического отклонения s как приближенной оценки для σ_X. Так как независимые величины $(X_1 - a)^2$ $(X_2 - a)^2, \ldots, (X_n - a)^2$ имеют общее математическое ожидание

$$M(X - a)^2 = DX = \sigma_X^2$$

---

[1]) Строгое доказательство можно найти в книге С. Н. Бернштейна, Теория вероятностей, 4-е изд., М. — Л., Гостехиздат, 1946, стр. 301—302.

и равные дисперсии

$$\sigma_2^2 = \mathbf{D}(X-a)^2 = \mathbf{M}(X-a)^4 - [\mathbf{M}(X-a)^2]^2 = \mu_4 - \mu_2^2, \tag{5.3.82}$$

то, полагая $\overline{S}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)^2$ опять-таки на основании теоремы Ляпунова, утверждаем, что вероятность неравенства

$$z_0 < \frac{\overline{S}_n^2 - \sigma_X^2}{\frac{\sigma_2}{\sqrt{n}}} < z_1 \tag{5.3.83}$$

при неограниченном возрастании n имеет пределом

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_0}^{z_1} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \Phi(z_1) - \Phi(z_0). \tag{5.3.84}$$

Другими словами, величина

$$\frac{(\overline{S}_n^2 - \sigma_X^2)\sqrt{n}}{\sigma_2}$$

распределена при большом n приблизительно нормально.

Но на основании соотношений (5.2.10) и (5.2.13), приняв за начало отсчета $c = \nu_1 = a$, мы можем записать:

$$\overline{S}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{x})^2 + (\bar{x}-a)^2 = s^2 + (\bar{x}-a)^2,$$

и потому

$$\sqrt{n}\,(\overline{S}_n^2 - s^2) = \sqrt{n}\,(\bar{x}-a)^2. \tag{5.3.85}$$

С другой стороны, как бы ни было мало ε, вероятность неравенства $\sqrt{n}(\bar{x}-a)^2 > \varepsilon^2$ равносильного неравенству $|\bar{x}-a| > \frac{\varepsilon}{\sqrt[4]{n}}$, с возрастанием x стремится к нулю, так как на основании неравенства (3.7.8) Чебышева

$$\left(|\bar{x}-a| > \frac{\varepsilon}{\sqrt[4]{n}}\right) < \frac{\mathbf{D}\bar{x}\cdot\sqrt{n}}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma_X^2}{\sqrt{n}\,\varepsilon^2} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Таким образом, величина $\sqrt[4]{n}\,|\bar{x}-a|$ и ее квадрат $\sqrt{n}\,(\bar{x}-a)^2$ по вероятности стремятся к нулю, а потому величины $\sqrt{n}\,\overline{S}_n^2$ и $\sqrt{n}\,s^2$ подчиняются асимптотически при большом n одному и тому же закону распределения.

Иначе говоря, вероятность неравенства

$$z_0 < \frac{s^2 - \sigma_x^2}{\frac{\sigma_2}{\sqrt{n}}} < z_1, \tag{5.3.86}$$

так же как в случае (5.3.83), имеет своим пределом

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_0}^{z_1} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Итак, эмпирическая дисперсия s^2 следует нормальному закону с центром в точке σ_X^2 и средним квадратическим отклонением, равным $\sigma_{s^2} = \frac{\sigma_2}{\sqrt{n}}$, что, как видно из (5.3.82), согласуется с оценкой, полученной в (5.3.72).

Заметим, что неравенство (5.3.86) равносильно неравенству

$$z_0 < \frac{s - \sigma_x}{\frac{\sigma_2}{(s+\sigma_x)\sqrt{n}}} < z_1. \tag{5.3.87}$$

Учитывая, что отношение $\frac{s}{\sigma_x}$ стремится по вероятности к единице, мы можем заменить неравенство (5.3.87) неравенством

$$z_0 < \frac{s - \sigma_x}{\frac{\sigma_2}{2\sigma_x\sqrt{n}}} < z_1, \tag{5.3.88}$$

имеющим ту же предельную вероятность.

Этот результат согласуется с (5.3.78).

Таким образом, величина s при большем n следует нормальному закону с центром в точке σ_x и со средним квадратическим отклонением

$$\sigma_s = \frac{\sigma_2}{2\sigma_x\sqrt{n}}. \tag{5.3.89}$$

На практике неизвестное σ_2 может быть заменено его приближенным значением s_2, полученным из (5.3.82) в виде

$$s_2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4}{n} - s^4} \tag{5.3.90}$$

заменой теоретических центральных моментов μ_4 и μ_2 их выборочными оценками m_4 и $m_2 = s^2$.

Аналогично этому σ_x оценивается приближенно величиной s.

При нормальном распределении мы с помощью соотношений (5.3.82), (4.3.20) и (4.3.27) можем записать:

$$\sigma_2 \approx \sqrt{3\sigma^4 - \sigma^4} = \sigma^2\sqrt{2},$$

откуда получается приближенная формула для σ_s, используемая в случае нормального распределения,

$$\sigma_s = \frac{\sigma_2}{2\sigma\sqrt{n}} \approx \frac{\sigma^2\sqrt{2}}{2\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}. \tag{5.3.91}$$

Остановимся теперь на выборе числа n наблюдений, обеспечивающего нужную точность и надежность оценок a с помощью $\bar{x}$ и аналогично σ с помощью s.

Согласно теореме Ляпунова мы имеем:

$$\mathbf{P}\left(-z_\alpha \leqslant \frac{\bar{x} - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < +z_\alpha\right) \approx 2\Phi(z_\alpha) = \alpha.$$

Пусть задана требуемая надежность α и желаемая точность результатов наблюдений, т. е. верхний предел ошибки в определении a по $\bar{x}$, так что мы требуем, чтобы неравенство

$$|\bar{x} - a| < \Delta_a$$

выполнялось с вероятностью, не меньшей α.

По данному α находим z_α из уравнения $2\Phi(z_\alpha) = \alpha$, пользуясь табл. V, VI или VII приложений. Решая относительно n неравенство

$$z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \Delta_a,$$

получим:

$$n \geqslant \frac{z_\alpha^2\sigma^2}{\Delta_a^2} \tag{5.3.92}$$

или

$$n \geqslant \frac{z_\alpha^2}{q_a^2}, \tag{5.3.93}$$

где $q_a = \frac{\Delta_a}{\sigma}$ представляет предельную ошибку оценки a, выраженную в долях σ.

Если величина σ или, по крайней мере, верхняя граница ее известна (например, по предварительной выборке), то с помощью формул (5.3.92) или (5.3.93) легко определить потребное число $n = n_a$ наблюдений, гарантирующее заданную надежность определения величины a.

Иногда задают предельную относительную погрешность $\left|\frac{\Delta_a}{a}\right|$, требуя, например, чтобы она с надежностью α не превышала заданного предела γ. Тогда формулу (5.3.92), разделив числителя и знаменателя на a^2, можно переписать следующим образом:

$$n \geqslant \frac{z_\alpha^2 v_X^2}{\gamma^2}, \tag{5.3.94}$$

где $v_X = \frac{\sigma}{a}$ представляет коэффициент вариации.

Аналогичным образом из формул (5.3.88) и (5.3.91) получаем:

$$\mathbf{P}\left(-z_\alpha < \frac{s-\sigma}{\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}} < +z_\alpha\right) = 2\Phi(z_\alpha) = \alpha$$

и

$$n \geqslant \frac{z_\alpha^2 \sigma^2}{2\Delta_\sigma^2}, \tag{5.3.95}$$

или

$$n = n_\sigma \geqslant \frac{z_\alpha^2}{2q_\sigma^2}, \tag{5.3.96}$$

где $q_\sigma = \frac{\Delta_\sigma}{\sigma}$ представляет предельную ошибку оценки σ, выраженную в долях от самого же σ.

Само собой разумеется, что α, Δ и q выбираются исходя из конкретных требований, предъявляемых к предполагаемым наблюдениям; в математической статистике не рассматриваются какие бы то ни было рекомендации по их выбору.

Пример 5.3.9. Пусть требуется определить числа n_a и n_σ наблюдений, если задано $\alpha = 0{,}95$ и $q_a = q_\sigma = 0{,}2$.

По табл. V приложений находим $z_\alpha = 1{,}96$.

По соотношениям (5.3.93) и (5.3.96) находим:

$$n_a \geqslant \frac{1{,}96^2}{0{,}2^2} = 96 \quad \text{и} \quad n_\sigma \geqslant \frac{1{,}96^2}{2 \cdot 0{,}2^2} = 48.$$

Пример 5.3.10. По данным примера 5.2.2 требуется произвести оценку первых четырех теоретических моментов распределения с помощью метода моментов.

Пользуясь вычислениями, проделанными в примере 5.2.6, на основании соотношения (5.3.58) находим:

$$\begin{aligned}
\nu_1 \approx \bar{x} &= 4{,}3 \ мк, \\
\mu_2 \approx m_2 &= 94{,}26 \ мк^2, \\
\mu_3 \approx m_3 &= -113{,}59 \ мк^3, \\
\mu_4 \approx m_4 &= 25\,187 \ мк^4, \\
\sqrt{\mu_2} \approx \sqrt{m_2} &= s = 9{,}71 \ мк.
\end{aligned}$$

По соотношениям (5.3.61), (5.3.63) и (5.3.64) находим несмещенные оценки второго, третьего и четвертого центральных теоретических моментов:

$$\overline{s^2} = \frac{200}{200-1} \cdot 94{,}26 = 94{,}73 \ мк^2,$$

$$\overline{m}_3 = \frac{200^2}{199 \cdot 198}(-113{,}59) = -115{,}31 \ мк^3,$$

$$\overline{m}_4 = \frac{200\,(200^2 - 2 \cdot 200 + 3)}{199 \cdot 198 \cdot 197} \cdot 25\,187 - \frac{3 \cdot 200\,(2 \cdot 200 - 3)}{199 \cdot 198 \cdot 197} \cdot (-113{,}59)^2 = 25\,305 \ мк^4;$$

$$s = 9{,}73 \ мк.$$

Из этих данных видно, что при объеме выборки $n = 200$ несмещенные оценки больше соответствующих эмпирических моментов:

а) второго порядка на 0,5%,

б) третьего порядка на 1,5%,

в) четвертого порядка на 0,5%,

г) среднего квадратического отклонения на 0,2%.

Определим теперь точность полученных оценок. Зададимся надежностью, например, в 99%.

Тогда из соотношения (5.3.84) получим:

$$\Phi(+z_1) - \Phi(-z_1) = 2\Phi(z_1) = 0{,}99.$$

По табл. V приложений находим:

$$z_1 = 2{,}58.$$

По (5.3.81) определяем:

$$-2{,}58\frac{9{,}73}{\sqrt{200}} < 4{,}3 - \nu_1 < +2{,}58 \cdot \frac{9{,}73}{\sqrt{200}},$$

$$-1{,}8 < 4{,}3 - \nu_1 < +1{,}8.$$

Таким образом,

$$\nu_1 \approx 4{,}3 \pm 1{,}8 \ мк.$$

Точно таким же образом, при той же надежности в 99%, по соотношениям (5.3.88) и (5.3.90) находим:

$$s_2 = \sqrt{25\,187 - 9{,}71^4} = \sqrt{16\,298} = 127{,}7,$$

$$\sigma_s = \frac{127{,}7}{2 \cdot 9{,}71\sqrt{200}} = 0{,}46 \ мк;$$

$$-\frac{2{,}58 \cdot 127{,}7}{2 \cdot 9{,}71\sqrt{200}} < 9{,}71 - \sigma_x < +\frac{2{,}58 \cdot 127{,}7}{2 \cdot 9{,}71\sqrt{200}},$$

$$-1{,}20 < 9{,}71 - \sigma_x < +1{,}20,$$

откуда

$$\sigma_x = 9{,}71 \pm 1{,}20 \ мк.$$

Если бы выборка была взята из заведомо нормальной совокупности, то мы имели бы из соотношения (5.3.91)

$$\sigma_s = \frac{9{,}71}{\sqrt{2 \cdot 200}} = 0{,}486 \ мк, \quad 2{,}58\sigma_s = 2{,}58 \cdot 0{,}486 = 1{,}25 \ мк$$

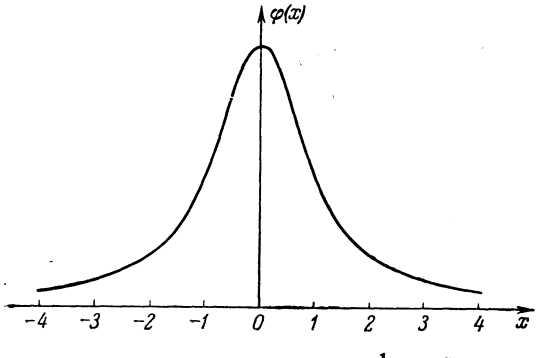
и

$$\sigma_x = 9{,}71 \pm 1{,}25.$$

При сопоставлении результатов вычисления по формулам (5.3.90) и (5.3.91) следует учитывать, что при отсутствии сведений о действительном законе распре-

деления точность оценок мы определяем лишь приближенно. Этим и объясняется тот факт, что при одинаковой надежности (0,99) мы при более полной информации о законе распределения получим несколько меньшую точность оценки σ_X.

5.3.6. Общие понятия о порядковых (ранговых) характеристиках. Задача оценки параметров распределения допускает различные решения. Мы видели уже, как можно решить эту задачу, использовав моменты эмпирического (выборочного) распределения. Однако применение моментов для оценки параметров может оказаться не всегда удобным и выгодным с точки зрения точности и надежности оценки. Получение моментов (особенно высших порядков) связано с довольно большим вычислительным трудом, который отнимает значительное время; в некоторых же вопросах (например, текущего статистического контроля) весьма существенно найти более простые, быстро получаемые характеристики положения центра рассеивания и т. д. С другой стороны, сколько-нибудь надежная оценка моментов высших порядков, например, третьего и четвертого порядка, не говоря уже о более высоких, требует настолько значительного объема наблюдений, которым мы на практике располагаем в редких случаях. К тому же, теоретически рассуждая, мы убеждаемся, что далеко не всякое распределение обладает моментами: в качестве примера распределения, которое не имеет совсем моментов целых порядков, ν_s при $s \geqslant 1$ может быть приведено распределение Коши. Кривая распределения этого закона, задаваемого плотностью



Черт. 65. Закон Коши $\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{x^2 + a^2}$.

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{x^2 + a^2}, \qquad (5.3.97)$$

настолько медленно приближается к оси x, когда $|x| \to \infty$, что интегралы, выражающие моменты, не имеют определенного смысла (черт. 65). Все эти соображения заставляют часто искать других путей для решения задачи параметризации. Один из этих путей заключается в применении *порядковых (ранговых) характеристик*.

Пусть мы имеем случайную величину X, непрерывно распределенную с плотностью вероятности $\varphi(x)$, представляющей также непрерывную функцию x, и с интегральным законом

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)\, dx.$$

Функция $F(x)$, как мы видели в **3.1.2**, представляет монотонно неубывающую функцию, изменяющуюся от 0 до 1, когда x пробегает весь промежуток изменения величины X. Если $F(x)$ или $\varphi(x)$ зависит от параметров, то знание надлежащего числа квантилей (см. **3.1.2**) можно использовать для определения этих параметров точно так же, как ранее были использованы для этой цели моменты. Квантиль, отвечающий уровню вероятности p, мы будем обозначать ξ_p. Мы оставим в стороне те, практически не имеющие большого значения случаи, когда квантиль ξ_p для данного p остается неопределенным; для того чтобы избегнуть таких случаев, достаточно предположить, что плотность вероятности $\varphi(x)$ не обращается в нуль внутри интервала изменения величины X; функция $F(x)$ будет тогда строго возрастающей, а уравнение $F(x) = p$ будет иметь только один корень. Например, в случае нормального распределения

положение медианы определяет центр рассеивания, половина разности между верхней и нижней квартилями

$$L = \frac{\xi_{3/4} - \xi_{1/4}}{2}, \tag{5.3.98}$$

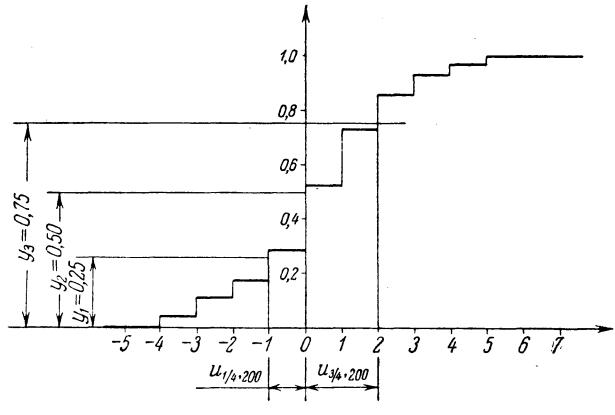
называемая *интерквартильной широтой*, связана с характеристикой рассеивания σ нормального распределения и т. д. Таким образом, для решения задачи параметризации достаточно в большинстве случаев хотя бы с некоторым приближением оценить по данным выборки определенное число неизвестных квантилей теоретического распределения. Для этой цели используется «*упорядоченная выборка*» или «*вариационный ряд*», о котором мы говорили в § 2 настоящей главы.

Пусть мы расположим выборочные значения величины X в порядке возрастания, образовав вариационный ряд

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n.$$

При непрерывном распределении величины X мы можем пренебречь случаями совпадения нескольких значений случайной величины в выборке, так как этот факт будет иметь нулевую вероятность.

Рассмотрим график эмпирической функции распределения $\overline{F}_n(x)$, построенный по данному вариационному ряду. Как уже указывалось в **5.1.2**, график этой функции изобразится ступенчатой или лестничной кривой; в каждой точке x_i функция $\overline{F}_n(x)$ испытывает скачок, переходя от значения $\frac{i-1}{n}$ в ближайшем участке слева от x_i к значению $\frac{i}{n}$ справа от x_i.



Черт. 66. Нижний $u_{1/4,\,200}$ и верхний $u_{3/4,\,200}$ квартили эмпирического распределения совокупности объема $n = 200$ штук.

Пусть p будет числом, лежащим между 0 и 1. Проводим прямую $y = p$, параллельную оси x. Если p не есть дробь вида $\frac{s}{n}$ ($s = 1, 2, \ldots, n$), то np — не целое число и потому прямая $y = p$ пересечет кривую $\overline{F}_n(x)$ только в одной точке, лежащей на одной из вертикальных ступеней кривой. Абсцисса этой точки будет равна некоторому члену вариационного ряда x_s — он и будет p-квантилем $u_{p,\,n}$ эмпирического распределения (черт. 66).

Номер s этого члена удовлетворяет неравенству

$$\frac{s-1}{n} < p < \frac{s}{n}, \tag{5.3.99}$$

откуда легко вывести, что s должно быть на единицу больше, чем наибольшее целое число, содержащееся в np; обозначая его через $[np]$, будем иметь:

$$s = [np] + 1; \tag{5.3.100}$$

например, если $p = \frac{1}{2}$ и $n = 385$, то

$$s = \left[\frac{385}{2}\right] + 1 = [192{,}5] + 1 = 193;$$

x_{193} будет медианой данного вариационного ряда.

Будем обозначать эмпирический квантиль, отвечающий p, через $u_{p,\,n}$, полагая, следовательно, $u_{p,\,n} = x_{[np]+1}$. Мы исключим из рассмотрения как не имеющий большого практического значения случай, когда np — целое число, в этом случае p-квантиль в выборке не является вполне определенным.

Пример 5.3.11. Пусть требуется определить квартили вариационного ряда, приведенного в примере 5.2.1.

С помощью (5.3.100) найдем порядковые номера верхнего и нижнего квартилей:

$$s_{3/4} = \left[20 \cdot \frac{3}{4}\right] + 1 = 16,$$

$$s_{1/4} = \left[20 \cdot \frac{1}{4}\right] + 1 = 6.$$

Таким образом, для данного вариационного ряда верхним и нижним квартилями будут:

$$u_{\frac{3}{4},\,20} = 32{,}61 \text{ мм} \quad \text{и} \quad u_{\frac{1}{4},\,20} = 32{,}25 \text{ мм}.$$

5.3.7. Распределение членов вариационного ряда. Для того чтобы выяснить вопрос о том, можно ли выборочные квантили рассматривать как надежное приближение к теоретическим квантилям и оценить точность и надежность этого приближения при данном объеме выборки, мы должны найти сначала распределение вероятностей для членов вариационного ряда. Начнем этот вывод с частного случая, предполагая, что величина Y равномерно распределена на отрезке (0, 1) так, что

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(y) = 0 \quad \text{для} \quad y < 0 \quad \text{и} \quad y > 1, \\ &\varphi(y) = 1 \quad \text{для} \quad 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{aligned}\right\} \tag{5.3.101}$$

и потому из (3.1.12) имеем:

$$\left.\begin{aligned} &F(y) = 0 \quad \text{для} \quad y < 0, \\ &F(y) = y \quad \text{для} \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ &F(y) = 1 \quad \text{для} \quad y > 1. \end{aligned}\right\} \tag{5.3.102}$$

Пусть произведено n независимых наблюдений; рассмотрим k-й по величине член вариационного ряда y_k. Обозначим через $\omega_{k,\,n}(y)$ плотность распределения этого члена. Тогда $\omega_{k,\,n}(y)\,dy$ представляет вероятность попадания в дифференциальный промежуток $(y,\ y+dy)$ с точностью до бесконечно малых высшего порядка относительно dy.

Очевидно, $\omega_{k,\,n}(y) = 0$ для $y < 0$ и $y > 1$.

Если же y лежит в отрезке от 0 до 1, то вероятность $\omega_{k,\,n}(y)\,dy$ можно получить следующим рассуждением.

Для того чтобы k-й по величине член выборки находился в промежутке от y до $y+dy$ $(0 \leqslant y \leqslant 1)$, необходимо и достаточно, чтобы, во-первых, одно из n наблюденных значений расположилось в этом промежутке и, во-вторых, чтобы ровно $k-1$ из прочих $n-1$ наблюдений попало в промежуток $(0, y)$ так, что в то же время ровно $n-k$ остальных наблюдений разместилось между $y+dy$ и 1.

Подсчитаем сначала вероятность одного варианта расположения n наблюдений, удовлетворяющего этим трем условиям. Вероятность того, что при первом из n наблюдений мы получим значение, лежащее между y и $y+dy$, равна dy — длине интервала — ввиду равномерного распределения величины Y при широте распределения, равной 1. Вероятность того, что $k-1$ следующих наблюдений разместится между 0 и y, будет в силу независимости наблюдений на основании (2.2.22) равна y^{k-1}, так как вероятность попадания в интервал $(0, y)$ одного из этих наблюдений равна $F(y) = y$. Наконец, вероятность того, что $n-k$ остальных наблюдений займут положение в промежутке от $y+dy$ до 1, будет

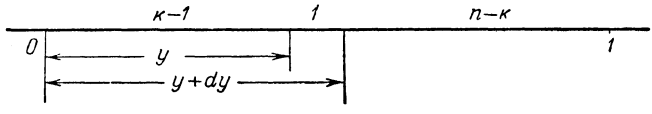
на основании (2.2.10) и (2.2.22) равна $(1-y-dy)^{n-k}$ (черт. 67). Таким образом, вероятность одного варианта интересующего нас расположения n наблюдений будет равна

$$y^{k-1}(1-y-dy)^{n-k}dy =$$
$$= y^{k-1}(1-y)^{n-k}dy + (n-k)\,y^{k-1}(1-y)^{n-k-1}(-1)(dy)^2 + \ldots$$
$$\ldots + y^{k-1}(-1)^{n-k}(dy)^{n-k+1}.$$

Отбрасывая члены второго и высших порядков малости, мы найдем для интересующей нас вероятности приближенное выражение

$$y^{k-1}(1-y)^{n-k}dy.$$

Но, очевидно, ввиду равноправия отдельных наблюдений мы будем иметь такую же вероятность любого из возможных вариантов, отличающихся друг от



Черт. 67. Распределение по числовой оси членов вариационного ряда, если величина Y равномерно распределена на отрезке (0; 1).

друга только порядком расположения наблюдений, в котором получаются группы наблюдений, попадающие в последовательные интервалы $(0, y)$, $(y, y+dy)$ и $(y+dy, 1)$ и состоящие соответственно из $k-1$, одного и $n-k$ наблюдений. Число этих вариантов равно числу способов, какими n элементов можно подразделить на три группы из $k-1$, одного и $n-k$ наблюдений. Это число мы можем подсчитать следующим образом.

Пусть требуется подразделить n элементов на три группы по m_1, m_2 и m_3 элементов в каждой, так что

$$m_1 + m_2 + m_3 = n.$$

Мы можем эту операцию провести последовательно: подразделим сначала n на две группы из m_1 и (m_2+m_3) элементов; это можно сделать $C_n^{m_1} = C_n^{m_2+m_3}$ способами; затем мы подразделим каждую группу из (m_2+m_3) элементов опять-таки на две по m_2 и m_3 в каждой, что возможно в свою очередь произвести $C_{m_2+m_3}^{m_2} = C_{m_2+m_3}^{m_3}$ способами.

В результате мы получим всего различных комбинаций групп по m_1, m_2 и m_3 элементов

$$P_{m_1,\,m_2,\,m_3} = C_n^{m_1} C_{m_2+m_3}^{m_2} = \frac{n!}{m_1!\,(n-m_1)!} \cdot \frac{(m_2+m_3)!}{m_2!\,m_3!}. \qquad (5.3.103)$$

Так как $a - m_1 = m_2 + m_3$, то (5.3.103) можно переписать так:

$$P_{m_1,\,m_2,\,m_3} = \frac{n!}{m_1!\,m_2!\,m_3!}. \qquad (5.3.104)$$

Очевидно, что тот же способ рассуждения применим при любом числе групп.

Число способов подразделения n элементов на k групп соответственно по $m_1, m_2, \ldots, m_k$ элементов будет равно

$$P_{m_1,\,m_2,\,\ldots,\,m_k} = \frac{n!}{m_1!\,m_2!\ldots m_k!} = \bar{P}_n^{m_1,\,m_2,\,\ldots,\,m_k}, \qquad (5.3.105)$$

где $\bar{P}_n^{m_1,\,m_2,\,\ldots,\,m_k}$ — число перестановок с повторениями из n экземпляров k различных элементов, из которых элемент a_1 содержится в количестве m_1 экземпляров, элемент a_2 — m_2 экземпляров, ..., элемент a_k — m_k экземпляров.

Возвращаясь к числу вариантов возможных результатов наблюдений, мы согласно формуле (5.3.105) получим:

$$\frac{n!}{(k-1)!\,1!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}.$$

Вероятность расположения k-го члена вариационного ряда в интервале от y до $y+dy$ будет, следовательно, с точностью до членов высшего порядка малости относительно dy равна

$$\omega_{k,n}(y)\,dy = nC_{n-1}^{k-1} y^{k-1}(1-y)^{n-k}\,dy. \tag{5.3.106}$$

Отсюда для интегральной функции распределения будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} &\Omega_{k,n}(y) = \mathbf{P}(Y_k < y) = nC_{n-1}^{k-1}\int_0^y y^{k-1}(1-y)^{n-k}\,dy; \text{ при } 0 \leqslant y \leqslant 1;\\ &\Omega_{k,n}(y) = 0 \quad \text{при} \quad y < 0;\\ &\Omega_{k,n}(y) = 1 \quad \text{при} \quad y > 1. \end{aligned}\right\} \tag{5.3.107}$$

Распределение $\Omega_{k,n}(y)$ принадлежит к типу B-распределений (бэта-распределений), задаваемых функцией вида

$$\frac{1}{\mathrm{B}(a,\,b)}\int_0^y y^{a-1}(1-y)^{b-1}\,dy = I_y(a,\,b), \qquad 0 \leqslant y \leqslant 1 \tag{5.3.108}$$

(см. **4.5.2**). При этом

$$\Omega_{k,n}(y) = I_y(k,\; n-k+1). \tag{5.3.109}$$

Отметим еще некоторые частные случаи.

Для наименьшего члена из формулы (5.3.107) имеем:

$$\Omega_{1,n}(y) = \int_0^y n(1-y)^{n-1}\,dy = -(1-y)^n\Big|_0^y = 1-(1-y)^n. \tag{5.3.110}$$

Этот результат можно получить и непосредственно замечая, что для выполнения неравенства $Y_1 > y$ нужно, чтобы все наблюдения были больше y, вероятность чего равна $(1-y)^n$ и $\mathbf{P}(Y_1 < y)$ имеет потому значение (5.3.110).

Для наибольшего члена из формулы (5.3.107) следует:

$$\Omega_{n,n}(y) = \mathbf{P}(Y_n < y) = \int_0^y n \cdot y^{n-1}\,dy = y^n. \tag{5.3.111}$$

Это также может быть получено непосредственно из (5.3.105), так как для выполнения неравенства $Y_n < y$ необходимо, чтобы все наблюдения были меньше y. Но это равносильно совместному наступлению n независимых событий $Y_k < y$, каждое из которых согласно (5.3.109) имеет вероятность $\mathbf{P}(Y_k < y) = F(y) = y$ и потому на основании (2.2.22) мы получаем (5.3.111).

Докажем теперь одно вспомогательное предложение, позволяющее свести общий случай к рассмотренному случаю.

Лемма. *Если величина X подчиняется непрерывному закону $F(x)$, то распределение случайной величины $Y = F(X)$ является равномерным в интервале* (0, 1).

В самом деле, пусть $F_1(y) = \mathbf{P}(Y < y)$.

Для $y < 0$ будем иметь $F_1(y) = 0$, так как величина $Y = F(X)$ не может принимать отрицательные значения. С другой стороны, по свойству функции $F(x)$ величина Y всегда не больше единицы и потому $F_1(y) = 1$ для $y \geqslant 1$.

Предположим для простоты, что функция $F(X)$ является строго возрастающей. Тогда очевидно для всякого промежутка (y_1, y_2), где $0 < y_1 < y_2 \leqslant 1$, неравенство $y_1 \leqslant Y = F(X) \leqslant y_2$ равносильно неравенству $x_1 \leqslant X \leqslant x_2$ (где $F(x_1) = y_1$ и $F(x_2) = y_2$), вероятность которого равна

$$\mathbf{P}(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = y_2 - y_1,$$

с другой стороны,

$$\mathbf{P}(y_1 < Y < y_2) = F_1(y_2) - F_1(y_1).$$

Следовательно,

$$F_1(y_2) - F_1(y_1) = y_2 - y_1.$$

Полагая $y_1 = 0$ и $y_2 = 1$, получим:

$$F_1(y) = y \quad \text{при} \quad 0 \leqslant y \leqslant 1.$$

Это и доказывает нашу лемму в данном случае. Можно доказать также ее справедливость в общем случае при любой интегральной функции $F(x)$.

Таким образом, путем указанной трансформации мы переходим от величины X, распределенной практически по любому непрерывному закону $F(x)$, к величине $Y = F(X)$, имеющей стандартное распределение весьма простого типа; этот прием часто используется в различных задачах математической статистики.

Примененное нами преобразование величины X непрерывно и монотонно; оно не меняет порядковых соотношений между соответствующими значениями величин X и Y, что особенно важно в тех случаях, где существенно лишь взаимное расположение наблюденных значений в выборке.

Пусть теперь

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \tag{5.3.112}$$

— вариационный ряд величины X с непрерывным законом $F(X)$. Введем вспомогательную величину $Y = F(X)$. При $X = x_k$ $Y = y_k$; таким образом, мы будем наряду с вариационным рядом (5.3.112) иметь вариационный ряд

$$y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_n \tag{5.3.113}$$

для величины Y, всегда равномерно распределенной.

Покажем теперь, как будет выражаться закон распределения k-го члена вариационного ряда любой непрерывной случайной величины X. Пусть $F(x)$ — непрерывная функция распределения величины X. Ввиду монотонности $F(x)$ неравенства

$$x_k < x \quad \text{и} \quad F(x_k) < F(x)$$

эквивалентны и потому

$$\mathbf{P}(x_k < x) = \mathbf{P}[F(x_k) < F(x)] = \mathbf{P}[y_k < y = F(x)].$$

Но для последней вероятности согласно лемме справедлива формула (5.3.107), так что

$$\mathbf{P}(x_k < x) = \Omega_{k,n}[F(x)] = \int_0^{F(x)} \omega_{k,n}(y)\,dy =$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \int_0^{F(x)} y^{k-1}(1-y)^{n-k}\,dy. \tag{5.3.114}$$

В частности, для распределения крайних членов мы, пользуясь (5.3.110) и (5.3.111), будем иметь

$$\mathbf{P}(x_1 < x) = 1 - [1 - F(x)]^n, \tag{5.3.115}$$

$$\mathbf{P}(x_n < x) = [F(x)]^n. \tag{5.3.116}$$

Предположим, что n — нечетное число. Медиана m_e совпадает в этом случае с $\left(\frac{n+1}{2}\right)$-м членом вариационного ряда.

Поэтому

$$\mathbf{P}(m_e < x) = \Omega_{\frac{n+1}{2}, n}[F(x)] = \frac{n!}{\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)\right]!^2} \int_0^{F(x)} [y(1-y)]^{\frac{n-1}{2}} dy. \tag{5.3.117}$$

Аналогичным образом выразятся функции распределения квартилей, децилей и т. п.

5.3.8. Предельные распределения квантилей выборки. Опираясь на полученные нами законы распределения членов вариационного ряда, можно показать, что квантили, полученные из эмпирического распределения, действительно представляют по крайней мере состоятельные оценки соответствующих квантилей неизвестного закона распределения. Для этой цели устанавливают прежде всего, что распределение эмпирических квантилей при всяком p $(0 < p < 1)$ для больших n будет близко к нормальному с центром ξ_p и бесконечно малой дисперсией. Отсюда будет следовать, что эмпирический квантиль $u_{p,n} = x_{[np]+1}$ по вероятности сходится к теоретическому квантилю ξ_p. Соответствующее предложение формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема. *Пусть плотность* $\varphi(x)$ *величины* X *непрерывна и отлична от нуля в точке* ξ_p $(F(\xi_p) = p)$.

Тогда для любого t *при* $n \to \infty$ *имеем*:

$$\mathbf{P}_n(t) = \mathbf{P}\left(u_{pn} < \xi_p + t\frac{\sigma_p}{\sqrt{n}}\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = N(t;\ 0,\ 1), \tag{5.3.118}$$

где

$$\sigma_p = \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\varphi(\xi_p)}.$$

Мы не будем приводить доказательства этой теоремы.

Заметим только, что для случая равномерного распределения в отрезке $(0, 1)$

$$\Phi(\xi_p) = 1 \quad \text{и} \quad \sigma_p = \sqrt{p(1-p)}.$$

Эта теорема вытекает из асимптотической формулы для бэта-распределения, которому, как мы видели, следует величина u_p. В самом деле, применяя сначала (5.3.109), найдем:

$$\mathbf{P}_n(t) = \mathbf{P}\left(u_{pn} < \xi_p + t\frac{\sigma_p}{\sqrt{n}}\right) = \Omega_{[np]+1}\left(\xi_p + t\frac{\sigma_p}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= I_{\xi_p + t\frac{\sigma_p}{\sqrt{n}}}([np]+1,\ n-[np]). \tag{5.3.119}$$

Так как оба аргумента: $a = [np]+1$ и $b = n - [np]$ неполной бэта-функции велики при большом числе n, то мы будем иметь:

$$\nu_1 = \frac{a}{a+b} = \frac{[np]+1}{n+1} \approx p,$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{a \cdot b}{(a+b)^3}} \approx \sqrt{\frac{([np]+1)(n-[np])}{(n+1)^3}} \approx \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \frac{\sigma_p}{\sqrt{n}}.$$

Учитывая теперь, что, как мы видели в **4.5.2**, при возрастании a и b $I_k(a, b)$ устремляется к $N(z; 0, 1)$, с указанными значениями ν_1, σ и $z = t$ найдем:

$$I_{\xi_p + t\frac{\sigma p}{\sqrt{n}}}([np] + 1, n - [np]) \approx N(t; 0, 1).$$

Следовательно, для больших n имеем:

$$\mathbf{P}_n(t) = \mathbf{P}\left(u_{pn} < \xi_p + t\frac{\sigma_p}{\sqrt{n}}\right) \approx N(t; 0; 1) = \frac{1}{2} + \Phi(t).$$

Эту теорему можно использовать для различных оценок.

Отметим некоторые приложения этой теоремы. Если объем выборки представляет нечетное число n, то, как видно из (5.3.100), эмпирическая медиана m_e будет совпадать с членом $x_{\frac{n+1}{2}}$ вариационного ряда.

Этот член при большом n будет приближенно оценивать теоретическую медиану $M_e X = \xi_{1/2}$, при этом $x_{\frac{n+1}{2}}$ можно считать распределенным нормально с центром $M_e X$ и дисперсией

$$\sigma_{u_{1/2}} = \frac{\sigma_{1/2}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}{\varphi(\xi_{1/2})\sqrt{n}} = \frac{1}{2\varphi(\xi_{1/2})\sqrt{n}}. \tag{5.3.120}$$

Если распределение величины X нормально, медиана $\xi_{1/2}$ совпадает с центром $\xi_{1/2} = a$ и из (4.3.1)

$$\varphi(\xi_{1/2}) = \varphi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}.$$

Поэтому

$$\frac{\sigma_{1/2}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{2\pi}\,\sigma}{2\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}2533\frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \tag{5.3.121}$$

Как уже было видно из (5.3.10), средняя арифметическая $\bar{x}$ из тех же n наблюдений имеет теоретическое среднее квадратическое отклонение, равное $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, т. е. меньшее в 1,2533 раза, чем эмпирическая медиана m_e. Чтобы достигнуть той же точности оценки с помощью медианы, какую обеспечивает средняя арифметическая, следует увеличить число наблюдений в $\frac{\pi}{2} = 1{,}57$ раза. То же самое положение формулируют еще иначе, говоря, что эффективность медианы составляет только $\frac{2}{\pi}\,100\% = 64\%$ от эффективности средней арифметической. Однако при законах распределения, отличающихся от нормального, эффективность медианы может оказаться почти равной или даже большей эффективности средней арифметической. Так, для *показательного закона распределения* вида

$$\varphi(x) = \frac{1}{\alpha}e^{-\frac{x}{\alpha}}, \tag{5.3.122}$$

которому подчиняется, например, длительность промежутков между двумя последовательными наступлениями события в схеме, приводящей к закону Пуассона

(см. **2.4.3** и **4.2.3**), мы будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{M}X &= \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\frac{x}{\alpha}} x\,dx = \alpha\int_0^\infty e^{-t}t\,dt = \alpha\Gamma(2) = \alpha, \\ \mathbf{M}X^2 &= \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\frac{x}{\alpha}} x^2\,dx = \alpha^2\int_0^\infty e^{-t}t^2\,dt = \alpha^2\Gamma(3) = 2\alpha^2, \end{aligned}\right\} \tag{5.3.123}$$

$$\mathbf{D}X = \sigma_X^2 = 2\alpha^2 - \alpha^2 = \alpha^2, \tag{5.3.124}$$

$$\sigma_X = \alpha. \tag{5.3.125}$$

Поэтому среднее квадратическое отклонение средней из наблюдений равно

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\alpha}{\sqrt{n}}. \tag{.3.126}$$

С другой стороны, теоретическая медиана получится, если мы определим согласно (3.3.8) величину $\xi_{1/2}$ из уравнения

$$F_X(\xi_{1/2}) = \frac{1}{2}, \tag{5.3.127}$$

но

$$F_X(x) = \frac{1}{\alpha}\int_0^x e^{-\frac{x}{\alpha}}\,dx = 1 - e^{-\frac{x}{\alpha}}, \tag{5.3.128}$$

и поэтому будем иметь:

$$e^{-\frac{\xi_{1/2}}{\alpha}} = \frac{1}{2},$$

откуда

$$\xi_{1/2} = \alpha \ln 2 \quad \text{и} \quad \varphi(\xi_{1/2}) = \frac{1}{\alpha}e^{-\frac{\xi_{1/2}}{\alpha}} = \frac{1}{2\alpha},$$

следовательно, согласно (5.3.120) будем иметь:

$$\sigma_{m_e} = \frac{1}{2\varphi(\xi_{1/2})\sqrt{n}} = \frac{\alpha}{\sqrt{n}} = \sigma_{\bar{x}}. \tag{5.3.129}$$

Мы видим, что *в данном случае* средняя арифметическая и медиана одинаково эффективны.

Различные квантили не представляют независимых между собой характеристик: можно показать, например, что при большом n два квантиля $u_{p_1, n}$ и $u_{p_2, n}$ следует приближенно считать распределенными по нормальному двумерному закону с центрами в точках ξ_{p_1} и ξ_{p_2} и центральными моментами второго порядка

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{D}u_{p_1} &\approx \frac{p_1(1-p_1)}{n\varphi^2(\xi_{p_1})}, \\ \operatorname{cov}(u_{p_1, n},\ u_{p_2, n}) &\approx \frac{p_1(1-p_2)}{n\varphi(\xi_{p_1})\varphi(\xi_{p_2})}, \\ \mathbf{D}u_{p_2} &\approx \frac{p_2(1-p_2)}{n\varphi^2(\xi_{p_2})}. \end{aligned}\right\} \tag{5.3.130}$$

Равенство (5.3.130) показывает, что нормированные уклонения

$$\frac{u_{p_1, n} - \xi_{p_1}}{\sqrt{\mathbf{D}\xi_{p_1}}} \quad \text{и} \quad \frac{u_{p_2, n} - \xi_{p_2}}{\sqrt{\mathbf{D}\xi_{p_2}}}$$

связаны между собой. Коэффициент корреляции между ними с ростом n приближается к пределу

$$r_{p_1 p_2} = \sqrt{\frac{p_1(1-p_2)}{(1-p_1)p_2}}.$$

В качестве примера характеристики, построенной с помощью двух квантилей, можно привести эмпирическую «интерквартильную широту» l, определяемую аналогично соотношению (5.3.98) в виде

$$l = \frac{1}{2}(u_{3/4,\,n} - u_{1/4,\,n}). \tag{5.3.131}$$

Эта величина служит так же, как и эмпирическая дисперсия, мерой рассеивания данного эмпирического распределения; она приближенно оценивает половину длины интервала, заключающегося между $\xi_{3/4}$ и $\xi_{1/4}$, т. е. теоретическую интерквартильную широту L, определяемую соотношением (5.3.98), вероятность попадания в которой равна 0,5. Поэтому показатель l часто называют также «*вероятным отклонением*». В случае нормального распределения математическое ожидание $\mathbf{M}l$, т. е. центр рассеивания этой величины, имеет значение, равное

$$\mathbf{M}l = 0{,}6745\sigma, \tag{5.3.132}$$

а среднее квадратическое отклонение величины l равно

$$\sigma_l = 0{,}7867\frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \tag{5.3.133}$$

Пусть, например, требуется определить объем n выборки, необходимый для оценки по медиане параметра $a = \nu_1$, т. е. генеральной средней нормальной совокупности, с ошибкой не более 20% от среднего квадратического отклонения σ при надежности 0,95, т. е. при вероятности одностороннего отклонения эмпирической медианы от теоретической, равной 0,975.

С помощью (5.3.118) находим:

$$\mathbf{P}\left(u_{1/2,\,n} < \xi_{1/2} + t\frac{\sigma_p}{\sqrt{n}}\right) = 0{,}975 = \frac{1}{2} + \Phi(t).$$

По табл. IV приложений получаем $t = 1{,}96$. Но по условию данного примера $t\frac{\sigma_p}{\sqrt{n}} = 0{,}2\sigma$ или с учетом (5.3.121)

$$t\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0{,}2\sigma,$$

откуда

$$n = \frac{t^2\pi}{2\cdot 0{,}2^2} = \frac{1{,}96^2\pi}{0{,}2^2\cdot 2} = 3{,}84\cdot 3{,}14\cdot 25\cdot\frac{1}{2} = 151.$$

Сравнивая это с результатом, полученным в примере 5.3.9, убеждаемся, что для оценки генеральной средней по медиане требуется в 1,57 раза больше наблюдений, чем при оценке ее по средней арифметической с той же точностью и надежностью.

Пример 5.3.12. Пусть требуется по данным примера 5.2.2 оценить теоретическую интерквартильную широту L с надежностью в 0,95. Для нахождения эмпирических верхнего $u_{3/4,\,200}$ и нижнего $u_{1/4,\,200}$ квартилей составляем по протоколу измерения деталей примера 5.2.2 вариационный ряд (табл. 5.3.2).

Таблица 5.3.2

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	—20,0	—18,0	—17,5	—17,0	—15,5	—15,0	—15,0	—14,0	—13,5	—13,0	—12,5	—12,0	—11,5	—11,5	—11,5	—11,0	—10,5	—10,0	—9,5	—9,0
№ п/п	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
	—9,0	—9,0	—8,5	—8,0	—8,0	—8,0	—8,0	—7,5	—6,5	—6,5	—6,5	—6,0	—5,5	—4,5	—4,5	—4,5	—4,0	—3,5	—3,0	—3,0
№ п/п	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
	—3,0	—3,0	—3,0	—2,5	—2,0	—1,5	—1,0	—1,0	—1,0	—1,0	—1,0	—0,5	—0,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,5	0,5	0,5
№ п/п	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
	0,5	0,5	0,5	0,5	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,5	1,5	1,5	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,5
№ п/п	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
	2,5	3,0	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,5	4,5	4,5	4,5	4,5	4,5	5,0
№ п/п	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
	5,0	5,0	5,0	5,0	5,0	5,0	5,5	5,5	6,0	6,0	6,0	6,5	6,5	6,5	6,5	6,5	7,0	7,0	7,0	7,0
№ п/п	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
	7,0	7,0	7,5	7,5	7,5	7,5	7,5	7,5	7,5	7,5	8,0	8,5	8,5	8,5	8,5	8,5	8,5	9,0	9,0	9,5
№ п/п	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
	9,5	9,5	10,0	10,0	10,0	10,0	10,0	10,5	10,5	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,5	11,5	12,0	12,0	12,0	12,0
№ п/п	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
	12,5	12,5	13,0	13,0	13,0	13,5	13,5	14,0	14,0	14,0	14,5	14,5	15,0	15,5	16,0	17,0	17,5	17,5	18,0	18,0
№ п/п	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200
	18,5	18,5	19,0	19,0	19,0	19,0	19,5	19,5	19,5	20,0	21,0	21,0	21,5	22,0	22,0	23,5	25,0	25,5	26,0	30,5

Отсюда видно, что согласно (5.3.100) квартили будут равны

$$u_{3/4,\,200} = 11{,}0 \quad \text{и} \quad u_{1/4,\,200} = -1{,}0.$$

По формуле (5.3.131) находим значение l эмпирической интерквартильной широты

$$l = \frac{1}{2}[11{,}0 - (-1{,}0)] = \frac{12{,}0}{2} = 6{,}0 \ \textit{мк}.$$

С помощью (5.3.118) и (5.3.133) получим:

$$\mathbf{P}\left(|l - L| < z \cdot 0{,}7867 \frac{\sigma}{\sqrt{200}}\right) = 2\Phi(z).$$

По табл. V приложений для $2\Phi(z) = 0{,}95$ найдем $z = 1{,}96$. Несмещенную оценку $\bar{s}^2$ дисперсии находим с помощью (5.3.61) из данных примера 5.2.6

$$\bar{s}^2 = 5^2 \frac{780 - \frac{72^2}{200}}{199} = 94{,}73,$$

откуда

$$\bar{s} = \sqrt{94{,}73} = 9{,}73.$$

Принимаем, что $\sigma \approx 9{,}73$. Тогда

$$z \cdot 0{,}7867 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot 0{,}7867 \frac{9{,}73}{\sqrt{200}} = 1{,}1 \ \textit{мк}.$$

Таким образом, в данном случае

$$L \approx 6{,}0 \pm 1{,}1 \ \textit{мк}.$$

5.3.9. Доверительные пределы для теоретических квантилей. Теорема о нормальном предельном законе распределения эмпирических квартилей, рассмотренная в 5.3.8, практически может быть использована лишь при больших объемах выборки. Другая трудность в приложении этой теоремы заключается в том, что в выражение дисперсии входит неизвестное нам значение плотности $\varphi(\xi_p)$. Эта вторая трудность может быть преодолена, если для величины $\varphi(\xi_p)$ можно получить надлежащую оценку по данным выборки, что при некоторых предположениях (например, нормальной плотности $\varphi(x)$ и т. п.) действительно может быть сделано. Однако можно оказывается указать оценки для теоретических квантилей, не связанные какими-либо специальными допущениями о характере закона распределения: конечно, при этом мы получаем, особенно при малом объеме выборки, лишь очень грубые и ориентировочные пределы для оцениваемых величин.

Пусть мы хотим получить оценку для квантиля ξ_p $(0 < p < 1)$, используя вариационный ряд $u_{1,\,n}, u_{2,\,n}, u_{3,\,n}, \ldots, u_{n,\,n}$. Вероятность того, что наблюдение даст значение, меньшее ξ_p, равна $F(\xi_p) = p$. Противоположный результат имеет вероятность $1 - p$. Вероятность того, что ровно k из n наблюдений будет меньше ξ_p, равна, как мы знаем из (2.4.1),

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = p_{n,\,k}. \tag{5.3.134}$$

Следовательно, на основании правила сложения вероятность того, что менее r наблюдений будет меньше ξ_p, выражается суммой членов вида (5.3.134), где k пробегает все значения от 0 до $r - 1$

$$\sum_{k=0}^{r-1} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = p_1.$$

Но эта вероятность будет вместе с тем, очевидно, вероятностью неравенства

$$u_{r,\,n} \geqslant \xi_p,$$

так как для осуществления этого неравенства необходимо и достаточно, чтобы менее r наблюдений оказалось на числовой оси левее ξ_p. Рассуждая аналогично, мы прийдем к тому, что вероятность неравенства

$$u_{s,\,n} \leqslant \xi_p,$$

равная вероятности того, что левее ξ_p будет не менее s наблюдений, выразится суммой

$$p_2 = \sum_{k=s}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Таким образом, двойное неравенство

$$u_{r,\,n} \leqslant \xi_p \leqslant u_{s,\,n}$$

при $s > r$ будет иметь вероятность

$$\mathbf{P}(u_{r,\,n} \leqslant \xi_p \leqslant u_{s,\,n}) = 1 - \mathbf{P}(\xi_p \geqslant u_{s,\,n}) - \mathbf{P}(\xi_p \leqslant u_{r,\,n}) = 1 - p_1 - p_2 = \sum_{k=r}^{s-1} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Интервал $(u_{r,\,n},\ u_{s,\,n})$ с варьирующими от выборки к выборке концами обладает, следовательно, тем свойством, что с вероятностью

$$p_{r,\,s}^{(n)} = \sum_{k=r}^{s-1} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \tag{5.3.135}$$

он заключает внутри себя неизвестную нам точку ξ_p. Варьируя r и s, мы можем величину вероятности $p_{r,\,s}^{(n)}$ или, иными словами, «*доверительную*» вероятность интервала $(u_{r,\,n},\ u_{s,\,n})$ сделать достаточно близкой к единице, повысив тем самым надежность нашей оценки до практически нужного уровня. В случае, например, медианы $\xi_{1/2} = M_e X$, $p = \frac{1}{2}$, и мы будем иметь:

$$\mathbf{P}(u_{r,\,n} < M_e X < u_{s,\,n}) = \sum_{k=r}^{s-1} C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Так, например, при $n = 10$, беря $r = 2$ и $s = 8$ и учитывая, что $p = 1 - p = \frac{1}{2}$, найдем:

$$\mathbf{P}(u_{2,\,10} < M_e X < u_{8,\,10}) = \sum_{k=2}^{7} p_{10,\,k} = 1 - p_{10,\,0} - p_{10,\,1} - p_{10,\,10} - p_{10,\,9} - p_{10,\,8} = 1 - 2 \cdot p_{10,\,0} - 2p_{10,\,1} - p_{10,\,8} = 1 - 0{,}002 - 0{,}020 - 0{,}044 = 0{,}934.$$

Беря более узкий интервал $(u_{3,\,10},\ u_{7,\,10})$ и поступая аналогично, получим доверительную вероятность

$$\mathbf{P}(u_{3,\,10} < M_e X < u_{7,\,10}) = \sum_{k=3}^{6} p_{10,\,k} = p_{10,\,5} + 2p_{10,\,4} + p_{10,\,3} = 0{,}246 + 0{,}410 + 0{,}117 = 0{,}773.$$

Эта вероятность значительно меньше, чем в предыдущем случае.

При больших значениях n для вычисления вероятности $\mathbf{P}(u_{r,\,n} \leqslant \xi_p \leqslant u_{s,\,n})$, представляющей сумму биномиальных членов, можно применить приближенную формулу Лапласа (см. **4.3.5**).

5.3.10. Распределение крайних членов. Размах (широта) выборки. Случай оценки центра распределения с помощью крайних членов. В некоторых приложениях математической статистики существенный интерес для исследователя представляют крайние члены вариационного ряда. Для расчета мощности электростанции, снабжающей обширный круг потребителей, важно предвидеть максимально возможное одновременное потребление электроэнергии. Теория распределения крайних членов вариационного ряда в последние годы нашла себе также ряд приложений в вопросах испытания усталостной прочности металлов, при испытаниях крепости волокнистых веществ в зависимости от длины образцов и т. д. В некоторых распространенных методах текущего контроля крайние члены выборки, взятой контролером, служат основой для заключения о налаженности станка в данный момент времени.

Распределение этих членов определяется с помощью выведенных нами формул (5.3.110) и (5.3.111), если известно распределение признака (например, размера) в самой генеральной совокупности. Общий характер поведения крайних членов при возрастании объема наблюдений существенно зависит от характера распределения (т. е. функции $F(x)$) данной величины X.

Согласно (5.3.116) $\Omega_{nn}(x) = [F(x)]^n$ будет законом распределения максимального члена в выборке из n наблюдений. Если x фиксировано и $F(x) < 1$, то при возрастании n $[F(x)]^n$ убывает, стремясь к нулю. Следовательно, вся масса вероятности распределения максимального члена концентрируется при больших n в области, в которой функция $F(x)$ принимает значения, очень близкие к единице. Если распределение X *ограничено справа*, т. е. $F(x) = 1$ при $x \geqslant b$, тогда как $F(x) < 1$ при $x < b$, то при достаточно больших n возможные значения максимального члена будут в основном сконцентрированы в соседстве с точкой b в интервале $(b - \varepsilon, b)$ при любом $\varepsilon > 0$.

Поведение *максимального* члена при больших n описывается следующей теоремой.

Теорема. *Пусть функция распределения $F(x)$ величины X удовлетворяет следующим условиям*:

1. *Для некоторого $x = b$ функция $F(x) = 1$, тогда как $F(x) < 1$ при $x < b$.*
2. *Для достаточно малых $h > 0$ выполняется соотношение $1 - F(b - h) \approx ch^\alpha$, где α и c — два положительных числа; более точно*:

$$\frac{1 - F(b-h)}{h^\alpha} \to c \quad \text{при} \quad h \to 0. \tag{5.3.136}$$

Тогда, полагая $h_n = (cn)^{-\frac{1}{\alpha}}$, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{P}_n(t) = \mathbf{P}(u_{nn} < b + h_n t) \to e^{-|t|^\alpha} \quad \text{при} \quad t < 0, \\ &\mathbf{P}(u_{nn} < b + h_n t) = 1 \quad \text{при} \quad t \geqslant 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.3.137}$$

Второе соотношение (5.3.137) вытекает из очевидного замечания, что функция $\Omega_{n,\,n}(x) = F^n(x)$ равна в наших условиях единице при $x \geqslant b$ и $b + h_n t \geqslant b$ при $t \geqslant 0$. Для $t < 0$, конечно, $t = -|t|$ и

$$\mathbf{P}_n(t) = \Omega_{n,\,n}(b + h_n t) = F^n(b + h_n t) = F^n(b - h_n |t|).$$

Так как $h_n = (cn)^{-\frac{1}{\alpha}} \to 0$ при $n \to \infty$, то $F(b - h_n |t|) \to 1$ при $n \to \infty$.

Далее, используя равенство (4.3.51),

$$\ln(1 + x) = x + O(x^2) = x(1 + \varepsilon_x),$$

где $\varepsilon_x \to 0$ при $x \to 0$, мы можем написать:

$$\ln \mathbf{P}_n(t) = n \ln F(b - h_n |t|) = n \ln [1 - (1 - F(b - h_n |t|))] =$$
$$= -n [1 - F(b - h_n |t|)] \cdot [1 + \varepsilon_n], \tag{5.3.138}$$

причем $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$.

На основании (5.3.136) и определения h_n имеем далее:

$$n(1 - F(b - h_n |t|)) = nch_n^\alpha |t|^\alpha (1 + \varepsilon_n') = |t|^\alpha (1 + \varepsilon_n'), \tag{5.3.139}$$

где $\varepsilon_n' \to 0$ при $n \to \infty$.

Из (5.3.138) и (5.3.139) следует

$$\ln \mathbf{P}_n(t) = -|t|^\alpha (1 + \varepsilon_n)(1 + \varepsilon_n')$$

и, значит,

$$\ln \mathbf{P}_n(t) \to -|t|^\alpha \quad \text{при} \quad t < 0. \tag{5.3.140}$$

Из (5.3.140) следует первое соотношение (5.3.137), и тем самым теорема доказана.

Условие теоремы (5.3.136) выполняется, в частности, тогда, когда в точке b функция $F(x)$ имеет производную $F'(b)=\varphi(b)$, так что

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-F(b-h)}{(-h)}=\lim_{h\to 0}\frac{F(b-h)-F(b)}{h}=-\varphi(b)$$

и (5.3.136) выполнено, если положить $\alpha=1$ и $c=\varphi(b)$.

Пусть, например, величина X подчинена равномерному закону в некотором интервале $(-l,\ l)$ так, что

$$F(x)=0 \quad \text{при} \quad x<-l,$$
$$F(x)=\frac{x+l}{2l} \quad \text{при} \quad -l<x<l,$$
$$F(x)=1 \quad \text{при} \quad x\geqslant l.$$

В этом случае $b=l$ и условия теоремы (5.3.137) выполнены, так как функция $F(x)$ в точке l имеет производную $\varphi(l)=\frac{1}{2l}$ и, значит, $\alpha=1$, $c=\frac{1}{2l}$ и $h_n=\frac{2l}{n}$.

Предельный закон распределения $\mathbf{P}(t)$ для величины

$$t=\frac{u_{n,\,n}-l}{h_n} \tag{5.3.141}$$

будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{P}(t)=\lim_{n\to\infty}[F(l+h_nt)]^n=e^{-|t|} \quad \text{при} \quad t<0 \tag{5.3.142}$$
$$\mathbf{P}(t)=1 \quad \text{при} \quad t>0.$$

Таким образом, при больших n мы будем иметь приближенно:

$$\mathbf{P}\left[l\left(1-\frac{2}{n}t\right)<u_{n,\,n}<l\right]=\begin{cases}1-e^{-t} & \text{для} \quad t>0,\\ 0 & \text{для} \quad t<0.\end{cases}$$

Если произведено, например, 100 измерений, в каждом из которых показания измерительного прибора округлялись так, что результат выражался целым числом микронов и можно предполагать, что ошибка округления распределена в отрезке ($-0{,}5$ *мк*, $+0{,}5$ *мк*) равномерно, то, полагая $l=0{,}5$ *мк* и $t=2{,}996$, мы будем иметь:

$$\mathbf{P}(0{,}47\ \text{мк}<u_{100,\,100}<0{,}5\ \text{мк})\approx 1-e^{2{,}996}=0{,}95.$$

Аналогичная теорема имеет место и для предельного распределения *минимального* члена, если интервал, в котором распределена величина, ограничен слева и вблизи его левой границы удовлетворяется условие

$$F(a+h)=ch^{\alpha}(1+\varepsilon_n). \tag{5.3.143}$$

Тогда при $t>0$ для достаточно больших n

$$\mathbf{P}(a<u_{1,\,n}<a+a_nt)\approx 1-e^{-[t]^{\alpha}}, \tag{5.3.144}$$

где a_n удовлетворяет уравнению

$$F(a+a_n)=\frac{1}{n}.$$

Пусть мы рассматриваем вариационный ряд абсолютных величин случайных погрешностей измерений Δ:

$$|\Delta_1|<|\Delta_2|<\ldots<|\Delta_n|,$$

полагая, что эти погрешности подчиняются нормальному закону с центром в нуле $\mathbf{M}\Delta=0$ и дисперсией $\mathbf{M}\Delta^2=\sigma^2$.

Тогда абсолютная величина погрешности измерения распределена по закону

$$F(x) = \mathbf{P}(|\Delta| < x) = \mathbf{P}(-x < \Delta < x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 2\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)$$

и, кроме того, $F(x) = 0$ при $x < 0$.

В этом случае для минимальной ошибки $|\Delta_1|$ имеем $a = 0$ и условие (5.3.143) выполнено, причем $\alpha = 1$, так как при малых x

$$2\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{x}{\sigma}.$$

Мы имеем, следовательно,

$$\mathbf{P}\left(0 < |\Delta_1| < t\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \approx 1 - e^{-t}. \tag{5.3.145}$$

Приближенно для математического ожидания минимальной погрешности измерения будем иметь:

$$\mathbf{M}(|\Delta_1|) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \tag{5.3.146}$$

Если X *не ограничена справа*, то поведение максимального члена представляет более сложную картину, во всяком случае *максимальный* член почти наверное превзойдет наперед заданное число при $n \to \infty$. Если функция $F(x)$ достаточно быстро приближается к 1 при $x \to \infty$, то при больших n распределение максимального члена будет тесно концентрироваться около некоторого центра, в свою очередь неограниченно возрастающего вместе с объемом выборки. Аналогично будет обстоять дело и с *минимальным* членом, если $F(x)$ будет быстро приближаться к нулю при $x \to -\infty$. Такую картину «асимптотической устойчивости» крайних членов можно наблюдать у крайних членов вариационного ряда при выборке из нормальной совокупности. В этом случае рост крайних членов происходит сколько-нибудь быстро только при малых значениях n. Далее рост этот сильно замедляется. Исследование показывает, что математическое ожидание крайних членов будет приближенно выражаться следующим равенством:

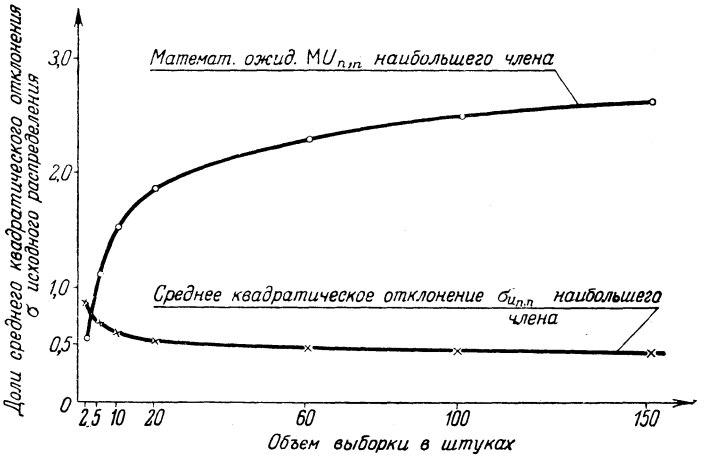
$$\mathbf{M}u_{1,\,n} = a - \sigma\sqrt{\ln n} + \sigma \frac{\ln\ln n + \ln 4\pi}{2\sqrt{2\ln n}}. \tag{5.3.147}$$

Таким образом, «раздвигание краев» выборочного распределения с возрастанием объема выборки происходит крайне медленно: пропорционально $\sqrt{\ln n}$; при этом дисперсия крайних членов с ростом n стремится к нулю (хотя также очень медленно). Таким образом, можно гарантировать с любой вероятностью, сколь угодно близкой к единице, малость уклонений $|u_{1,\,n} - \mathbf{M}u_{1,\,n}|$ и $|u_{n,\,n} - \mathbf{M}u_{n,\,n}|$ при возрастании n. Асимптотически при больших n можно положить:

$$\mathbf{D}u_{n,\,n} = \mathbf{D}u_{1,\,n} = \frac{\sigma^2}{\ln n} \frac{\pi^2}{6}. \tag{5.3.148}$$

Рост средних значений и убывание дисперсии наибольшего члена при нормальном распределении можно иллюстрировать данными табл. 5.3.3 и черт. 68.

Для максимального и минимального членов предельные распределения выражаются в случае выборки из нормальной совокупности так называемым «двойным



Черт. 68. Рост математического ожидания $\mathbf{M}U_{n,n}$ и уменьшение среднего квадратического отклонения $\sigma_{U_{n,n}}$ наибольшего члена $U_{n,n}$ выборки с возрастанием объема n выборки.

показательным» законом, имеющим, как показал Б. В. Гнеденко, довольно широкую область приложения; при $n \to \infty$ мы имеем для любого t:

$$\mathbf{P}(u_{n,n} - \mathbf{M}u_{n,n} < t\sqrt{\mathbf{D}u_{n,n}}) \to e^{-e^{-t}}, \qquad (5.3.149)$$

и аналогично

$$\mathbf{P}(u_{1,n} - \mathbf{M}u_{1,n} < t\sqrt{\mathbf{D}u_{1,n}}) \to 1 - e^{-e^{t}}. \qquad (5.3.150)$$

При небольших n приведенные асимптотические формулы применять нельзя. Для оценки крайних членов в этом случае следует использовать точное выражение закона распределения с помощью формул (5.3.115) и (5.3.116) и произвести необходимые расчеты. Если величина X распределена нормально, то для оценки крайних членов при малых значениях n можно использовать табл. XIII приложений. В этой таблице указаны для некоторых значений вероятности $\frac{p}{100}$ p — процентные пределы t_p для уклонения $\frac{u_{n,n}-a}{\sigma}$ максимального члена $u_{n,n}$ от центра распределения a; иными словами, в таблице указаны отнесенные к параметру σ исходного распределения квантили распределения этого уклонения, отвечающие уровню вероятности p (см. (3.1.14)).

Таблица 5.3.3

Объем выборки	Среднее значение $\mathbf{M}u_{n,n}$ наибольшего члена	Среднее квадратическое отклонение $\sigma_{un,n}$ наибольшего члена
2	0,56419	0,8257
5	1,16297	0,6690
10	1,53875	0,5868
20	1,86747	0,5251
60	2,31928	0,4545
100	2,50759	0,4294
200	2,74604	0,4009
500	3,03670	0,3704
1000	3,24144	0,3514

Среднее значение $\mathbf{M}u_{n,n}$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma_{u_{n,n}}$ наибольшего члена выражены в долях среднего квадратического отклонения σ признака в генеральной совокупности.

Таким образом,

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{P}(u_{n,n} < a + t_p\sigma) &= \frac{p}{100},\\ \mathbf{P}(u_{n,n} > a - t_p\sigma) &= \frac{p}{100}.\end{aligned}\right\} \qquad (5.3.151)$$

Пример 5.3.13. Пусть требуется с надежностью в 99% оценить максимальный член предполагаемых выборок численностью по 6 штук, если распределение приблизительно нормально $N(x; a, \sigma)$, причем $a = 4{,}3$ *мк* и $\sigma = 9{,}73$ *мк*.

По табл. XIII при $p = 99\%$ находим $t_p = 2{,}935$, откуда с помощью (5.3.151) получаем:

$$u_{6,6} = 4{,}3 + 2{,}94 \cdot 9{,}73 = 4{,}3 + 28{,}6 = 32{,}9 \text{ мк}.$$

В вопросах статистического контроля качества продукции часто используется характеристика, называемая «размахом», или «широтой» распределения и выражаемая соотношением (5.2.1) или в обозначениях, принятых в данном параграфе,

$$R_n = u_{n,\,n} - u_{n,\,1}. \tag{5.3.152}$$

Таким образом, размах распределения равен разности между крайними членами.

Закон распределения R_n легко может быть установлен в общем виде. Допустим, что $\varphi(x)$ является плотностью вероятности величины X. Тогда при любом $t > 0$

$$\mathbf{P}(R_n < t) = n \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,[F(x+t) - F(x)]^{n-1}\,dx. \tag{5.3.153}$$

В самом деле, для того чтобы осуществилось неравенство $R_n < t$, необходимо и достаточно, во-первых, чтобы одно из n наблюдений (первое, или второе, ..., или n-е) заняло положения в промежутке от x до $x + dx$, вероятность чего на основании теоремы сложения приближенно равняется $n\varphi(x)\,dx$, так как мы считаем попадание двух и более наблюдений в малый интервал $(x,\ x+dx)$ событием, практически невозможным, во-вторых, нужно, чтобы остальные $n-1$ независимых наблюдений разместились между x и $x+t$ (вероятность чего равна $[F(x+t) - F(x)]^{n-1}$), вероятность указанного расположения всех n наблюдений будет, следовательно, при фиксированном n равна

$$n\varphi(x)\,dx\,[F(x+t) - F(x)]^{n-1}. \tag{5.3.144}$$

Применяя формулу (2.2.23) полной вероятности и переходя к пределу, мы интегрируем функцию (5.3.154) по всем возможным значениям x и получаем (5.3.153).

В случае нормального распределения мы можем, не нарушая общности, считать центр распределения в нулевой точке.

Далее, рассматривая вместо величины X нормированную величину $X' = \frac{X}{\sigma}$ с плотностью $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, найдем с помощью (5.3.102):

$$\mathbf{P}\left(\frac{u_{n,\,n} - u_{1,\,n}}{\sigma} < t\right) = \mathbf{P}(R < \sigma t) = n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} [\Phi(x+t) - \Phi(x)]^{n-1}\,dx, \tag{5.3.155}$$

причем

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Для различных значений вероятности $P = \frac{p}{100}$ в табл. XIV приложений указаны p-процентные пределы [см. (5.3.154)] для отношения $\frac{R_n}{\sigma}$ при объемах выборки из нормальной совокупности от 2 до 20. В начале таблицы указаны также значения

$$\alpha_n = \mathbf{M}\left(\frac{R_n}{\sigma}\right), \quad \beta_n = \sigma_{\frac{R_n}{\sigma}} \quad \text{и} \quad \gamma_n = \frac{\beta_n}{\alpha_n}. \tag{5.3.156}$$

Из (5.3.156) следует, что

$$\mathbf{M}\left(\frac{R_n}{\alpha_n}\right) = \frac{\sigma}{\alpha_n}\,\mathbf{M}\left(\frac{R_n}{\sigma}\right) = \frac{\sigma}{\alpha_n}\,\alpha_n = \sigma.$$

Таким образом, частное $\frac{R_n}{\alpha_n}$ представляет несмещенную оценку среднего квадратического отклонения σ.

Поэтому размах используется, как мы увидим далее, при оценке σ по данным малой выборки. При выборках объема, большего чем $n = 10$, использование размаха в качестве оценки σ уже мало эффективно. Для сравнения приводим табл. 5.3.4.

Таблица 5.3.4

Объем выборки n		2	3	4	5	6	10	15	20	50
Средние квадратические отклонения в долях параметра σ исходного распределения	$\bar{s}$	0,603	0,463	0,389	0,341	0,308	0,232	0,187	0,161	0,101
	R_n	0,756	0,525	0,427	0,371	0,335	0,259	0,217	0,195	0,145

Пусть, например, при статистическом методе контроля предполагается использовать размах варьирования в качестве характеристики рассеивания при объеме пробы, равном 7 штукам. Требуется определить в долях генерального среднего квадратического отклонения математическое ожидание $\mathbf{M}\left(\frac{R_n}{\sigma}\right)$ размаха, его среднее квадратическое отклонение $\sigma_{\frac{R_n}{\sigma}}$ и коэффициент вариации $v_{\frac{R_n}{\sigma}}$, а также определить с надежностью в 99% верхнюю границу размаха R_n в долях σ, т. е. отношение $\frac{R_n}{\sigma}$. По табл. XIV приложений для $n = 7$ находим:

$$\mathbf{M}\left(\frac{R_7}{\sigma}\right) = 2{,}704; \quad \sigma_{\frac{R_7}{\sigma}} = 0{,}833; \quad v_{\frac{R_7}{\sigma}} = \frac{\sigma_{\frac{R_7}{\sigma}}}{\mathbf{M}\left(\frac{R_7}{\sigma}\right)} = 30{,}8\%.$$

Верхнюю границу размаха с надежностью 99% находим по таблице в виде: $\mathbf{P}\left(\frac{R_7}{\sigma} < 4{,}88\right) = 0{,}99$, т. е. для размаха R_7 она составляет $4{,}88\,\sigma$.

Сделаем еще одно замечание относительно задачи оценки параметров распределения (параметризации).

Описанные нами в **5.3.4** приемы определения центра рассеивания и других характеристик генеральной совокупности носят достаточно общий характер и часто используются на практике. Следует отметить, однако, что, во-первых, они не всегда достаточно эффективны, так как бывает трудно указать в каждом конкретном случае, какой степенью точности обладают наши оценки по асимптотическим формулам. Во вторых, метод моментов и, в частности, использование средней арифметической в качестве оценки центра распределения вовсе не всегда дают нам лучший результат. Выбор надлежащей оценки для центра распределения существенно зависит от особенностей данного распределения. В самом деле, например, для закона Коши (5.3.97) медиана является состоятельной оценкой теоретической медианы, в то время как средняя арифметическая не будет обладать этим свойством, так как средних арифметических в этом случае не существует.

Мы рассмотрим здесь еще один поучительный пример по оценке центра рассеивания.

Пусть требуется оценить неизвестный параметр a в равномерном распределении величины X на отрезке $(a-l,\ a+l)$ длины $2l$ (l — данное число), причем положение a на оси x неизвестно. Плотность вероятности в этом случае задается, как известно из **3.1.2**, формулами $\varphi(x) = \frac{1}{2l}$ на отрезке $(a-l,\ a+l)$ и $\varphi(x) = 0$ вне этого отрезка. Значение a, очевидно, отвечает математическому ожиданию $\mathbf{M}X = a$. Подсчет даст: $\sigma_X = \frac{l}{\sqrt{3}}$, и потому $\sigma_{\bar{x}} = \frac{l}{\sqrt{3n}}$. Таким образом, при достаточно большом n с вероятностью, близкой к 0,997, мы можем утверждать, что $\bar{x}$ будет отклоняться от a не более чем на $3\sigma_X = \frac{3l}{\sqrt{3n}}$, т. е.

$$\mathbf{P}\left(-\frac{3l}{\sqrt{3n}} < \bar{x} - a < \frac{3l}{\sqrt{3n}}\right) \approx 0{,}997. \qquad (5.3.157)$$

Однако в данном случае можно указать значительно более точную оценку для a. В самом деле, расположим в выборке объема n значения величины X в порядке их возрастания и обозначим через $u_{1,\,n}$ минимальное из них, т. е. ближайшее к левому концу $(a-l)$ интервала распределения, и через $u_{n,\,n}$ — максимальное из наблюденных значений, ближайшее к правому концу $(a+l)$.

Так как

$$u_{1,\,n} > a-l, \quad \text{то} \quad a < u_{1,\,n}+l$$

и

$$u_{n,\,n} < a+l, \quad \text{то} \quad a > u_{n,\,n}-l,$$

т. е.

$$u_{n,\,n}-l < a < u_{1,\,n}+l. \tag{5.3.158}$$

Эти неравенства выполняются при любом a.

Из теоремы, доказанной **в 5.3.10**, следует, что при больших n разности

$$[u_{1,\,n}-(a-l)] \quad \text{и} \quad [(a+l)-u_{n,\,n}]$$

не превосходят величины

$$\delta_n(t) = \frac{2l}{n}t \qquad (t>0)$$

с вероятностью

$$1-e^{-t}.$$

Таким образом, при достаточно больших t и n можно почти наверно утверждать, что правый и левый концы интервала, определяемого неравенством (5.3.158), отстоят от точки a меньше чем на $\frac{2l}{n}t$.

Ранее найденный с помощью средней арифметической $\bar{x}$ интервал (5.3.157) имел длину $\left(\text{порядка } \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, значительно большую, чем длина интервала (5.3.158).

Заметим еще, что если l неизвестно, то в качестве оценки для a может быть использована средняя из крайних членов

$$\lambda_n = \frac{u_{1,\,n}+u_{n,\,n}}{2}. \tag{5.3.159}$$

Опять-таки более точно и надежно оценивающая a по сравнению с оценкой его по $\bar{x}$.

5.3.11. Оценка параметра σ по размахам нескольких выборок. В некоторых случаях для оценки σ мы имеем возможность использовать данные о размахах, полученных в независимых выборках (из одной и той же генеральной совокупности) одного и того же (обычно небольшого) объема n.

Пусть наблюденные значения размахов будут:

$$R_1,\ R_2,\ \ldots,\ R_m.$$

Строя по ним несмещенные оценки для параметра σ генеральной совокупности, найдем:

$$\frac{R_1}{\alpha_n},\ \frac{R_2}{\alpha_n},\ \ldots,\ \frac{R_m}{\alpha_n}.$$

Беря среднюю арифметическую из этих оценок, получим:

$$\frac{\bar{R}}{\alpha_n} = \frac{\sum_{i=1}^{m} R_i}{m\alpha_n}. \tag{5.3.160}$$

Это будет несмещенная оценка для σ по данным всех выборок, так как

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{M}\left(\frac{\bar{R}}{\alpha_n}\right) = \sigma, \\ &\mathbf{D}(\bar{R}) = \mathbf{D}\left(\frac{\sum_{i=1}^{m} R_i}{m}\right) = \frac{\mathbf{D}R}{m} = \frac{\beta_n^2\sigma^2}{m}, \\ &\mathbf{D}\left(\frac{\bar{R}}{\alpha_n}\right) = \frac{\beta_n^2}{m}\frac{\sigma^2}{\alpha_n^2} = \frac{\sigma^2\gamma_n^2}{m}. \end{aligned}\right\} \tag{5.3.161}$$

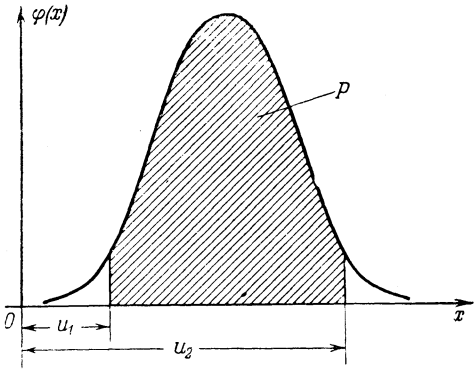
Если m достаточно велико, отношение $\frac{\overline{R}}{\alpha_n}$ будет приближенно следовать нормальному закону $N\left(x;\ \sigma,\ \frac{\sigma\gamma_n}{\sqrt{m}}\right)$, т. е. с центром в точке σ и средним квадратическим отклонением, равным $\frac{\gamma_n\sigma}{\sqrt{m}}$. Более точное исследование показывает, что нормальный закон применим и для сравнительно небольших m, если объем n каждой выборки лежит между 5 и 10.

5.3.12. Допустимые (толерантные) пределы. Мы изложим теперь некоторые приложения порядковых (ранговых) характеристик к определению так называемых допустимых (толерантных) пределов. Во многих случаях о качестве выпускаемой продукции в отношении некоторого признака X судят по проценту изделий, заключающемуся в интервале между двумя пределами, которые и составляют как бы пределы интервала изменчивости, допустимой без существенного ущерба для использования изделий. Разумеется, при этом предполагается, что все систематические причины, влияющие на величину признака, остаются неизменными, и вариация происходит лишь под влиянием неучитываемых изменчивых обстоятельств, сопровождающих процесс выборки. Таким образом, мы можем рассматривать обследованную партию продукции как выборку из некоторой генеральной совокупности. Мы будем предполагать, что распределение признака X в генеральной совокупности задается некоторой функцией плотности $\varphi(x)$. В некоторых случаях мы можем даже утверждать, что функция $\varphi(x)$ принадлежит к тому или другому семейству функций (например, будет нормальной плотностью и т. п.), в других случаях вид функции $\varphi(x)$ полностью неизвестен. Мы увидим сейчас, что даже и в этом последнем случае, вычисляя два предела по указанному ниже правилу, мы можем с заданной наперед надежностью γ гарантировать, что «доля» всей генеральной совокупности (т. е. вероятность попадания будущего наблюдения в указываемые допустимыми пределами границы) будет не меньше заданного числа P.

Получение допустимых пределов при произвольной функции распределения может быть осуществлено следующим образом. Пусть P и γ — заданные уровни вероятности. Искомые допустимые пределы должны быть выбраны такими функциями $u_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $u_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ наблюдений, чтобы неравенство

$$\int_{u_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)}^{u_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \varphi(x)\,dx \geqslant P \qquad (5.3.162)$$

имело бы вероятность, равную γ.



Черт. 69. Допустимые (толерантные) пределы u_1 и u_2, в которых с вероятностью γ заключена доля P всей совокупности.

Очевидно, $u_1 < u_2$. Функции u_1 и u_2 будут называться *допустимыми* (*толерантными*) пределами, отвечающими заданному *коэффициенту доверия* γ и данным наблюдения.

Более наглядно ту же задачу можно сформулировать так: построить по данным выборки интервал (u_1, u_2), над которым с вероятностью γ лежала бы доля P всей площади под кривой $\varphi(x)$ (черт. 69). Покажем, что при данных P и γ можно подобрать такой объем выборки, что крайние члены вариационного ряда, т. е. наименьшего $u_{1,n}$ и наибольшего $u_{n,n}$ из наблюдений,

могут быть приняты в качестве допустимых пределов

$$u_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = u_{1,\,n},$$
$$u_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = u_{n,\,n};$$

другими словами, что вероятность неравенства

$$\int_{u_{1,\,n}}^{u_{n,\,n}} \varphi(x)\,dx \geqslant P \tag{5.3.163}$$

при достаточно большом n будет (приближенно) равна γ. В самом деле, пусть

$$R = \int_{u_{1,\,n}}^{u_{n,\,n}} \varphi(x)\,dx = F(u_{n,\,n}) - F(u_{1,\,n}), \tag{5.3.164}$$

где $F(x)$ — интегральная функция распределения.

Мы видели (лемма из **5.3.7**), что величина $Y = F(X)$ имеет всегда равномерное распределение, какова бы ни была непрерывная функция $F(x)$. Но $F(u_{1,\,n}) = y_{1,\,n}$ и $F(u_{n,\,n}) = y_{n,\,n}$ — два крайних члена вариационного ряда $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$ величины Y. Следовательно, величина $R = y_{n,\,n} - y_{1,\,n}$ имеет закон распределения, не зависящий от вида функции $F(x)$. Чтобы найти выражение этого закона, достаточно использовать установленное нами распределение (5.3.153) для размаха $R = y_{n,\,n} - y_{1,\,n}$, полагая $\varphi(y) = 1$ при $0 \leqslant y \leqslant 1$ и $\varphi(y) = 0$ при $y < 0$ и $y > 1$.

Так как в данном случае плотность $\varphi(y)$ отлична от нуля лишь в интервале (0,1) и согласно (5.3.102)

$$F(y) = y \qquad (0 < y < 1),$$
$$F(y+t) = y + t \quad \text{при} \quad 0 < y < 1 - t \qquad (0 < t \leqslant 1),$$

и

$$F(y+t) = 1 \qquad \text{при} \quad 1 \geqslant y > 1 - t \qquad (0 < t < 1),$$

то, применяя (5.3.153), получим для $0 \leqslant t \leqslant 1$:

$$\mathbf{P}(R \leqslant t) = n \int_0^1 [F(y+t) - F(y)]^{n-1}\,dy =$$

$$= n \int_0^{1-t} [y + t - y]^{n-1}\,dy + n \int_{1-t}^{1} (1-y)^{n-1}\,dy = n(1-t)\,t^{n-1} + t^n. \tag{5.3.165}$$

Отсюда при $0 < P < 1$

$$\mathbf{P}(R > P) = 1 - n(1-P)\,P^{n-1} - P^n. \tag{5.3.166}$$

Приравнивая полученное выражение вероятности неравенства $R > P$ заданной границе γ, мы получим для определения минимального объема выборки уравнение

$$n(1-P)\,P^{n-1} + P^n = 1 - \gamma,$$

или

$$nP^{n-1} - (n-1)\,P^n = 1 - \gamma. \tag{5.3.167}$$

Например, для $\gamma = 0{,}95$ и $P = 0{,}99$ мы из уравнения (5.3.167) найдем приближенное значение $n = 130$. Таким образом, имея выборку объема 130, взятую из произвольной совокупности с непрерывным распределением признака X, мы можем с вероятностью 0,95 утверждать, что между крайними членами ее лежит не менее 0,99 всей совокупности.

Когда закон распределения $F(x)$ известен, то оказывается возможно значительно уточнить допустимые пределы при тех же вероятностях γ и P. Так, например, при нормальном распределении признака X в генеральной совокупности мы можем по данным выборочным характеристикам найти такие пределы

$$u_1 = \bar{x} - ks \quad \text{и} \quad u_2 = \bar{x} + ks,$$

то с вероятностью γ мы можем гарантировать попадания в них доли совокупности, не меньшей заданного предела P. Значение k, являющееся функцией n, P и γ, приближенно выражается формулой

$$k = k_\infty\left(1 + \frac{x_\gamma}{\sqrt{2n}} + \frac{5x_\gamma^2 + 10}{12n}\right), \tag{5.3.168}$$

где k_∞ (значение k, которое мы использовали бы, зная истинные значения центра распределения a и среднего квадратического отклонения σ) определяется соотношением

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-k_\infty}^{k_\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = 2\Phi(k_\infty) = P \tag{5.3.169}$$

и x_γ определяется из уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_\gamma}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = 0{,}5 - \Phi(x_\gamma) = 1 - \gamma$$

или

$$\Phi(x_\gamma) = \gamma - 0{,}5. \tag{5.3.170}$$

Пусть, например, произведена выборка объема $n = 1449$, причем для отклонения диаметра от номинального размера было получено:

$$\bar{x} = +670{,}40 \text{ мк},$$
$$s = \quad 37{,}45 \text{ мк}.$$

Принимая $\gamma = 0{,}99$ и $P = 0{,}90$, получим
из (5.3.170)

$$\Phi(x_\gamma) = 0{,}99 - 0{,}5 = 0{,}49,$$

из (5.3.169)

$$0{,}90 = 2\Phi(k_\infty).$$

С помощью табл. IV и V приложений находим:

$$x_\gamma = 2{,}33 \quad \text{и} \quad k_\infty = 1{,}645.$$

Далее, применяя (5.3.168), получаем:

$$k = 1{,}645\left(1 + \frac{2{,}33}{\sqrt{2 \cdot 1449}} + \frac{5 \cdot 2{,}33^2 + 10}{12 \cdot 1449}\right) = 1{,}718.$$

Отсюда допустимые пределы будут равны:

$$u_2 = 670{,}40 + 1{,}718 \cdot 37{,}45 = 734{,}7 \text{ мк},$$

$$u_1 = 670{,}40 - 1{,}718 \cdot 37{,}45 = 606{,}1 \text{ мк}.$$

Следовательно, с вероятностью 0,99 мы можем утверждать, что не менее 90% будущих наблюдений окажутся в пределах 606,1 до 734,7.

§ 4. Оценки с помощью доверительных интервалов

5.4.1. Общее понятие о доверительных интервалах. Всякая статистическая оценка параметра, определенная по данным выборки с помощью надлежаще выбранной статистической характеристики, может быть, как мы уже видели в § 3 настоящей главы, только приближенной. Поэтому она может иметь определенный смысл лишь в том случае, когда указываются границы возможной погрешности оценки или, иначе говоря, указывается интервал, про который с известной вероятностью (или, как говорят, *надежностью*) можно утверждать, что он *покрывает оцениваемое нами*, вообще говоря, постоянное *значение параметра*. Предположим, например, что мы желаем по данным выборки оценить характеристику a центра группирования нормальной генеральной совокупности, среднее квадратическое отклонение σ которой мы считаем известным. В качестве приближенной оценки неизвестной постоянной величины мы, подобно тому как это делалось в § 3 настоящей главы, можем использовать среднюю арифметическую $\bar{x}$, вычисляемую по данным выборки. Случайная величина $\bar{x}$, как уже указывалось в **5.3.2**, подчинена в рассматриваемом случае нормальному закону с центром $\mathbf{M}\bar{x} = a$ и дисперсией $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ (см. соотношения (5.1.47) и (3.4.20)).

Как видно из (4.3.12) и (3.4.25), нормированное отклонение нормально распределенной случайной величины $\bar{x}$ от ее центра группирования

$$U = \frac{\bar{x} - a}{\sigma/\sqrt{n}} \tag{5.4.1}$$

имеет распределение, вовсе не зависящее от каких-либо параметров: плотность этого распределения будет

$$n(u;\ 0,\ 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

Поэтому мы можем легко определить вероятность попадания величины U в любой заданный интервал. В частности, выбрав интервал (α, β), мы из (4.3.32) будем иметь:

$$\mathbf{P}(\alpha < U < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} n(u;\ 0,\ 1)\, du = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = \gamma. \tag{5.4.2}$$

Вероятность γ, называемую «*доверительной вероятностью*», обычно задают как требуемый уровень надежности. Но, принимая во внимание (5.4.1), мы можем равенство (5.4.2) переписать следующим образом:

$$\mathbf{P}\left(\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} - a < \beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \gamma. \tag{5.4.3}$$

Мы видим, что интервал $\left(a + \alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ a + \beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ представляет область, для которой попадание в нее $\bar{x}$ гарантируется с заданным уровнем вероятности. Мы можем эту область назвать областью *практически возможных* при данном a значений $\bar{x}$ (с данным уровнем надежности).

Далее, заметив, что неравенство

$$\bar{x} - a < \beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

равносильно неравенству

$$x - \beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a,$$

а неравенство

$$\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\bar{x}-a$$

равносильно неравенству

$$a<\bar{x}-\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

мы можем теперь вместо (5.4.3) написать:

$$\mathbf{P}\left(\bar{x}-\beta\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}-\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\gamma. \tag{5.4.4}$$

Для истолкования вероятности (5.4.4) рассмотрим интервал

$$\bar{I}\left(\bar{x}-\beta\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x}-\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Пусть $\alpha=-\beta$; тогда длина этого интервала

$$\left(\bar{x}-\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)-\left(\bar{x}-\beta\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2\beta\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

будет зависеть только от выбранной нами «доверительной вероятности» γ и известных нам значений параметра σ генерального распределения и объема n выборки. Значение величины $\bar{x}$, центра интервала, а вместе с этим и самое положение интервала $\bar{I}$ на оси $\bar{x}$ является случайным, меняющимся от выборки к выборке.

Равенство (5.4.4) говорит о том, что если мы будем повторять выбор и для каждой из выборок определять границы интервала $\bar{I}$ с помощью соответствующей $\bar{x}$, то при большом числе повторений опыта определяемые нами на оси $\bar{x}$ интервалы, каждый длиной $2\beta\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, *будут в* 100 $\gamma\%$ *случаев покрывать неизвестное нам значение параметра* a.

Такое заключение есть прямое следствие теоремы (3.7.13) Бернулли. *Мерой надежности*, которую мы связываем с «*доверительным интервалом*»

$$\bar{I}\left(\bar{x}-\beta\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x}-\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

является, как мы уже говорили, «доверительная вероятность» γ, назначаемая до производства выборки и вовсе не учитывающая какие-либо конкретные данные, полученные в опыте. Эта вероятность относится, как мы видим, только к возможным результатам всех выборок, проведенных в условиях, аналогичных тем, которые осуществляются в нашем опыте.

Если в нашем случае принять $\gamma=0{,}95$, $\sigma=2$ и $n=9$, то по табл. VII приложений мы найдем для $P_z=1-\gamma=1-0{,}95=0{,}05$, т. е. $p=5$, что $z_p=\beta=1{,}96$. Тогда для интервала $\bar{I}$ мы будем иметь границы $\bar{x}-1{,}31$ и $\bar{x}+1{,}31$, где $1{,}31=1{,}96\frac{2}{\sqrt{9}}$. С доверительной вероятностью 0,95 мы будем иметь:

$$\bar{x}-1{,}31<a<\bar{x}+1{,}31. \tag{5.4.5}$$

Вероятность мы связываем при этом с границами интервала $\bar{I}$, которые определяются случайностями выборки, а не со значением параметра a, который, вообще говоря, от случая не зависит. Поэтому было бы *грубой принципиальной ошибкой* подставлять вместо $\bar{x}$ величину, найденную по данным выборки, например $\bar{x}=4{,}12$, и утверждать, что «вероятность неравенства

$$2{,}81<a<5{,}43 \tag{5.4.6}$$

равна 0,95».

На самом деле, если a — постоянная величина, то неравенство (5.4.6) или достоверно, т. е. имеет вероятность 1, если a действительно лежит в указанном

интервале, или невозможно, и, значит, имеет вероятность 0, если a лежит вне интервала (5.4.6); никакой другой вероятности мы с неравенством (5.4.6) связать не можем. Мы должны, следовательно, проводить строгое различие между доверительным интервалом со случайными границами и его конкретным представителем, полученным в данной выборке. Каждому значению параметра a мы отнесли интервал $\left(a+\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ a+\beta\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ «практически возможных» при данном a значений $\bar{x}$. Для краткости будем обозначать эти интервалы Δ_a. Если в выборке мы получили определенное значение $\bar{x}$, то все значения a можно будет разделить на две категории: в первую из них мы отнесем такие a, для которых соответствующие интервалы Δ_a покрывают полученное значение $\bar{x}$, так что для этих a

$$a+\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\bar{x}<a+\beta\frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \tag{5.4.7}$$

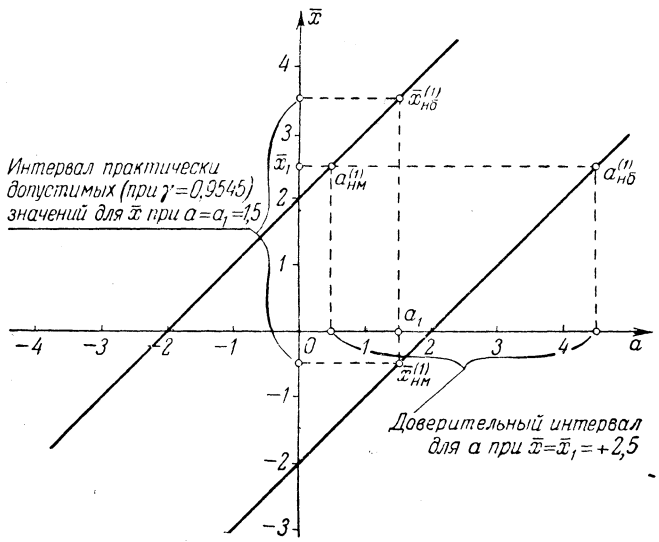
Во вторую категорию мы отнесем те значения a, для которых интервалы Δ_a не содержат $\bar{x}$.

Значения a первой категории можно назвать согласующимися с данными выборки, тогда как значения a второй категории не согласуются с этими данными.

Из неравенства (5.4.7) следует, что значения первой категории образуют интервал на оси a

$$\bar{x}-\beta\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}-\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \tag{5.4.8}$$

Следовательно, полученные на опыте доверительные границы, образующие доверительный интервал, можно истолковать как границы значений a, «согласующихся»



Черт. 70. Доверительный интервал для a при оценке по $\bar{x}$ (при $\bar{x}=\bar{x}_1=+2{,}5$). Интервал практически допустимых (при $\gamma=0{,}9545$) значений для $\bar{x}$ при $a=a_1=+1{,}5$.

с опытными данными, в то время как не попавшие в данный интервал значения a можно рассматривать как «не согласующиеся» с опытными данными в указанном выше смысле.

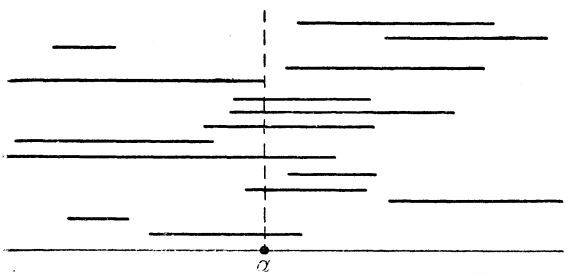
На черт. 70 изображен доверительный интервал для параметра a (центра группирования), оцениваемого по средней арифметической $\bar{x}$, причем доверитель-

ная вероятность выбрана равной 0,9545, $\sigma = 2$ и $n = 4$. Тогда при $\beta = -\alpha$ мы из табл. V приложений имеем при $2\Phi(\beta) = 0{,}9545$ $\beta = 2$ и $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{4}} = 1$. По оси абсцисс откладываются значения параметра a в долях $\sigma_{\bar{x}}$, а по оси ординат — значения статистической характеристики $\bar{x}$ в тех же единицах. В данном случае доверительный интервал получен из равенства

$$\mathbf{P}(\bar{x} - 2 < a < \bar{x} + 2) = 0{,}9545.$$

Возьмем на оси абсцисс некоторую точку $a_1 = 1{,}5$. Этому значению параметра a на оси ординат соответствуют границы $\bar{x}^{(1)}_{\text{нм}} = -0{,}5$ и $\bar{x}^{(1)}_{\text{нб}} = +3{,}5$. Таким образом, интервал $(-0{,}5;\ +3{,}5)$ представляет интервал практически допустимых (при $\gamma = 0{,}9545$) значений для $\bar{x}$ при $a = a_1 = +1{,}5$.

Пусть теперь мы получим из опыта значение $\bar{x}_1 = +2{,}5$. Мы видим, что этому значению $\bar{x}$ на оси абсцисс соответствует доверительный интервал (0,5; 4,5). Получив в результате наблюдений значение $\bar{x} = \bar{x}_1 = 2{,}5$, мы можем лишь считать, что с полученными нами опытными данными согласуются значения параметра a от $+0{,}5$ до $+4{,}5$.



Черт. 71. Доверительные интервалы для параметра a, полученные по 15 выборкам при доверительной вероятности $\gamma = 0{,}5$.

На черт. 71 показаны 15 доверительных интервалов для параметра a, полученных по 15 выборкам при доверительной вероятности $\gamma = 0{,}5$. Из чертежа видно, что как длины, так и положения интервалов случайным образом изменяются от выборки к выборке. Вместе с тем примерно половина всех интервалов, а именно 7 из 15, покрывает оцениваемый параметр a. Далее мы поясним (см. **5.4.4.**), при каких обстоятельствах случайными оказываются не только положения интервалов, получаемых по отдельным выборкам, но также и их длины.

Заметим, что, зная плотность распределения $\varphi(u)$ величины U, мы можем *различными способами* выбрать интервал (α, β) так, чтобы $\mathbf{P}(\alpha < U < \beta) = \gamma$. В соответствии с этим длина $(\beta - \alpha)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ полученного нами для параметра a доверительного интервала вида

$$\bar{x} - \beta\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} - \alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

будет иметь *различные значения*. В первом из рассмотренных числовых примеров мы имели $\alpha = -\beta = -1{,}96$ и $\beta = 1{,}96$. Длина интервала l была равна

$$(\beta - \alpha)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = [1{,}96 - (1{,}96)]\frac{2}{\sqrt{n}} = 2{,}62.$$

Пусть теперь $\alpha = -1{,}7$. Тогда при тех же прочих данных с помощью равенства (5.4.4) запишем:

$$\mathbf{P}\left(\bar{x} - \beta_1\frac{2}{3} < a < \bar{x} + 1{,}7\,\frac{2}{3}\right) = \mathbf{P}\left(-1{,}7 < \frac{\bar{x} - a}{\frac{2}{3}} < \beta_1\right) = 0{,}95 =$$

$$= \Phi(\beta_1) - \Phi(-1{,}7) = \Phi(\beta_1) + \Phi(1{,}7),$$

откуда с помощью табл. IV приложений находим:

$$\Phi(\beta_1) = 0{,}95 - \Phi(1{,}7) = 0{,}95 - 0{,}4554 = 0{,}4946.$$

Далее, используя ту же таблицу, получаем:

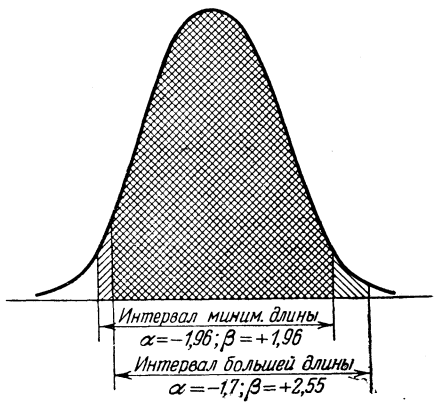
$$\beta_1 = 2{,}55.$$

В этом последнем случае длина интервала равна

$$(\beta_1 - \alpha_1)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = [2{,}55 - (-1{,}7)]\frac{2}{3} = 2{,}83,$$

т. е. она оказалась *больше*, чем в первом случае (черт. 72).

Естественно выбрать числа α и β так, чтобы длина интервала $(\beta - \alpha)$ была *минимальной*. Геометрически очевидно, что наиболее узкий доверительный интервал будет иметь центром a, т. е. абсциссу вершины кривой $n(u;\ 0,\ 1)$, другими словами, следует взять $\alpha = -\beta$, что и было сделано в самом начале и в первом числовом примере. Наиболее короткий 95%-ный доверительный интервал совпадает таким образом с интервалом $I\left(\bar{x} - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.



Черт. 72. Различное расположение доверительных интервалов $(-1{,}96\sigma_{\bar{x}}, +1{,}96\sigma_{\bar{x}})$ и $(-1{,}7\sigma_{\bar{x}}, +2{,}55\sigma_{\bar{x}})$ при одной и той же доверительной вероятности $\gamma = 0{,}95$.

Если теперь мы возьмем другую доверительную вероятность $\gamma = 0{,}99$, то опять-таки с помощью табл. VII приложений найдем другой доверительный интервал, наиболее короткий из интервалов, отвечающих этому значению доверительной вероятности, в виде

$$I'\left(\bar{x} - 2{,}58\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + 2{,}58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Идея разобранного здесь построения доверительных интервалов может быть в общем виде сформулирована следующим образом.

Пусть мы знаем некоторую функцию u, зависящую от данных выборки и оцениваемого параметра θ. Положим, что функция зависит от θ непрерывно и монотонно. Предположим далее, что распределение $u(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$ не зависит от оцениваемого параметра или от других неизвестных параметров. В разобранном нами примере такой функцией была разность $\bar{x} - a$, распределение которой независимо от параметра a. Если эти предположения выполнены, то для каждого уровня доверительной вероятности γ мы можем, пользуясь известным нам распределением величины U, найти такие пределы α_γ и β_γ (не зависящие от данных выборки), что

$$\mathbf{P}(\alpha_\gamma < U < \beta_\gamma) = \gamma.$$

Выбор этих пределов при данном γ вообще не определяется однозначно, но неравенства

$$\alpha_\gamma < u(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) < \beta_\gamma$$

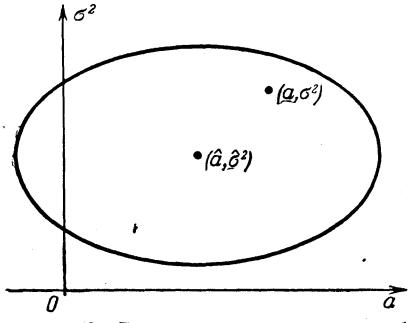
можно в силу монотонности и непрерывности по аргументу θ разрешить относительно θ и записать их в равносильном виде

$$\underline{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n) < \theta < \bar{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где $\underline{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\bar{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — две функции наблюдений (зависящие также от α_γ и β_γ).

Интервал $\bar{I}(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ и будет доверительным интервалом с данной доверительной вероятностью γ.

Метод доверительных интервалов может быть обобщен на случай одновременной оценки нескольких параметров, когда «пространство параметров», т. е. совокупность всевозможных допустимых комбинаций их значений, уже не будет одномерным. Так, в случае одновременной оценки двух параметров a и σ^2 нормальной совокупности «пространство параметров» будет некоторой областью в полуплоскости (a и σ^2).



Черт. 73. Доверительная плоская область при одновременной оценке параметров a и σ^2. Точка $(\hat{a}, \hat{\sigma}^2)$ — центр области — получена по данным выборки. Точка (a, σ^2) — оцениваемое значение параметров a и σ^2.

В этом случае решением проблемы оценки будет являться построение по данным выборки такой *«доверительной плоской области»*, которая с данной вероятностью будет покрывать точку, отвечающую неизвестным значениям $a = a_0$ и $\sigma^2 = \sigma_0^2$ — параметров генеральной совокупности (черт. 73).

Пример 5.4.1. Пусть требуется определить при доверительной вероятности $\gamma = 0{,}95$ доверительные границы генеральной средней высоты a штамповок внутренних колец подшипников, если распределение штамповок по высоте предполагается нормальным со средним квадратическим отклонением $\sigma = 0{,}4$ *мм*.

Путем выборочного обследования определена средняя арифметическая высота 20 колец. Она равна $\bar{x}_1 = 32{,}3$ *мм*.

По табл. VII приложений при $p_z = 1 - \gamma = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$ и $p = 5$ находим, что

$$z_p = \beta = 1{,}96, \quad \alpha = -\beta = -1{,}96.$$

Тогда с помощью равенства (5.4.8) находим:

$$32{,}3 - 1{,}96\frac{0{,}4}{\sqrt{20}} < a < 32{,}3 + 1{,}96\frac{0{,}4}{\sqrt{20}},$$

что равносильно неравенству

$$32{,}12 < a < 32{,}48.$$

Этот интервал и будет в данном случае искомым доверительным интервалом.

5.4.2. Распределение выборочной дисперсии s^2 и среднего квадратического отклонения s. Доверительные интервалы для оценки генеральной дисперсии σ^2 и среднего квадратического отклонения σ. Начнем с вопроса об оценке параметра σ^2 (т. е. дисперсии) при нормальном законе распределения. Как мы уже видели, для этого нужно найти такую функцию, зависящую от данных выборки и оцениваемого параметра, распределение которой не зависит ни от каких неизвестных параметров. Естественнее всего с этой целью рассмотреть эмпирическую дисперсию s^2. Она зависит от выборочных данных, а ее отношение к теоретической дисперсии σ^2 зависит вместе с тем от оцениваемого параметра. Остается рассмотреть распределение s^2, к которому мы и перейдем.

Мы видели в **4.5.3**, что сумма квадратов независимых нормированных нормально распределенных с плотностью $n(z; 0, 1)$ случайных величин следует закону распределения χ^2, плотность которого задается соотношением (4.5.49).

Пусть теперь X представляет случайную величину, распределенную нормально с плотностью $n(x; a, \sigma)$, а $\bar{x}$ и s^2 — средняя арифметическая и дисперсия, полученные из выборочных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ случайной величины X.

Будем исходить из того, что $\bar{x}$ и s^2 оказываются в данном случае независимыми величинами. Доказательства этого важного положения мы не даем [1]). Преобразуем s^2, выражаемую соотношением (5.2.36), следующим образом:

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(x_i - a) - (\bar{x} - a)]^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 - (\bar{x} - a)^2. \tag{5.4.9}$$

Из этого равенства, разрешая его относительно первого члена правой части и разделив после этого обе части полученного равенства на $\frac{\sigma^2}{n}$, получим:

$$\frac{ns^2}{\sigma^2} + \left(\frac{\bar{x} - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x - a}{\sigma}\right)^2. \tag{5.4.10}$$

Обозначим члены последнего равенста буквами

$$E + H = L, \tag{5.4.11}$$

а производящие функции обеих частей этого равенства через

$$m_{E+H}(t) = m_L(t). \tag{5.4.12}$$

Из ранее принятого положения о независимости распределений $\bar{x}$ и s^2 следует, что E и H также независимо распределены. Поэтому с помощью (3.6.15) равенство (5.4.12) может быть приведено к виду

$$m_E(t)m_H(t) = m_L(t). \tag{5.4.13}$$

Так как L представляет сумму n квадратов независимых между собой нормально распределенных и нормированных величин, то производящую функцию L мы найдем согласно **4.5.3** как производящую функцию величины χ^2 с n степенями свободы

$$m_L(t) = m_{\chi^2}(t) = (1 - 2t)^{-\frac{n}{2}}.$$

Точно так же производящая функция величины H, представляющей квадрат одной нормально распределенной и нормированной случайной величины, будет иметь вид

$$m_H = (1 - 2t)^{-\frac{1}{2}}.$$

Поэтому, принимая во внимание (5.4.13), получим:

$$m_E(t) = m_{\frac{ns^2}{\sigma^2}}(t) = \frac{(1 - 2t)^{-\frac{n}{2}}}{(1 - 2t)^{-\frac{1}{2}}} = (1 - 2t)^{-\frac{n-1}{2}}. \tag{5.4.14}$$

Отсюда следует, что *если выборка производится из нормальной совокупности с плотностью* $n(x; a, \sigma)$, *то величина* $E = \frac{ns^2}{\sigma^2}$ *имеет* χ^2*-распределение с числом степеней свободы* $k = n - 1$. Сумма $ns^2 = \sum(x_i - \bar{x})^2$ в данном случае представляет сумму квадратов n зависимых величин $y_i = x_i - \bar{x}$; эта зависимость выражается в том, что y_i удовлетворяют уравнению линейной связи

$$\sum y_i = \sum(x_i - \bar{x}) = 0.$$

---

[1]) См., например, Г. Крамер, Математические методы статистики, ИЛ, М., 1948, стр. 421.

Наличие этой связи и уменьшает на единицу число степеней свободы в законе распределения по сравнению с тем случаем, когда n величин были независимы друг от друга.

Плотность самой величины $s^2 = \frac{\sigma^2 E}{n}$ можно получить, используя правило (4.4.2) преобразования законов распределения, рассмотренное в **4.4.1.** При этом в плотности вероятности (4.5.49) величины χ^2 с $n-1$ степенями свободы переменное x надо заменить на $\frac{n}{\sigma^2}x$ и умножить все выражение на $\frac{n}{\sigma^2}$. Тогда получим:

$$\varphi_{s^2}(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}}\left(\frac{n}{\sigma^2}x\right)^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-\frac{nx}{2\sigma^2}}\frac{n}{\sigma^2} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(\frac{n}{2\sigma^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} x^{\frac{n-3}{2}}\cdot e^{-\frac{nx}{2\sigma^2}}. \qquad (5.4.15)$$

Отсюда легко получить моменты различных порядков для величины s^2. Впрочем, зная, что при k степенях свободы согласно (4.5.50) и (4.5.51)

$$\mathbf{M}\chi^2 = k \quad \text{и} \quad \sigma^2_{\chi^2} = \mathbf{D}\chi^2 = 2k$$

и, следовательно, при $n-1$ степенях свободы

$$\mathbf{M}(E) = n-1 \quad \text{и} \quad \sigma^2_E = 2(n-1),$$

мы на основании теорем (3.3.12) и (3.4.15) найдем:

$$\mathbf{M}s^2 = \frac{\sigma^2}{n}\mathbf{M}(E) = \frac{n-1}{n}\sigma^2,$$

$$\sigma^2_{s^2} = \frac{\sigma^4}{n^2}\sigma^2_E = \frac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4,$$

$$\sigma_{s^2} = \frac{\sqrt{2(n-1)}}{n}\sigma^2,$$

что совпадает с ранее полученными соотношениями (5.3.60), (5.3.74) и (5.3.75).

Мы видели, что функция $E = \frac{ns^2}{\sigma^2}$, с одной стороны, как это следует из (5.4.10), зависит от данных выборки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и от оцениваемого параметра σ^2, а с другой стороны, единственный параметр, от которого зависит распределение (4.5.49), есть известное нам число степеней свободы $k = n-1$. Зависимость E от σ^2 является монотонной и непрерывной. Отсюда следует, что согласно сказанному в **5.4.1** эту функцию можно использовать для построения доверительных интервалов для оценки σ^2, к которой и перейдем.

Пусть случайная величина X будет нормально распределена с дисперсией σ^2 и пусть s^2 представляет эмпирическую дисперсию, образованную по n выборочным значениям этой случайной величины. Тогда *доверительные границы для* σ^2, например, с 95%-ной надежностью, т. е. при $\gamma = 0{,}95$, могут быть построены следующим образом.

Из табл. VIII приложений для числа $n-1$ степеней свободы находим два значения χ^2 (которые обозначим через χ^2_1 и χ^2_2) таких, что вероятность $\chi^2 < \chi^2_1$ и вероятность $\chi^2 > \chi^2_2$ будут каждая равны 0,025. Из (5.4.14) следует, что тогда вероятность того, что величина $\frac{ns^2}{\sigma^2}$ окажется в границах от χ^2_1 до χ^2_2, равна 0,95, т. е.

$$\mathbf{P}\left(\chi^2_1 < \frac{ns^2}{\sigma^2} < \chi^2_2\right) = 0{,}95,$$

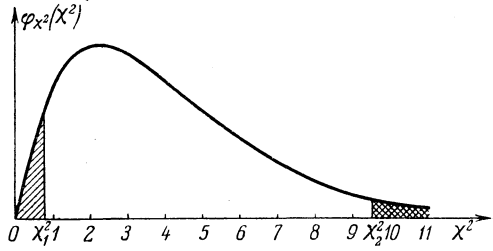
или, что с той же вероятностью можно ожидать выполнения следующих неравенств:

$$\frac{ns^2}{\chi_2^2} < \sigma^2 < \frac{ns^2}{\chi_1^2}. \qquad (5.4.16)$$

Два числа $\frac{ns^2}{\chi_2^2}$ и $\frac{ns^2}{\chi_1^2}$ определяют доверительные границы для σ^2.

Заметим, что в данном случае в противоположность случаям, рассмотренным в **5.4.1**, не только положение центра доверительного интервала $\bar{I}$, но и длина его будут меняться от выборки к выборке.

На черт. 74 показаны доверительные границы χ_1^2 и χ_2^2 и соответствующие им вероятности, причем вероятность $\mathbf{P}(\chi^2 < \chi_1^2)$ заштрихована обычной штриховкой, а вероятность $\mathbf{P}(\chi^2 > \chi_2^2)$ — двойной штриховкой. Промежуток $\bar{I}(\chi_1^2, \chi_2^2)$ между доверительными границами представляет 95%-ный доверительный интервал для оценки σ^2.



Черт. 74. Построение доверительных границ для оценки параметра σ^2 по эмпирической дисперсии s^2.

Пример 5.4.2. Пусть требуется определить при доверительной вероятности в 0,96 доверительные границы дисперсии высоты штамповок внутренних колец подшипников по данным пробы объема 20 штук, приведенной в примере 5.2.1, если распределение штамповок по высоте предполагается нормальным.

В примере 5.2.5 найдена средняя арифметическая высота 20 колец. Она равна $\bar{x} = 32{,}2975$ *мм*.

По формуле (5.2.39), положив $c = 32{,}30$ *мк*, находим:

$$20s^2 = 0{,}4900 + 0{,}3600 + 0{,}3249 + 0{,}3136 + 0{,}0169 + 0{,}0025 + 0{,}0016 +$$
$$+ 0{,}0004 + 0{,}0004 + 0{,}0001 + 0{,}0000 + 0{,}0036 + 0{,}0256 + 0{,}0289 + 0{,}0324 +$$
$$+ 0{,}0961 + 0{,}1089 + 0{,}1444 + 0{,}1936 + 0{,}3844 - 20\,(32{,}2975 - 32{,}30)^2 =$$
$$= 2{,}5283 - 0{,}0001 = 2{,}5282 \text{ мм}^2.$$

По табл. VIII приложений при числе степеней свободы $k = 20 - 1 = 19$ находим при $p = 0{,}02$ значение $\chi_1^2 = 33{,}7$ и при $p = 0{,}98$ значение $\chi_2^2 = 8{,}6$.

Неравенство (5.4.16) для данного случая можно записать в виде

$$\frac{2{,}5282}{33{,}7} < \sigma^2 < \frac{2{,}5282}{8{,}6},$$

что равносильно следующему неравенству:

$$0{,}0750 \text{ мм}^2 < \sigma^2 < 0{,}294 \text{ мм}^2.$$

Таким образом, совместимые с данным опытом значения σ^2 лежат в пределах интервала от 0,0750 до 0,294.

Оценка для параметра σ^2 с помощью доверительного интервала $\left(\frac{ns^2}{\chi_2^2}, \frac{ns^2}{\chi_1^2}\right)$ дает в то же время доверительный интервал $\left(\frac{\sqrt{n}s}{\chi_2}, \frac{\sqrt{n}s}{\chi_1}\right)$ для оценки параметра σ с той же доверительной вероятностью. Обозначая последнюю через $p = 1 - \alpha$, будем иметь:

$$\mathbf{P}(z_1 s < \sigma < z_2 s) = p = 1 - \alpha, \qquad (5.4.17)$$

где $z_1 = \frac{\sqrt{n}}{\chi_2}$ и $z_2 = \frac{\sqrt{n}}{\chi_1}$; мы определяем χ_1 и χ_2 таким образом, чтобы

$$\mathbf{P}\left(\frac{\sigma}{s} > z_2\right) = \mathbf{P}\left(\frac{ns^2}{\sigma^2} < \chi_1^2\right) = \frac{1-p}{2} = \frac{\alpha}{2}, \tag{5.4.18}$$

так что

$$\mathbf{P}\left(\frac{ns^2}{\sigma^2} > \chi_1^2\right) = \frac{1+p}{2} = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

и

$$\mathbf{P}\left(\frac{\sigma}{s} \leqslant z_1\right) = \mathbf{P}\left(\frac{\sigma^2}{s^2} < \frac{n}{\chi_2^2}\right) = \mathbf{P}\left(\frac{ns^2}{\sigma^2} > \chi_2^2\right) = \frac{1-p}{2} = \frac{\alpha}{2}. \tag{5.4.19}$$

Для определения z_1 и z_2 по данной доверительной вероятности p без предварительного вычисления величин χ_1 и χ_2 можно использовать табл. XV приложений.

В этой таблице для значений объемов выборки n от 2 до 200 и доверительной вероятности p 0,999; 0,998; 0,99; 0,98; 0,95 и 0,90 даны нижние z_1 и верхние z_2 границы интервала $z_1 s < \sigma < z_2 s$.

Пример 5.4.3. Пусть теперь требуется по условиям того же примера 5.2.1 определить при доверительной вероятности 0,98 доверительные границы среднего квадратического отклонения высоты штамповок внутренних колец подшипников по данным пробы объема 20 штук, предполагая попрежнему распределение штамповок по высоте нормальным.

Как мы видели в примере 5.4.2,

$$\bar{x} = 32{,}2975, \quad s^2 = 0{,}1264 \quad \text{и} \quad s = 0{,}36.$$

Из (5.4.17) в нашем случае имеем:

$$p = 1 - \alpha = 0{,}98,$$

откуда

$$\alpha = 0{,}02.$$

По табл. XV приложений при $n = 20$ находим:

$$z_1 = 0{,}725, \quad z_2 = 1{,}578.$$

Таким образом, совместимые с данными наблюдения значения σ лежат в пределах от $0{,}725 \cdot 0{,}36 = 0{,}26$ до $1{,}578 \cdot 0{,}36 = 0{,}57$.

Отметим, что для небольших значений $k = n - 1$ наблюдается резкая асимметрия в расположении верхней и нижней доверительных границ. Так, при $n = 4$, $k = 3$ и $p = 0{,}98$ имеем $z_1 = 0{,}514$, тогда как $z_2 = 5{,}110$. Это указывает на резкую несимметричность в самом законе распределения величины $s = \sqrt{s^2}$, в силу которой значения s, меньшие более чем в пять раз σ, имеют такую же вероятность (равную 0,01), как и значения s, бóльшие σ в два и более раз.

Плотность величины $s = \sqrt{s^2}$ мы получим из плотности (5.4.15) величины s^2, производя в ней опять-таки с помощью (4.4.2) замену x на x^2 и умножая на $2x$ (в данном случае $u = \sqrt{x}$ и $x(u) = u^2$). Таким образом, мы получим:

$$\varphi_s(x) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(\frac{n}{2\sigma^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} x^{n-2} e^{-\frac{nx^2}{2\sigma^2}}. \tag{5.4.20}$$

Отсюда можно получить точные выражения для моментов из соотношения

$$Ms^r = \int_0^\infty \varphi_s(x)\, x^r\, dx. \tag{5.4.21}$$

Интеграл (5.4.21) выражается через гамма-функцию

$$\mathbf{M}s^r = \left(\frac{2\sigma^2}{n}\right)^{\frac{r}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+r-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}. \tag{5.4.22}$$

В частности,

$$\mathbf{M}s = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sqrt{\frac{2\sigma^2}{n}} = H_n\sigma, \tag{5.4.23}$$

где

$$H_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sqrt{\frac{2}{n}} = 1 - \frac{3}{4n} - \frac{7}{32n^2} + \ldots \tag{5.4.24}$$

Далее

$$\mathbf{M}s^2 = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\frac{2\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

и потому

$$\mathbf{D}s = \sigma_s^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2 - H_n^2\sigma^2 = \sigma^2\left(\frac{n-1}{n} - H_n^2\right). \tag{5.4.25}$$

Мы видим, что характеристика s дает смещенную, несколько преуменьшенную оценку для параметра σ, так как множитель H_n будет меньше единицы, как это видно из табл. 5.4.1.

Таблица 5.4.1

n	H_n	n	H_n	n	H_n	n	H_n
4	0,7979	13	0,9410	30	0,9748	75	0,9900
5	0,8407	14	0,9453	35	0,9784	80	0,9906
6	0,8686	15	0,9490	40	0,9811	85	0,9911
7	0,8882	16	0,9523	45	0,9832	90	0,9916
8	0,9027	17	0,9551	50	0,9849	95	0,9921
9	0,9139	18	0,9576	55	0,9863	100	0,9925
10	0,9227	19	0,9599	60	0,9874		
11	0,9300	20	0,9619	65	0,9884		
12	0,9359	25	0,9696	70	0,9892		

Из табл. 5.4.1, в частности, следует, что при $n > 19$ это смещение меньше $\frac{1}{25}\sigma$.

При небольших n следует корректировать оценку s, деля ее на множитель H_n, другими словами, беря вместо s оценку

$$s^* = \frac{s}{H_n}. \tag{5.4.26}$$

Впрочем, при малых n доверительный интервал, оценивающий σ, будет, как правило, настолько широк, что переход от s к s^* вряд ли можно оправдать.

Укажем еще на другой случай нахождения доверительных границ для σ^2, когда по нескольким выборкам, средние арифметические которых могут значительно отличаться друг от друга, но дисперсии которых имеется основание считать различающимися несущественно (лишь в силу случайности выборки), представляется необходимым дать оценку дисперсии генеральной совокупности. Такая задача возникает в том случае, когда, например, по двум выборкам, сделанным при различных уровнях настройки станка, необходимо оценить рассеивание размеров, вызываемое данным технологическим процессом. Вычисление

дисперсии по объединенным данным в этом случае повлекло бы за собой существенную ошибку.

Пример 5.4.4. 6 марта 1951 г. была взята «проба» из продукции той же горизонтально-ковочной машины, что и в примере 5.2.1, в количестве 20 штук, т. е. были отобраны последовательно отштампованные на этой машине штамповки внутренних колец шарикоподшипников того же типа, что в примере 5.2.1. Кольца были охлаждены до температуры помещения, после чего была измерена их высота, которая оказалась следующей:

Таблица 5.4.2

№ колец в порядке обработки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Высота в *мм* . . .	31,44	32,22	31,98	31,88	31,44	31,17	31,68	31,28	31,72	31,58
№ колец в порядке возрастания размера	4	20	18	16	5	2	10	3	11	8
№ колец в порядке обработки	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Высота в *мм* . . .	31,87	32,12	31,04	31,87	31,62	31,73	31,48	31,88	31,96	31,49
№ колец в порядке возрастания размера	14	19	1	13	9	12	6	15	17	7

Из табл. 5.4.2 видно, что медиана m_e эмпирического распределения равна

$$m_e = \frac{31{,}68 + 31{,}72}{2} = 31{,}70 \text{ мм},$$

где 31,68 и 31,72 — кольца, имеющие соответственно № 10 и № 11 при расположении их в порядке возрастания размеров.

Найдем среднюю арифметическую высоту колец выборки по формуле (5.2.35), приняв за «ложный нуль» медиану так, что

$$c = m_e = 31{,}7 \text{ мм},$$

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{20}(-0{,}26 + 0{,}52 + 0{,}28 + 0{,}18 - 0{,}26 - 0{,}53 - 0{,}02 - 0{,}42 +$$
$$+ 0{,}02 - 0{,}12 + 0{,}17 + 0{,}42 - 0{,}66 + 0{,}17 - 0{,}08 + 0{,}03 - 0{,}22 + 0{,}18 +$$
$$+ 0{,}26 - 0{,}21) + 31{,}70 = -\frac{0{,}55}{20} + 31{,}70 = 31{,}672 \text{ мм}.$$

Средняя арифметическая в этой выборке значительно отличается от средней арифметической в выборке, приведенной в примере 5.2.1, а именно на

$$\bar{x}_2 - \bar{x}_1 = 32{,}298 - 31{,}672 = 0{,}626 \text{ мм}.$$

Требуется при доверительной вероятности 0,96 найти доверительные границы для дисперсии σ^2 по обеим выборкам. Распределение колец по высоте предполагается нормальным.

В данном случае выборки существенно различаются по средним арифметическим, и нельзя просто объединить данные обеих выборок. Поэтому придется отдельно вычислить эмпирическую дисперсию данной выборки и, затем, использовав результат, полученный в примере 5.4.3, решить поставленную задачу.

Эмпирическую дисперсию данной выборки найдем по формуле (5.2.39):

$$s_1^2 = \frac{1}{20}(0{,}0676 + 0{,}2704 + 0{,}0784 + 0{,}0324 + 0{,}0676 + 0{,}2809 + 0{,}0004 + 0{,}1764 + 0{,}0004 + 0{,}0144 + 0{,}0289 + 0{,}1764 + 0{,}4356 + 0{,}0289 + 0{,}0064 + 0{,}0009 + 0{,}0484 + 0{,}0324 + 0{,}0676 + 0{,}0441) - (31{,}6725 - 31{,}7)^2 =$$

$$= \frac{1{,}8585 - 0{,}0151}{20} = \frac{1{,}8434}{20} = 0{,}0922 \text{ мм}^2.$$

Таким образом,

$$n_1 s_1^2 = 1{,}8434 \text{ мм}^2,$$

$$n_2 s_2^2 = 2{,}5282 \text{ мм}^2 \text{ (из примера 5.4.2)},$$

$$n \cdot S^2 = \sum_{i=1}^{n} n_i s_i^2 = 4{,}3716 \text{ мм}^2.$$

Неравенство (5.4.16) для этого примера будет иметь вид

$$\frac{4{,}3716}{\chi_2^2} < \sigma^2 < \frac{4{,}3716}{\chi_1^2}.$$

Так как в нашем случае суммарное число степеней свободы $n_1 - 1 + n_2 - 1 = n - 2 = 40 - 2 = 38$, т. е. больше 30, то значения χ_1^2 и χ_2^2 найдем по формуле (4.5.67) с помощью табл. IV функции Лапласа. Для доверительной вероятности 0,96 будем иметь:

$$\chi_1^2 = \frac{(z_1 + \sqrt{2k_\Sigma - 1})^2}{2} = \frac{(-2{,}06 + \sqrt{2 \cdot 38 - 1})^2}{2} = \frac{6{,}60^2}{2} = \frac{43{,}56}{2} = 21{,}78,$$

$$\chi_2^2 = \frac{(z_2 + \sqrt{2k_\Sigma - 1})^2}{2} = \frac{(2{,}06 + \sqrt{2 \cdot 38 - 1})^2}{2} = \frac{10{,}72^2}{2} = \frac{114{,}92}{2} = 57{,}46.$$

Таким образом, мы получим:

$$\frac{4{,}3716}{57{,}46} < \sigma^2 < \frac{4{,}3716}{21{,}78},$$

что равносильно неравенству

$$0{,}0761 \text{ мм}^2 < \sigma^2 < 0{,}2007 \text{ мм}^2.$$

Таким образом, совместное рассмотрение двух «проб», взятых из одинаковой продукции одной и той же машины, позволило значительно сузить доверительные границы для теоретической дисперсии высоты штамповок колец.

Аналогично нужно поступать и при любом числе выборок, объединяя их для оценки параметра σ^2, если гипотеза постоянства дисперсии может считаться согласующейся с опытными данными. В дальнейшем мы укажем способ проверки этой гипотезы.

5.4.3. Построение доверительных интервалов для σ с помощью выборочного размаха R_n. Другой более грубый, но связанный с меньшими вычислениями способ построения доверительных интервалов для σ основан на законе распределения отношения $\frac{R_n}{\sigma}$, выведенном нами в **5.3.10** (см. (5.3.155)).

Мы видели, что для двух положительных чисел t_1 и t_2

$$\mathbf{P}(t_1, t_2) = \mathbf{P}\left(t_1 < \frac{R_n}{\sigma} < t_2\right) = \mathbf{P}_n(t_2) - \mathbf{P}_n(t_1), \qquad (5.4.27)$$

где через $\mathbf{P}_n(t)$ мы обозначили функцию, стоящую в правой части (5.3.155).

Написанное выражение вероятности $\mathbf{P}_n(t_1, t_2)$ можно записать в другом виде:

$$\mathbf{P}_n(t_1, t_2) = \mathbf{P}\left(\frac{R_n}{t_2} < \sigma < \frac{R_n}{t_1}\right). \tag{5.4.28}$$

Если мы подберем t_1 и t_2 так, чтобы

$$\mathbf{P}_n(t_2) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

и

$$\mathbf{P}_n(t_1) = \frac{\alpha}{2},$$

где α — малое положительное число, то интервал

$$\left(\frac{R_n}{t_2}, \frac{R_n}{t_1}\right)$$

будет доверительным интервалом для σ с доверительной вероятностью $1 - \alpha$. Например, беря $\alpha = 0{,}02$ (2%) при $n = 7$ по табл. XIV приложений, учитывая, что $1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}99$ и $\frac{\alpha}{2} = 0{,}01$, находим:

$$\mathbf{P}\left(\frac{R_n}{4{,}88} < \sigma < \frac{R_n}{1{,}05}\right) = \mathbf{P}\,(0{,}20R < \sigma < 0{,}95\,R).$$

Найденный интервал отвечает доверительной вероятности 98% ($99 - 1 = 98$).

Если мы располагаем измеренными размахами в m выборках объема n, то, как мы видели в **5.3.11**, средняя арифметическая из размахов приближенно следует (при достаточно больших m) нормальному закону так, что (см. (5.3.161))

$$\mathbf{P}\left(z_1 < \frac{\frac{\overline{R}}{\alpha_n} - \sigma}{\frac{\sigma\gamma_n}{\sqrt{m}}} < z_2\right) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1).$$

Написанное в скобках неравенство может быть разрешено относительно σ и записано в следующем виде:

$$a_n = \frac{\overline{R}}{\alpha_n} \cdot \frac{1}{1 + z_2\frac{\gamma_n}{\sqrt{m}}} < \sigma < \frac{\overline{R}}{\alpha_n} \cdot \frac{1}{1 + z_1\frac{\gamma_n}{\sqrt{m}}} = b_n. \tag{5.4.29}$$

Выбирая z_1 и z_2 так, чтобы

$$\frac{1}{2} + \Phi(z_2) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

и

$$z_1 = -z_2 \qquad (z_1 \text{ — отрицательно}),$$

мы получим, следовательно, доверительный интервал (a_n, b_n) для σ, отвечающий доверительной вероятности $1 - \alpha$.

Например, для $n = 3$, $m = 20$ и $\alpha = 0{,}05$ (5%) будем иметь такие уравнения:

$$\Phi(z_2) = \frac{1 - 0{,}05}{2} = 0{,}425,$$

откуда по табл. IV приложений находим:

$$z_2 = 1{,}44 \quad \text{и} \quad z_1 = -1{,}44.$$

По табл. XIV приложений для $n = 3$

$$\gamma_n = \frac{\sigma_{R_n}}{\mathbf{M}\left(\frac{R_n}{\sigma}\right)} = 0{,}525,$$

$$1 + z_2 \frac{\gamma_n}{\sqrt{m}} = 1 + 1{,}44\ \frac{0{,}525}{\sqrt{20}} = 1{,}17,$$

$$1 + z_1 \frac{\gamma_n}{\sqrt{m}} = 1 - 1{,}44\ \frac{0{,}525}{\sqrt{20}} = 0{,}83.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\left(\frac{R}{a_n}\ \frac{1}{1{,}17} < \sigma < \frac{R}{a_n} \cdot \frac{1}{0{,}83}\right) = \mathbf{P}\left(0{,}85\frac{R}{a_n} < \sigma < 1{,}20\ \frac{R}{a_n}\right) = 0{,}95.$$

5.4.4. Распределение Стьюдента и доверительные интервалы для оценки генеральной средней a. Метод получения доверительных интервалов для оценки генеральной средней a нормальной совокупности, рассмотренный в **5.4.1**, может быть использован лишь в том случае, когда параметр σ генеральной совокупности нам известен (например, на основе других выборок). В других случаях функция

$$u = \frac{\bar{x} - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}, \tag{5.4.30}$$

которой мы пользовались в **5.4.1**, зависит, кроме оцениваемого параметра a, еще также от неизвестного параметра σ, а потому не может быть использована для построения доверительного интервала для оценки a. Заменяя же в (5.4.30) теоретический параметр σ выборочной оценкой $\bar{s}$ или s, мы перейдем уже к другой функции

$$t = \frac{\bar{x} - a}{\frac{\bar{s}}{\sqrt{n}}}, \tag{5.4.31}$$

закон распределения которой, особенно при малых значениях $n\ (n < 30)$, довольно существенно отличается от нормального закона распределения величины u. Мы увидим, что введенная таким образом функция t действительно может быть использована для оценки a. Мало того, можно показать, что получаемая этим путем оценка в некотором смысле будет наилучшей, так как она исчерпывает всю информацию о величине параметра a, которая дается выборкой. Это последнее обстоятельство будет подробно рассмотрено далее.

Использование величины t для оценки среднего было предложено (первоначально в другой форме) английским статистиком В. Госсетом, более известным под псевдонимом «Стьюдент». Он получил для величины t закон распределения, носящий теперь его имя.

При выводе распределения Стьюдента мы воспользуемся следующей теоремой, которая будет нами использована неоднократно.

Теорема. *Пусть случайная величина t представляет частное*

$$t = \frac{Z\sqrt{k}}{V}, \tag{5.4.32}$$

где Z — нормально распределенная величина с законом $N(z; 0, 1)$, V — независимая от Z величина и V^2 распределена по закону χ^2 с k степенями свободы.

При этих условиях плотность распределения t имеет вид

$$s_k(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{k\pi}}\left(1+\frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} = B_k\left(1+\frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}, \quad -\infty < t < \infty, \tag{5.4.33}$$

где

$$B_k = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{k\pi}}.$$

Закон распределения (5.4.33) и называется *законом распределения Стьюдента* с k степенями свободы. Следовательно, функция распределения Стьюдента имеет вид

$$S_k(t_1) = \mathbf{P}(t < t_1) = \int_{-\infty}^{t_1} s_k(t)\,dt. \tag{5.4.34}$$

Доказательство этой теоремы разобьем на несколько этапов: 1) плотность величины Z будет:

$$\varphi_1(z) = n(z;\ 0;\ 1) = \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}; \tag{5.4.35}$$

2) плотность $\psi(u)$ величины $U = \frac{V}{\sqrt{k}} = \sqrt{\frac{V^2}{k}}$ запишется согласно сделанному предположению как плотность величины $\sqrt{\frac{\chi^2}{k}}$; поэтому, используя (4.5.65), мы будем иметь:

$$\psi(u) = \frac{2\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} u^{k-1} e^{-\frac{ku^2}{2}} \tag{5.4.36}$$

(в (4.5.65) мы заменили x на u и положили $\sigma = 1$); 3) так как величины Z и $\sqrt{\frac{V^2}{k}}$ независимы, то их совместная плотность $\varphi(z, u)$ равна произведению плотностей (5.4.35) и (5.4.36):

$$\varphi(z, u) = \varphi_1(z)\psi(u) = C_k e^{-\frac{z^2}{2}-\frac{ku^2}{2}} u^{k-1}, \quad \begin{matrix} -\infty < z < \infty \\ 0 < u < \infty \end{matrix} \tag{5.4.37}$$

где

$$C_k = \frac{2\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{2\pi}}; \tag{5.4.38}$$

4) найдем теперь вероятность

$$S_k(t_1) = \mathbf{P}(t < t_1) = \mathbf{P}\left(\frac{Z}{U} < t_1\right) = \mathbf{P}(Z < t_1 U).$$

Эту вероятность можно рассматривать как вероятность случайной точке N с координатами Z и U, распределенными по плоскости с плотностью $\varphi(z, u)$, попадать в область $G(t_1)$, определяемую неравенством

$$z < t_1 u.$$

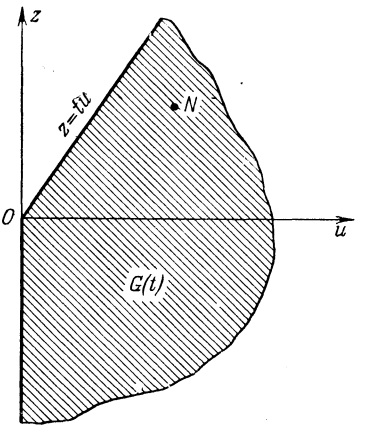
Область $G(t_1)$ представляет часть плоскости, ограниченной отрицательной полуосью оси z и лучом $z = t_1 u$, выходящим из начала координат (черт. 75).

Таким образом,

$$S_k(t_1) = \mathbf{P}[N \subset G(t_1)] = \iint\limits_{G(t_1)} \varphi(z, u)\, dz\, du =$$

$$= C_k \int_0^\infty du \int_{-\infty}^{t_1 u} \varphi(z, u)\, dz =$$

$$= C_k \int_0^\infty e^{-\frac{ku^2}{2}} u^{k-1}\, du \int_{-\infty}^{t_1 u} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz; \qquad (5.4.39)$$



Черт. 75. Геометрическая интерпретация функции $S_k(t)$ распределения Стьюдента: $S_k(t) = \mathbf{P}[N \subset G(t)]$.

5) найдем далее $s_k(t_1) = S_k'(t_1)$, дифференцируя по t_1 справа (5.4.39) под знаком интеграла (что, как можно убедиться, представляет законную операцию).

Тогда имеем:

$$s_k(t_1) = S_k'(t_1) = C_k \int_0^\infty e^{-\frac{ku^2}{2}} u^{k-1} \frac{d}{dt_1} \int_{-\infty}^{t_1 u} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz\, du =$$

$$= C_k \int_0^\infty e^{-\frac{ku^2}{2}} u^{k-1} e^{-\frac{t_1^2 u^2}{2}}\, u\, du = C_k \int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2}(k+t_1^2)} u^{k-1} u\, du. \qquad (5.4.40)$$

Сделав подстановку

$$\frac{u^2}{2}(k + t_1^2) = \xi, \quad u = \left(\frac{2\xi}{k+t_1^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

откуда $u\, du = \dfrac{d\xi}{k+t_1^2}$, получим из (5.4.40):

$$s_k(t_1) = C_k \int_0^\infty e^{-\xi} \left(\frac{2\xi}{k+t_1^2}\right)^{\frac{k-1}{2}} \frac{d\xi}{k+t_1^2} = \frac{2^{\frac{k-1}{2}} C_k}{(k+t_1^2)^{\frac{k+1}{2}}} \int_0^\infty e^{-\xi} \xi^{\frac{k+1}{2}}\, d\xi. \qquad (5.4.41)$$

Но

$$\int_0^\infty e^{-\xi} \xi^{\frac{k-1}{2}}\, d\xi = \int_0^\infty e^{-\xi} \xi^{\frac{k+1}{2}-1}\, d\xi = \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)$$

и потому из (5.4.41) и (5.4.38) следует:

$$s_k(t_1) = \frac{2^{\frac{k-1}{2}} C_k}{(k+t_1^2)^{\frac{k+1}{2}}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) = \frac{2^{\frac{k+1}{2}} \left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \sqrt{2\pi}\, (k+t_1^2)^{\frac{k+1}{2}}} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi k}\, \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \left(1 + \frac{t_1^2}{k}\right)^{\frac{k+1}{2}}} = B_k \left(1 + \frac{t_1^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}},$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь распределение величины t — отношения (5.4.31) Стьюдента.

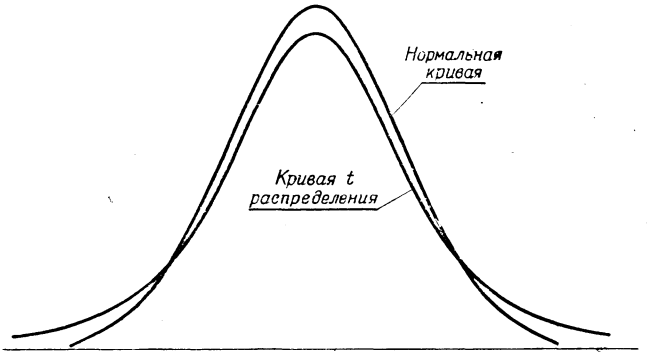
Эту величину можно преобразовать следующим образом:

$$t=\frac{\bar{x}-a}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}}=\frac{\frac{\bar{x}-a}{\sigma}\sqrt{n}}{\frac{\sqrt{n}\,s}{\sigma}}\sqrt{n-1}=\frac{Z\sqrt{n-1}}{V},$$

где $Z=\frac{\bar{x}-a}{\sigma}\sqrt{n}$ — нормированное отклонение $\bar{x}$ — подчиняется нормальному закону $N(z;\ 0,\ 1)$, а $V^2=\frac{ns^2}{\sigma^2}$, как мы знаем из (5.4.14), имеет χ^2-распределение с $(n-1)$ степенями свободы. Применяя доказанную теорему (5.4.33), мы найдем, что t подчиняется закону $s_{n-1}(t_1)$ и

$$\mathbf{P}(t<t_1)=S_{n-1}(t_1).$$

Плотности закона Стьюдента $s_k(t_1)$ имеют симметричную относительно оси форму (черт. 76) и внешним видом напоминают нормальные кривые. Однако



Черт. 76. Кривая t-распределения и нормальная кривая распределения.

они значительно медленнее спадают к оси t при $|t|\to\infty$, особенно при малых значениях k.

При $k=1$

$$s_1(t_1)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}(1+t_1^2)^{-1}=\frac{1}{\pi(1+t_1^2)},\qquad(5.4.42)$$

и мы получаем закон (5.3.97) Коши.

При $k\to\infty$ функция $\left(1+\frac{t_1^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}$ имеет пределом $e^{-\frac{t_1^2}{2}}$, а множитель B_k стремится к $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Поэтому при $k\to\infty$

$$S_k(t_1)\to N(t_1,\ 0,\ 1)$$

и, как видно из табл. XVI, XVII и XVIII приложений, при $n>30$ практически не отличается от $N(t_1;\ 0;\ 1)$ в очень широкой области значений t_1.

В табл. XVI приложений приводятся значения функции $S_k(t)=P_t$ для значений $k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 19$ и $k=\infty$ в интервале изменения t от 0 до 6. Эти значения соответствуют площади под кривой $s_k(t)$, простирающейся над проме-

жутком $(-\infty, t)$ оси t (черт. 77). Для получения значений $S_k(t)$ при отрицательных t можно воспользоваться вытекающим из симметричности кривой соотношением

$$S_k(t) = 1 - S_k(-t). \tag{5.4.43}$$

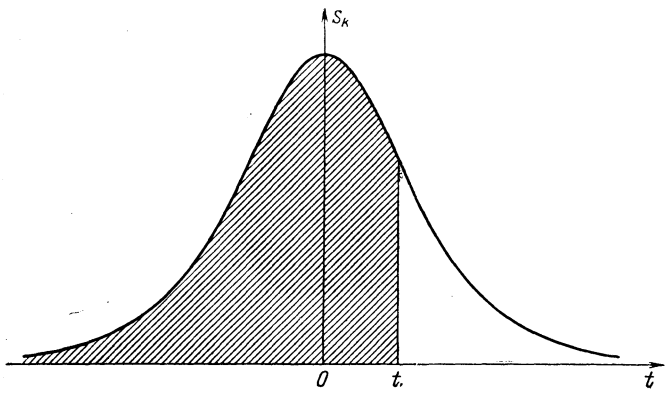
Например,

$$S_5(-3) = 1 - S_5(3) = 1 - 0{,}985 = 0{,}015.$$

В табл. XVII приложений даны для тех же, что в табл. XVI приложений, значений k и t вероятности

$$\frac{q}{100} = 1 - 2B_k \int_0^t \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} dt.$$

Большое значение для приложений имеют так называемые q-процентные пределы для t, т. е. такие, что при $t_{q,k} > 0$ за пределами промежутка



Черт. 77. Площадь под кривой $s_k(t)$ распределения Стьюдента, отвечающая функции $S_k(t)$ распределения.

$(-t_{q,k}, +t_{q,k})$ остается лишь q процентов всей площади кривой $s_k(t)$, или, другими словами, имеет место неравенство

$$\mathbf{P}(|t| > t_{q,k}) = \frac{q}{100} = Q = \int_{-\infty}^{-t_{q,k}} s_k(t)\,dt + \int_{t_{q,k}}^{\infty} s_k(t)\,dt =$$

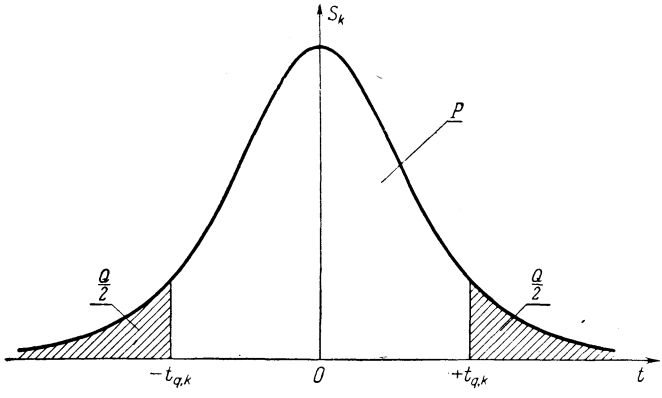
$$= 2\int_{t_{q,k}}^{\infty} s_k(t)\,dt = 2\left(1 - \int_{-\infty}^{t_{q,k}} s_k(t)\,dt\right) = 2[1 - S_k(t_{q,k})].$$

Очевидно (черт. 78),

$$\mathbf{P}(-t_{q,k} < t < t_{q,k}) = 1 - Q = P = 2S_k(t_{q,k}) - 1. \tag{5.4.44}$$

В табл. XVIII приложений даны q-процентные пределы $t_{q,k}$, определяемые соотношением (5.4.44), для значений $q = 10$; 5; 2,5; 2; 1; 0,5; 0,3; 0,2; 0,1 и охватывающие весь диапазон изменений k (от 1 до ∞). В последней строке этой таблицы (строка для значения $k = \infty$) помещены q-процентные пределы, отвечающие нормальному закону распределения. Рассматривая таблицу, видим, что значения $t_{q,k}$ для малых значений k значительно больше соответствующих $t_{q,\infty}$

(особенно при малых q), что связано с указанной выше особенностью кривых $s_k(t)$ медленнее приближаться к оси t при $t \to \infty$, чем нормальная кривая.



Черт. 78. Доверительный интервал $(-t_{q,k}, +t_{q,k})$ для оценки нормированного отклонения $\frac{\bar{x}-a}{\bar{s}/\sqrt{n}}$ по методу Стьюдента и соответствующая ему доверительная вероятность P $(k=n-1)$.

Перейдем к тому, как применяется распределение Стьюдента для оценки параметра a нормального распределения. Заметим, что неравенство

$$|t| < t_{q,n-1}$$

или, что все равно,

$$\left|\frac{\bar{x}-a}{\bar{s}}\sqrt{n}\right| < t_{q,n-1},$$

равносильное неравенству

$$-\frac{\bar{s}}{\sqrt{n}}t_{q,n-1} < \bar{x}-a < \frac{\bar{s}}{\sqrt{n}}t_{q,n-1},$$

или, наконец,

$$\bar{x}-t_{q,n-1}\frac{\bar{s}}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}+t_{q,n-1}\frac{\bar{s}}{\sqrt{n}}, \qquad (5.4.45)$$

осуществляется, как мы видели, с вероятностью

$$P = 2S_{n-1}(t_{q,n-1}) - 1 = 1 - Q = 1 - \frac{q}{100} = \frac{100-q}{100}. \qquad (5.4.46)$$

Если пользоваться вместо $\bar{s}$ оценкой s, доверительным интервалом будет:

$$\bar{x}-t_{q,n-1}\frac{s}{\sqrt{n-1}} < a < \bar{x}+t_{q,n-1}\frac{s}{\sqrt{n-1}}. \qquad (5.4.47)$$

Таким образом, задавшись доверительной вероятностью $P = 1 - \frac{q}{100}$, мы находим по табл. XVIII значения $t_{q,n-1}$, отвечающие заданному уровню вероятности и числу степеней свободы $k = n-1$, так что

$$\mathbf{P}\left(\bar{x}-t_{q,n-1}\frac{\bar{s}}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}+t_{q,n-1}\frac{\bar{s}}{\sqrt{n}}\right) = P.$$

В силу симметрии распределения около начала координат полученный нами интервал $I\left(\bar{x}-t_{q,n-1}\frac{\bar{s}}{\sqrt{n}}, \bar{x}+t_{q,n-1}\frac{\bar{s}}{\sqrt{n}}\right)$ будет наиболее коротким из всех доверительных интервалов при том же уровне P вероятности.

При небольших значениях n объема выборки длины $2t_{q,\,n-1}$ доверительных интервалов значительно больше, чем длины $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ «классических» интервалов, получающихся при известном параметре σ. Замена σ на s приводит к большей дисперсии переменной t, определяемой соотношением (5.4.31), по сравнению с переменной u, определяемой из (5.4.30). При больших значениях k-числа степеней свободы (практически можно считать при $k > 30$) закон распределения Стьюдента настолько близок к нормальному, что q-процентные пределы $t_{q,\,n-1}$, найденные при $k > 30$ по табл. XVIII приложений, практически совпадают с q-процентными пределами z_q, найденными по табл. VII. Доверительная вероятность P, как и прежде, будет в силу теоремы Бернулли приблизительно представлять долю тех построенных по различным выборкам (из длинной серии выборок) доверительных интервалов, которые будут действительно содержать оцениваемое постоянное значение параметра a.

Пример 5.4.5. Пусть требуется построить 99%-ный доверительный интервал для оценки генерального среднего диаметра a валика по «пробе» из 10 деталей, сработанных на токарном автомате, если отклонения размеров этих деталей от середины поля допуска оказались следующими (табл. 5.4.3):

Таблица 5.4.3

№ деталей по порядку	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Отклонения размеров в *мк*	+2	+1	−2	+3	+2	+4	−2	+5	+3	+4

По формулам (5.2.2) и (5.2.36) находим, что $\bar{x} = +2$ *мк*, $s = 2{,}3$ *мк*.

Из (5.4.45) и (5.4.46) имеем:

$$\mathbf{P}\left(\bar{x} - t_{1;9}\frac{2{,}3}{\sqrt{10-1}} < a < \bar{x} + t_{1;9}\frac{2{,}3}{\sqrt{10-1}}\right) = 0{,}99,$$

откуда

$$1 - P = Q = 1 - 0{,}99 = 0{,}01 = 1\%.$$

По табл. XVIII приложений при $q = 1\%$ и $k = n - 1 = 10 - 1 = 9$ находим $t_{1;9} = 3{,}25$.

Далее

$$t_{1;9}\frac{s}{\sqrt{n-1}} = 3{,}25 \cdot \frac{2{,}28}{3} = 2{,}49 \text{ мк},$$

откуда

$$2 - 2{,}49 < a < 2 + 2{,}49$$

или

$$-0{,}49 < a < 4{,}49. \qquad (5.4.48)$$

Таким образом, согласующиеся с нашими опытными данными или, иными словами, «допустимые» (с надежностью в 99%) значения параметра a лежат в интервале (−0,49; 4,49).

Заметим, что если бы мы приняли найденное значение $s = 2{,}3$ *мк* за значение параметра σ и исходили бы из нормального закона при оценке, то «классические» 99%-ные доверительные границы были бы значительно уже. В самом деле, вместо $t_{1;9} = 3{,}25$ мы имели бы по табл. VII приложений $Z_1 = 2{,}576$ и $Z_1\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}58\frac{2{,}28}{3{,}16} = 1{,}88$ и вместо неравенства (5.4.48) получили бы:

$$+0{,}12 < \sigma < 3{,}88. \qquad (5.4.49)$$

Таким образом, мы значительно преувеличили бы действительную точность нашей оценки.

Следует хорошо уяснить себе, что некоторая неопределенность и расплывчатость оценки при малых числах наблюдений является не недостатком метода, а связана с существом дела: мы ведь предположили, что никакой информации относительно величины параметра σ, кроме той, которую дает выборка, мы не имеем. Если бы мы могли опираться при оценке дисперсии на более широкий круг наблюдений, то доверительные границы для a значительно уточнились бы. Пусть, например, мы имеем две независимые выборки объемов n_1 и n_2 из нормальных совокупностей соответственно $N(x;\ a_1,\ \sigma)$ и $N(x;\ a_2,\ \sigma)$. Мы видели (см. пример 5.4.4), как в этом случае можно уточнить доверительную оценку для σ^2, используя характеристику s^2, определяемую равенством

$$s^2 = \frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2}.$$

Рассмотрим теперь отношение

$$\hat{t} = \frac{\bar{x} - a_1}{s}\sqrt{\frac{(n_1+n_2-2)\,n_1}{n_1+n_2}} = \frac{\frac{\bar{x}-a_1}{\sigma}\sqrt{n_1}}{\frac{s}{\sigma}\sqrt{n_1+n_2}}\sqrt{n_1+n_2-2} = \frac{Z}{V}\sqrt{n_1+n_2-2},$$

где $Z = \frac{\bar{x}-a_1}{\sigma}\sqrt{n_1}$ и подчиняется закону $N(x;\ 0,\ 1)$, $V^2 = \frac{s^2}{\sigma^2}(n_1+n_2) = \frac{n_1 s_1^2}{\sigma^2} + \frac{n_2 s_2^2}{\sigma^2} = \chi_1^2 + \chi_2^2$ и имеет согласно (4.5.55) закон распределения χ^2 с числом степеней свободы, равным $n_1 - 1 + n_2 - 1 = n_1 + n_2 - 2$.

Применяя теорему, доказанную в настоящем параграфе, найдем, что распределение величины $\hat{t}$ подчиняется закону Стьюдента с (n_1+n_2-2) степенями свободы. Отсюда получаем q-процентные доверительные границы

$$\bar{x}_1 - t_{q;\,n_1+n_2-2}\frac{s}{\sqrt{n_1\cdot\frac{n_1+n_2-2}{n_1+n_2}}} < a_1 < \bar{x}_1 + t_{q;\,n_1+n_2-2}\frac{s}{\sqrt{n_1\cdot\frac{n_1+n_2-2}{n_1+n_2}}},$$

более узкие, чем те, которые получились по данным одной выборки. Аналогичным образом можно оценить и a_2. Более точную оценку для $(\bar{x}_1 - a_1)$ и $(\bar{x}_2 - a_2)$ можно получить, используя F-распределение, как будет указано далее.

Заметим еще, что в некоторых случаях экспериментатор хотя и не располагает точным значением σ, однако может с уверенностью гарантировать некоторую верхнюю границу для этого параметра. Несмотря на грубость такой границы, все же получаемый с помощью ее «классическим приемом» доверительный интервал для a при малом числе наблюдений иногда оказывается более узким, чем по методу Стьюдента.

5.4.5. Общий метод получения доверительных интервалов. Метод, примененный в предшествующих пунктах настоящего параграфа, как мы видели, предполагает, что найдется такая функция оцениваемого параметра и данных наблюдения, распределение которой не зависит от каких-либо неизвестных параметров.

Мы увидим несколько ниже, что такое предположение может быть оправдано при довольно общих условиях, если объем выборки достаточно велик. Однако существует также и более прямой путь к построению доверительных интервалов, который в ряде случаев может скорее привести к поставленной цели. Пусть мы имеем генеральную совокупность, соответствующую распределению случайной величины X с плотностью вероятности $\varphi(x, \theta)$, зависящей для простоты от одного параметра θ, причем $\theta_1 < \theta < \theta_2$, где θ_1 и θ_2 — известные пределы возможных значений параметра θ. Допустим, что для оценки параметра θ мы можем использовать некоторую статистическую характеристику $T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, построенную по данным выборки объема n. Закон распределения T может быть всегда найден, если известна плотность $\varphi(x, \theta)$: допустим, что плотность величины T будет выражаться некоторой функцией $g(t, \theta)$, зависящей от аргумента t и параметра θ. Область изменения вспомогательной переменной t пусть для определенности представляет некоторый интервал (a, b), вне которого $g(t, \theta) = 0$ (в отдельных слу-

чаях a может быть равно $-\infty$, а b равно $+\infty$). Пусть нужно определить доверительный интервал, отвечающий вероятности $P=\frac{p}{100}$. Возьмем какое-нибудь фиксированное значение параметра $\theta=\theta_0$ в интервале (θ_1, θ_2). Для этого значения плотность распределения случайной величины T будет $g(t, \theta_0)$ — вполне определенной функцией одного аргумента t, и мы можем вполне обоснованно вычислять вероятности нахождения величины T в любых интересующих нас интервалах. В частности, нетрудно установить $p^0/_0$-ный интервал «допустимых» значений T для значения θ_0 параметра θ: для этого определим два числа t_1 и t_2 таких, что

$$\left.\begin{aligned}\int_a^{t_1} g(t, \theta_0)\,dt &= \frac{1-P}{2}=\frac{q}{2},\\ \int_{t_2}^{b} g(t, \theta_0)\,dt &= \frac{1-P}{2}=\frac{q}{2}.\end{aligned}\right\} \tag{5.4.50}$$

Эти числа t_1 и t_2 при данном P зависят от взятого значения θ_0. Поступая таким образом для каждого θ, мы определим две функции:

$$t=t_1(\theta) \quad \text{и} \quad t=t_2(\theta)$$

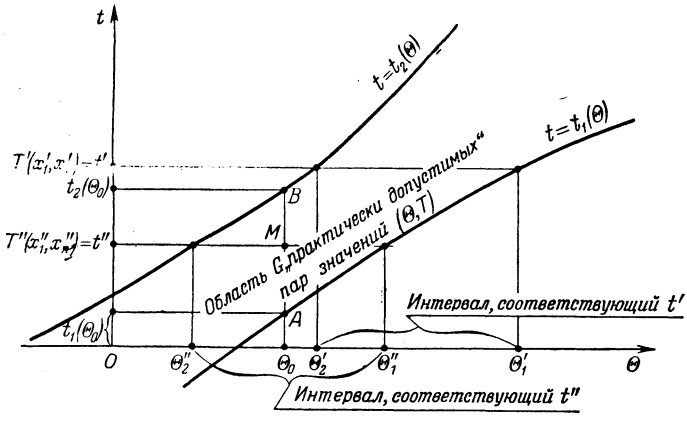
в интервале (θ_1, θ_2).

Ввиду того, что $g(t, \theta)$ есть плотность вероятности величины T, мы будем иметь для каждого θ $(\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2)$:

$$\mathbf{P}\,[t_1(\theta) < T(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant t_2(\theta)] = \int_{t_1(\theta)}^{t_2(\theta)} g(t, \theta)\,dt =$$

$$= 1 - \int_a^{t_1(\theta)} g(t, \theta)\,dt - \int_{t_2(\theta)}^{b} g(t, \theta)\,dt = 1 - q = P = \frac{p^0/_0}{100}. \tag{5.4.51}$$

На черт. 79 мы схематически построили графики функций $t=t_1(\theta)$ и $t=t_2(\theta)$. Ордината в точке θ_0 пересекается с этими кривыми в точках A и B, проекции которых на



Черт. 79. Построение доверительного интервала для оценки параметра θ с помощью статистической характеристики T.

ось t определяют интервал для T, отвечающий $p^0/_0$-ному уровню вероятности. Мы можем рассматривать интервал $[t_1(\theta), t_2(\theta)]$, или, что то же самое, интервал (A, B) как интервал «практически возможных» значений случайной величины T (при данном θ и с заданным уровнем вероятности $P=\frac{p^0/_0}{100}$). Совокупность интервалов, подобных (A, B), построенных для всевозможных значений θ, образует некоторую область G плоскости (θ, T), ограниченную кривыми $t_1(\theta)$ и $t_2(\theta)$. Эту область можно рассматривать как область «практически допустимых» или совместимых пар значений (θ, T).

Если кривые $t_1(\theta)$ и $t_2(\theta)$ построены, то мы можем получать по данным выборки доверительные интервалы для θ с уровнем доверительной вероятности P следующим образом.

Пусть произведенной выборке отвечает какое-либо вычисленное значение $t' = T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ характеристики T. Горизонтальная прямая $t = t'$ пересекает кривые $t_1(\theta)$ и $t_2(\theta)$ в точках, абсциссы которых θ_2' и θ_1' меняются с положением точки t', изображающей значение статистической характеристики T, вычисленное по данным $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выборки. Следовательно, $\theta_2' = \theta_2'(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\theta_1' = \theta_1'(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $\theta_2' < \theta_1'$, представляют две случайные величины — функции данных наблюдения. Нетрудно убедиться теперь, что интервал $[\theta_2'(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \theta_1'(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ будет доверительным интервалом с уровнем вероятности $\frac{P}{100}$ для оценки параметра θ. В самом деле, предположим, что истинное (неизвестное нам) значение параметра θ равно θ_0. Мы видели, что вероятность того, что характеристика T окажется между $t_1(\theta_0)$ и $t_2(\theta_0)$, т. е. будет иметь одно из «практически возможных» значений при $\theta = \theta_0$, равна P. Если $T = t''$ попадает в действительности в эти пределы, то горизонтальная прямая $t = t''$ пересекает ординату $\theta = \theta_0$ в некоторой точке M, лежащей между точками A и B, в которых ордината $\theta = \theta_0$ пересекает кривые $t_1(\theta)$ и $t_2(\theta)$. Следовательно, соответствующий интервал (θ_2'', θ_1'') покроет истинное значение θ_0 параметра θ с вероятностью P. Если же значение характеристики T не попадет в интервал $[t_1(\theta_0), t_2(\theta_0)]$, как это и имеет место при $T = t'$, то горизонтальная прямая $t = t'$ не пересечет вертикаль $\theta = \theta_0$ в области G между кривыми $t_1(\theta)$ и $t_2(\theta)$, а потому интервал (θ_2', θ_1') не покроет значение θ_0 параметра θ. Вероятность этого последнего обстоятельства равна в точности $1 - P = Q$. Можно также сказать, что доверительный интервал $[\theta_2'(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \theta_1'(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ закрывает такие значения θ, при каждом из которых наблюденное значение характеристики T принадлежит к числу «практически возможных»; вместе с тем он не содержит таких, при которых наблюдное значение T принадлежит к области практически невозможных. Мы не имеем права говорить, что вероятность неравенства $\theta_2' < \theta < \theta_1'$ при фиксированных значениях $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, полученных в выборке (а не случайных), равна P. Это неравенство определяет все же область таких значений θ, которые «совместимы» как раз с данными в выборке. Под этим, говоря более строго, следует понимать значения θ, для которых интервал «практически возможных» T содержит наблюденное значение $T = t'$.

В рассмотренном случае функции $t_1(\theta)$ и $t_2(\theta)$ — монотонные. Если это не соблюдено, т. е. функции — немонотонные, то горизонтальные прямые могут пересекать каждую из кривых в нескольких точках. Тогда истинное значение параметра θ будет покрываться с данной доверительной вероятностью P некоторой системой доверительных интервалов.

При некоторых условиях доверительные границы θ_2 и θ_1 для параметра θ можно определять, не находя в явной форме вспомогательных функций $t_1(\theta)$ и $t_2(\theta)$. Так, для случая, представленного на черт. 79, мы видим, что при заданном значении $T = t'$ для оценки θ нужно определить две точки θ_2' и θ_1' такие, что

$$t_2(\theta_2') = t_1(\theta_1') = t', \tag{5.4.52}$$

но по определению функций $t_1(\theta)$ и $t_2(\theta)$ в (5.4.50)

$$\int_a^{(\theta_1')} g(t, \theta_1')\, dt = \frac{1-P}{2},$$

$$\int_{t_2(\theta_2')}^{b} g(t, \theta_2')\, dt = \frac{1-P}{2}.$$

Принимая во внимание (5.4.52), мы получаем следующие уравнения для определения θ_1' и θ_2' по P (или q) и данному t':

$$\left.\begin{aligned} \int_a^{t'} g(t, \theta_1')\, dt &= \frac{1-P}{2}, \\ \int_{t'}^{b} g(t, \theta_2')\, dt &= \frac{1-P}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{5.4.53}$$

Тот же метод применим, разумеется, и в случае дискретного распределения; при этом интегралы, стоящие в (5.4.53), заменяются соответствующими суммами вероятностей.

Метод построения доверительных интервалов может быть обобщен на случай оценки двух и большего числа параметров по данным выборки. Пусть, например, мы рассматриваем случай двух параметров θ_1 и θ_2 распределения, оцениваемых с помощью статистических характеристик T_1 и T_2 по данным выборки. Для каждой пары значений параметров θ_1 и θ_2 в «пространстве» параметров данной задачи закон распределения характеристик T_1 и T_2 полностью определен, если известен закон распределения генеральной совокупности. Поэтому при заданном значении вероятности $P = \frac{p}{100}$ мы можем (вообще говоря, различным образом) определить область S допустимых значений T_1 и T_2 такую, что

$$\mathbf{P}(T_1 \text{ и } T_2 \text{ попадают в } S) = \int_S \int g(t_1, t_2, \theta_1, \theta_2)\, dt_1\, dt_2 = \frac{p}{100}, \qquad (5.4.54)$$

причем $g(t_1, t_2, \theta_1, \theta_2)$ есть плотность совместного распределения характеристик T_1 и T_2 для заданных значений параметров θ_1 и θ_2. Если теперь выборка дала значения $T_1 = T_1^0$ и $T_2 = T_2^0$, мы будем считать доверительной областью (двумерной) с заданным коэффициентом доверия $P = \frac{p}{100}$ множество всех тех значений параметров θ_1 и θ_2, для которых построенная нами область «допустимых» значений содержит точку (T_1^0, T_2^0).

5.4.6. Оценка вероятности по частости. Мы поясним теперь метод построения доверительных интервалов на примере оценки вероятности p некоторого события A, или, что то же самое, на примере оценки единственного параметра p распределения случайной величины X, принимающей только два значения: 0 и 1, причем $\mathbf{P}(X=1) = p$ и $\mathbf{P}(X=0) = q$. Пусть данные выборки, т. е. число s испытаний и число x появления события A, дают частость $w = \frac{x}{s}$ появления события A, которую естественно рассматривать как оценку параметра p. Как мы видели в **3.7.3**, частость следует биномиальному закону, зависящему от постоянного в каждом данном случае параметра p и от объема s выборки. Ввиду дискретности биномиального распределения и, значит, разрывности функции распределения характеристики $\frac{x}{s} = w$ нельзя, вообще говоря, для любого значения доверительной вероятности P построить область допустимых значений $\frac{x}{s}$ такую, чтобы попадание в эту область имело вероятность, в точности равную P при всех значениях параметра p. Поэтому в данном случае можно дать лишь приближенное решение, а именно для каждого p указать область, вероятность попадания в которую будет не менее, чем P. Совокупность таких интервалов «практически возможных» значений может быть использована для определения доверительного интервала для параметра p. В данном случае мы будем говорить, что этим интервалам отвечает «коэффициент доверия» P.

Для нахождения доверительного интервала вида $p_2(x, s) < p < p_1(x, s)$ (где $x = ws$ — число появлений события A) при заданном коэффициенте доверия P проще всего применить процедуру, определяемую формулами (5.4.53). При данном $x = ws$ верхняя граница $p_1(x, s) = p_1$ доверительного интервала определится (иногда только приближенно) из уравнения

$$\sum_{m=0}^{x} C_s^m p_1^m (1-p_1)^{s-m} = \frac{1-P}{2} \qquad (5.4.55)$$

(точнее говоря, следует определить при данном x наибольшее значение p, при котором

$$\sum_{m=0}^{x} C_s^m p^m (1-p)^{s-m} \leqslant \frac{1-P}{2}.$$

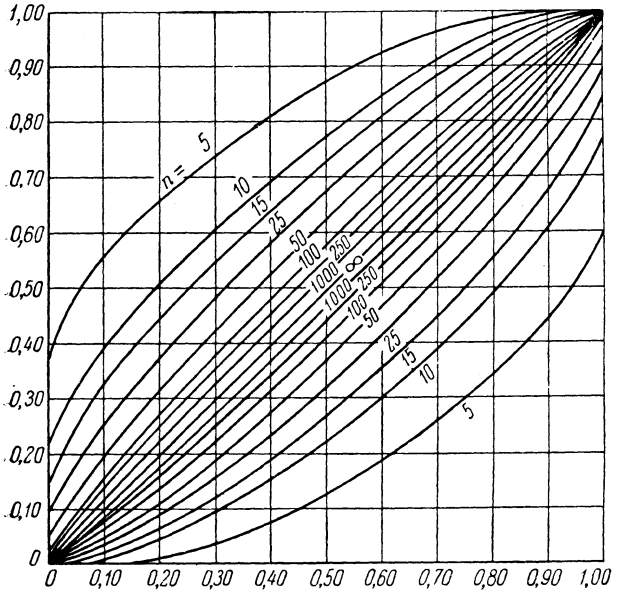
Точно так же для определения нижней границы $p_2(x, s) = p_2$ следует решить уравнение

$$\sum_{m=x}^{s} C_s^m p_2^m (1-p_2)^{s-m} = \frac{1-P}{2}. \tag{5.4.56}$$

Используя выражение (4.5.43) для «хвостов» биномиального распределения, мы можем уравнения (5.4.55) и (5.4.56) записать в более сжатом виде:

$$\left.\begin{aligned} I_{p_1}(x+1,\ s-x) &= \frac{1-P}{2}, \\ I_{p_2}(x,\ s-x+1) &= \frac{1-P}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{5.4.57}$$

Уравнения (5.4.57) решаются приближенно с помощью таблиц неполной бэта-функции. Для двух значений доверительной вероятности $P = 0{,}95$ и $P = 0{,}99$ и для различных x и s (или x и $s-x$) в табл. XIX приложений приведены соответствующие значения верхнего и нижнего доверительных пределов.



Черт. 80. 90%-ные доверительные области для вероятности P.

Для примера найдем 95%-ный доверительный интервал для вероятности p по частости $\frac{24}{50} = 0{,}48$, полученной при 50 наблюдениях. Здесь $x = 24$, $s = 50$, $s - x = 26$. На пересечении строки $x = 24$ и столбца $s-x=26$ в табл. XIX приложений для 95%-ных доверительных пределов находим два числа $\binom{626}{337}$. 95%-ный доверительный интервал для вероятности p, совместимый с данными опыта, будет:

$$0{,}337 < p < 0{,}626.$$

Для уровней значимости $p = 0{,}90$ и $p = 0{,}80$ построены кривые, показанные на черт. 80 и 81, позволяющие приближенно находить соответствующие доверительные интервалы.

Для больших значений s мы можем на основании **4.3.5** считать распределение частости $w = \frac{x}{s}$ приближенно нормальным $n\left(x;\ p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{s}}\right)$. Следовательно, мы можем доверительный интервал для p с доверительной вероятностью P получить, исходя из приближенного равенства

$$\mathbf{P}\left(-t_P < \frac{w-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{s}}} < t_P\right) = P, \tag{5.4.58}$$

в котором t_P определяют из уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t_P}^{t_P} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = 2\Phi(t_P) = P.$$

Если неравенства

$$-t_P\sqrt{\frac{p(1-p)}{s}} < w-p < t_P\sqrt{\frac{p(1-p)}{s}} \qquad (5.4.59)$$

разрешить относительно p, то мы получим:

$$\frac{2sw+t_P^2-t_P\sqrt{D}}{2(s+t_P^2)} < p < \frac{2sw+t_P^2+t_P\sqrt{D}}{2(s+t_P^2)}, \qquad (5.4.60)$$

где

$$D=\sqrt{4sw(1-w)+t_P^2}.$$

Неравенства (5.4.59) и (5.4.60) эквивалентны и, следовательно, (5.4.60) осуществляются с вероятностью P, определяя искомый доверительный интервал. Легко показать, что, пренебрегая в правых и левых частях (5.4.60) членами t_P^2, мы изменим эти выражения лишь на величины порядка $\frac{1}{s}$, что не может существенно повлиять на вероятность осуществления этих неравенств при больших s.

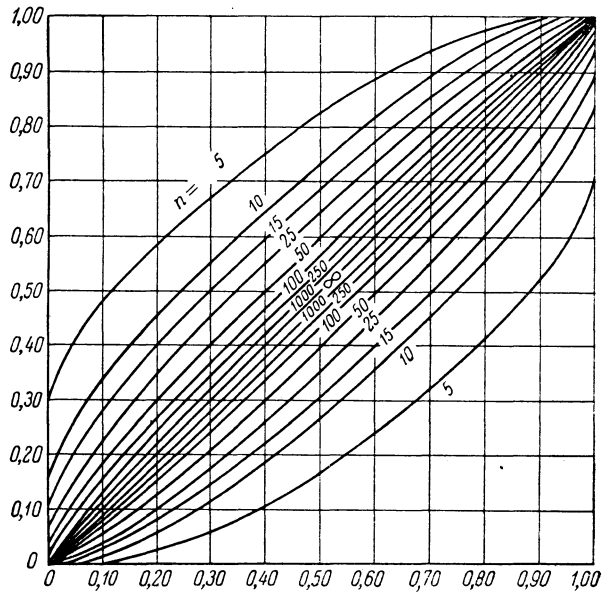
Поэтому неравенства (5.4.60) при больших s эквивалентны значительно более простым

$$w-t_P\sqrt{\frac{w(1-w)}{s}} < p < w+t_P\sqrt{\frac{w(1-w)}{s}}, \qquad (5.4.61)$$

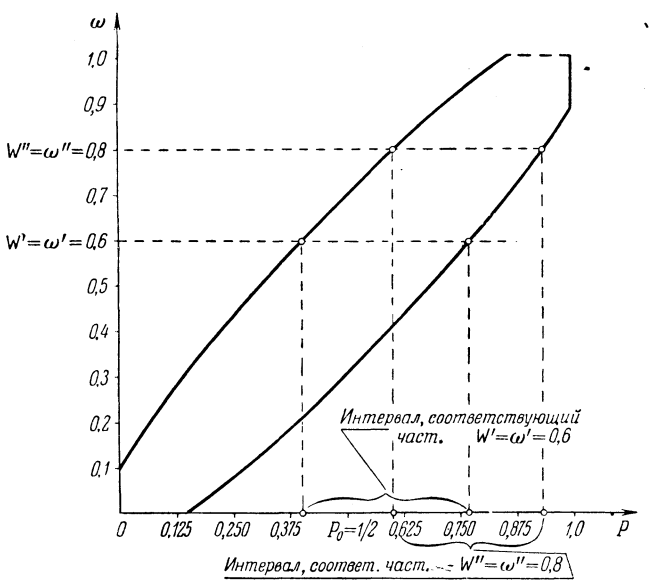
которые и определяют доверительный интервал. Например, 95%-ный доверительный интервал получаем, беря $t_P=1{,}96$, так как $2\Phi(1{,}96)=0{,}95$. Кривые

$$p=w\pm t_P\sqrt{w(1-w)}$$

представляют две половины эллипса, изображенного на черт. 82.



Черт. 81. 80%-ные доверительные области для вероятности P.



Черт. 82. Доверительный интервал для оценки вероятности P по частости w при доверительной вероятности $P=0{,}95$.

5. 4. 7. Получение доверительных границ при большом числе наблюдений. До сих пор мы при построении доверительных интервалов для оцениваемого параметра исходили из статистических характеристик, которые более или менее естественно отвечали постановке задачи; однако мы не руководствовались при отборе этих характе-

ристик каким-либо общим правилом, дающим конструкцию этих оценок. Мы покажем теперь, что при известных условиях такое правило выбора характеристик дать можно. Для формулировки этого правила мы используем понятие о «функции правдоподобия», введенное нами в **5.3.1.**

Покажем теперь, как использовать эту фукцию для получения доверительных интервалов оцениваемого параметра θ при больших n; мы покажем, что при известных условиях будет существовать такая функция от данных выборки и параметра θ, распределение которой будет нормально $N(x;\ 0;\ 1)$. Это будет вытекать из следующей теоремы.

Теорема. *Если*

$$\mathbf{M}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln\varphi(x,\ \theta)\right]=0$$

и

$$A^2=\mathbf{M}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln\varphi(x,\ \theta)\right]^2$$

конечно, то распределение случайной величины

$$\frac{1}{\sqrt{n}\,A}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\ln\mathbf{P}(O_n,\ \theta)$$

при $n\to\infty$ *стремится к нормальному* $N(x;\ 0,\ 1)$.

Рассмотрим величину $\dfrac{\partial}{\partial\theta}\mathbf{P}(O_n,\ \theta)$ для фиксированного θ. Так как

$$\ln\mathbf{P}(O_n,\ \theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln\varphi(x_i,\ \theta),$$

то

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln\mathbf{P}(O_n,\ \theta)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i,$$

где

$$\xi_i=\frac{\partial}{\partial\theta}\ln\varphi(x_i,\ \theta)=\frac{\varphi'_\theta(x_i,\theta)}{\varphi(x_i,\ \theta)}\qquad(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

можно рассматривать как n одинаково распределенных независимых экземпляров одной и той же величины

$$\xi=\frac{\partial}{\partial\theta}\ln\varphi(X,\ \theta);$$

здесь аргумент X — случайная величина — результат наблюдения.

Чтобы применить теорему Лапласа-Ляпунова, мы должны только рассмотреть математическое ожидание и дисперсию каждого слагаемого Прежде всего согласно (3.5.2) вычислим математическое ожидание:

$$\mathbf{M}\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\theta}\ln\varphi(x,\ \theta)\cdot\varphi(x,\ \theta)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi'_\theta(x,\ \theta)}{\varphi(x,\ \theta)}\cdot\varphi(x,\ \theta)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\varphi(x,\ \theta)}{\partial\theta}\,dx.\quad(5.4.62)$$

При довольно широких условиях мы можем в (5.4.62) поменять местами операции дифференцирования и интегрирования (использовав теорему о дифференцировании по параметру под знаком интеграла); в этих условиях

$$\mathbf{M}\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\varphi(x,\ \theta)}{\partial\theta}\,dx=\frac{\partial}{\partial\theta}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,\ \theta)\,dx,$$

но $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,\ \theta)\,dx=1$ по определению плотности вероятности; поэтому

$$\mathbf{M}\xi=0.\qquad(5.4.63)$$

Таким образом, это равенство, естественно, будет выполняться в широком классе случаев. Допустив (по условию теоремы), что оно имеет место, мы будем иметь:

$$\mathbf{D}\xi=\sigma_\xi^2=\mathbf{M}\xi^2=\mathbf{M}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln\varphi(X,\ \theta)\right]^2=A^2.$$

Так как величины ξ имеют конечную дисперсию, независимы и одинаково распределены, то согласно теореме Ляпунова при больших n нормированное среднее арифметическое

$$\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i}{\sqrt{\mathbf{D}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)}} = \frac{\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial\theta}\ln \mathbf{P}(O_n, \theta)}{\frac{\sigma_\xi}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}A}\frac{\partial}{\partial\theta}\ln \mathbf{P}(O_n, \theta)$$

будет иметь нормальное распределение $N(x; 0, 1)$.

Таким образом, при больших n

$$\mathbf{P}\left[-t_\gamma < \frac{1}{\sqrt{n}A}\frac{\partial \ln \mathbf{P}(O_n, \theta)}{\partial\theta} < t_\gamma\right] \approx \gamma, \tag{5.4.64}$$

где t_γ выбрано так, что

$$2\Phi(t_\gamma) = \gamma.$$

Если допустить, что функция $\frac{1}{\sqrt{n}A}\frac{\partial \ln P(O_n, \theta)}{\partial\theta}$ монотонна относительно θ, то, разрешая неравенство относительно θ, можно записать (5.4.64) в таком виде:

$$\mathbf{P}(\hat{\theta} < \theta < \check{\theta}) \cong \gamma, \tag{5.4.65}$$

где $\hat{\theta}$ и $\check{\theta}$ — две функции выборочных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и объема выборки n.

Дополнительное исследование, которое мы не будем приводить, показывает, что доверительный интервал $(\theta; \hat{\theta})$, полученный по методу правдоподобия, будет в некотором смысле более коротким при больших n, чем построенный другими способами.

Рассмотрим для примера случай нормального распределения с известной дисперсией, когда оценке подлежит центр a. В этом случае $\theta = a$,

$$\ln \varphi(x, \theta) = -\frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{\sigma^2},$$

$$\xi = \frac{\partial}{\partial\theta}\ln \varphi(X, \theta) = \frac{X-a}{\sigma^2}$$

и, наконец,

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln \mathbf{P}(O_n, \theta) = \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sigma^2} - \frac{na}{\sigma^2};$$

отсюда

$$\mathbf{M}\xi = 0, \quad \mathbf{D}\xi = A^2 = \frac{1}{\sigma^2}$$

и потому

$$\frac{1}{\sqrt{n}A}\frac{\partial}{\partial\theta}\ln \mathbf{P}(O_n, \theta) = \frac{\bar{x}-a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}},$$

и мы приходим к доверительному интервалу

$$\bar{x} - t_\gamma\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t_\gamma\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

который мы ранее рассматривали и убедились, что он наиболее узкий из всех интервалов с той же доверительной вероятностью.

5.4.8. Метод максимума правдоподобия. Функция правдоподобия (см. (5.3.14) и (5.3.15)), которой мы пользовались для получения доверительных границ, может быть использована также для получения статистических характеристик для оценки параметров особым приемом, получившим название метода максимума правдоподобия. Сущность этого метода заключается в утверждении, что при данных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ наилучшая оценка соответствует такому значению аргумента θ в функции правдоподобия $\mathbf{P}[O_n(x_1, x_2, \ldots, x_n); \theta]$, при

котором эта функция достигает максимального значения. Этот же принцип применяется в тех случаях, когда оценке подвергаются несколько неизвестных параметров ($\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$; $k < n$), от которых зависит исходное распределение величины X, а следовательно, и функция правдоподобия $\mathbf{P}[O_n(x_1, x_2, \ldots, x_n); \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k]$. Отыскивая такие значения аргументов $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$, при которых функция $\mathbf{P}(O_n; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$, или, что равносильно, функция $\ln \mathbf{P} = L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$, достигает максимума (при данных $x_1, x_2, \ldots, x_n$), мы получаем наилучшие (в смысле указанного принципа) оценки параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$.

Оправданием этого принципа могут служить следующие простые соображения. Допустим, что мы рассматриваем случай дискретной величины. Тогда $\mathbf{P}(O_n; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ представляет просто вероятность появлений значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в выборке. По методу максимума правдоподобия мы подбираем такие значения $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$, при которых система значений $x_1, \ldots, x_n$ имеет наибольшую вероятность того, что таким путем определенные θ_i находятся в лучшем согласии с данными опыта.

Это рассуждение не является, конечно, достаточным оправданием принципа наибольшего правдоподобия. Для обращения функции $L(O_n, \theta)$ или $\mathbf{P}(O_n, \theta)$ в максимум мы можем использовать хорошо известные правила дифференциального исчисления: искомые значения $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ должны удовлетворять необходимым условиям экстремума функции L (которая предполагается дифференцируемой):

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0; \quad \ldots; \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_k} = 0. \tag{5.4.66}$$

Таким образом, оценки наибольшего правдоподобия (мы их будем обозначать как $\tilde{\theta}_{\text{пр}}$) получаются как решения определенной системы уравнений (5.4.66). Это дает вполне регулярный прием для нахождения оценок, который позволяет разыскивать их в ряде важнейших задач. Конечно, в других случаях этот прием может привести и к весьма громоздким и неудобным для практики соотношениям.

Проиллюстрируем технику применения метода на нескольких простых примерах.

Рассмотрим сначала выборку из совокупности, в которой признак может принимать лишь два значения: $X = 0$ и $X = 1$ с вероятностями p и q. Нетрудно видеть, что закон распределения в данном случае можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{P}(X = x) = \varphi(x, p) = p^x q^{1-x} \qquad (x = 0, 1).$$

Если выборка дает значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ величины X, то функция правдоподобия выражается так:

$$\mathbf{P}(O_n, p) = (p^{x_1}q^{1-x_1})(p^{x_2}q^{1-x_2})\ldots(p^{x_n}q^{1-x_n}) = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} q^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i} = p^{\xi}q^{n-\xi},$$

где $\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Далее

$$L = \ln \mathbf{P}(O_n, p) = \xi \ln p + (n - \xi) \ln (1 - p), \tag{5.4.67}$$

$$\frac{dL}{dp} = \frac{\xi}{p} - \frac{n - \xi}{1 - p}.$$

Приравнивая $\frac{dL}{dp} = 0$, мы получим:

$$\tilde{p}_{\text{пр}} = \frac{\xi}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x}, \tag{5.4.68}$$

т. е. наилучшей оценкой параметра p с точки зрения данного метода является средняя арифметическая $\bar{x}$, что и следовало ожидать.

Пример 5.4.6. Пусть требуется оценить параметр λ в распределении Пуассона $\mathbf{P}(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, пользуясь выборкой, которая дала значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ для величины X.

В этом случае

$$\mathbf{P}(O_n, \lambda)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_1}}{x_1!}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_2}}{x_2!}\cdots\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_n}}{x_n!}=\frac{e^{-n\lambda}\lambda^{x_1+x_2+\ldots+x_n}}{x_1!x_2!\ldots x_n!}=\frac{e^{-n\lambda}\lambda^{y}}{x_1!x_2!\ldots x_n!},$$

где $y=\sum_{i=1}^{n} x_i$;

$$L=\ln \mathbf{P}(O_n, \lambda)=-\lambda n+y\ln\lambda-\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i!). \tag{5.4.69}$$

Уравнение для определения λ будет:

$$\frac{\partial L}{\partial\lambda}=-n+\frac{y}{\lambda}=0,$$

откуда

$$\tilde{\lambda}_{\text{пр}}=\frac{y}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}=\bar{x}. \tag{5.4.70}$$

И в данном случае наилучшей оценкой для параметра λ оказалась средняя арифметическая $\bar{x}$.

Пример 5.4.7. Оценка двух параметров нормального закона распределения. Пусть мы по данным $x_1, x_2, \ldots, x_n$ значениям нормально распределенной величины X должны оценить неизвестные параметры a и σ этого закона. В этом случае

$$\mathbf{P}(O_n, a, \sigma)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2},$$

$$L=-\frac{n}{2}\ln 2\pi-\frac{\pi}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2. \tag{5.4.71}$$

Уравнения для определения оценок для a и σ будут:

$$\frac{\partial L}{\partial a}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)=0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=}^{n}(x_i-a)^2=0.$$

Из первого уравнения следует:

$$\tilde{a}_{\text{пр}}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}=\bar{x} \tag{5.4.72}$$

и тогда второе даст:

$$\tilde{\sigma}^2_{\text{пр}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=s^2. \tag{5.4.73}$$

Первая оценка не смещена, но вторая, как мы знаем из **5.3.4**, будет немного смещенной.

В качестве главного достоинства метода максимума правдоподобия следует указать на то, что величины $\tilde{\theta}_{\text{пр}}$ максимального правдоподобия обладают рядом свойств, делающих их весьма пригодными для оценки параметров. Для случая оценки одного параметра оценка $\tilde{\theta}_{\text{пр}}$ наибольшего правдоподобия оказывается всегда состоятельной; далее при больших n ее распределение можно приближенно считать нормальным с центром в точке θ и дисперсией

$$\sigma^2_{\text{мин}} = -\frac{1}{n\mathbf{M}\left(\frac{\partial^2 \ln \varphi(x, \theta)}{\partial \theta^2}\right)}. \tag{5.4.74}$$

Это свойство иначе выражают, говоря, что оценка $\tilde{\theta}_{\text{пр}}$ будет асимптотически эффективной в том смысле, что не существует другой асимптотически нормальной оценки, имеющей меньшую дисперсию. Если параметр θ допускает эффективную оценку (несмещенную, состоятельную и имеющую минимально допустимую согласно неравенству (5.3.7) дисперсию), то эта оценка получается как единственное в этом случае решение уравнения правдоподобия. Наконец, в тех случаях, когда характер распределения допускает *достаточные оценки* для совокупности данных параметров (см. **5.3.1**), оценки по методу наибольшего правдоподобия выражаются через эти оценки. Поэтому можно быть уверенным, что оценки $\tilde{\theta}_{\text{пр}}$ используют всю информацию относительно параметров, которая доставляется выборкой.

Заметим, что оценки $\tilde{\theta}_{\text{пр}}$, вообще говоря, будут *смещенными*. Однако эта смещенность не имеет существенного значения и может быть в большинстве случаев обезврежена путем надлежащего *«исправления» оценки*, например, с помощью умножения на надлежащий множитель.

Важное свойство оценок $\tilde{\theta}_{\text{пр}}$ заключается еще в их *«инвариантности»* относительно замены переменного. Если вместо параметра θ мы должны оценивать некоторую его однозначную функцию $u(\theta)$, то оценкой для $u(\theta)$ будет $u(\tilde{\theta}_{\text{пр}})$. В самом деле, допустим, что обратная функция для $u(\theta)$ будет $\theta = \theta(u)$. Подставляя ее вместо θ в $L(O_n, \theta)$, получим:

$$L(O_n, \theta) = L[O_n, \theta(u)] = L_1(O_n, u).$$

Так как максимум $L(O_n, \theta)$ обеспечивает значение $\theta = \tilde{\theta}_{\text{пр}}$, то $\theta(u)$ следует приравнять $\tilde{\theta}_{\text{пр}}$, чтобы обеспечить максимум $L_1(O_n, u)$, и, следовательно, $\tilde{u}_{\text{пр}}$ окажется равна $u(\tilde{\theta}_{\text{пр}})$. Отсюда следует, например, что «наилучшая» оценка для σ при нормальном законе распределения будет:

$$\tilde{\sigma}_{\text{пр}} = \sqrt{\tilde{\sigma}^2_{\text{пр}}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = s. \tag{5.4.75}$$

Для нормального распределения четвертый центральный момент $\mu_4 = 3\sigma^4$; отсюда следует, что его «наилучшая» оценка по данным выборки будет:

$$\tilde{\mu}_{\text{пр}} = 3(\tilde{\sigma}^2_{\text{пр}})^2 = 3\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right]^2. \tag{5.4.76}$$

Хотя m_4 — выборочный момент четвертого порядка — также представляет оценку для μ_4, но оценка $\tilde{\mu}_{4\,\text{пр}}$, задаваемая соотношением (5.4.76), обладает большими преимуществами в смысле точности и надежности оценки.

5.4.9. Доверительные области для теоретического закона распределения. Теория доверительных интервалов для оценки параметров может быть обобщена и применена к значительно более сложным задачам. Предположим, что мы рас-

сматриваем выборку объема n из генеральной совокупности, в которой интересующий нас признак X распределен по некоторому непрерывному закону $F(x) = \mathbf{P}(X < x)$. Вид этой функции $F(x)$ нам неизвестен и какой-либо дополнительной информацией о ее свойствах (кроме свойства непрерывности) мы не располагаем. Посмотрим, какого рода оценку закону $F(x)$ можно дать, опираясь только на данные выборки. Особенность этой задачи заключается в том, что мы не делаем каких-либо ограничительных предположений относительно неизвестного закона распределения в противоположность случаю оценки параметров, когда мы считали известной функциональную форму закона, принадлежавшего определенному семейству вида $F(x; \theta_1, \theta_2, \ldots)$. Поэтому говорят, что поставленная нами задача принадлежит к типу «непараметрических» задач.

Для оценки функции $F(x)$ воспользуемся эмпирической функцией распределения $\tilde{F}_n(x)$. Как мы видели в **5.1.2**, ордината кривой $\tilde{F}_n(x)$ в каждой фиксированной точке x представляет случайную величину, а именно частость $\frac{m_x}{n}$, сходящуюся по вероятности к ординате функции $F(x)$. Отношение между частостью $\frac{m_x}{n} = \tilde{F}_n(x)$ и $F(x)$ при данном x — такое же, как между частостью и вероятностью в схеме n независимых испытаний Бернулли. Поэтому в качестве меры возможных уклонений $[\tilde{F}_n(x) - F(x)]$ величины $\frac{m_x}{n}$ от ее математического ожидания $\mathbf{M}\left(\frac{m_x}{n}\right) = \mathbf{P}(X < x) = F(x)$ мы рассмотрим среднее квадратическое отклонение (3.7.16), записав его в виде

$$\sigma_{\frac{m_x}{n}} = \sqrt{\frac{F(x)\,[1 - F(x)]}{n}}.$$

Мы можем далее утверждать на основании теоремы Лапласа, что при больших n вероятность неравенства

$$|\Delta_n(x)| = |\tilde{F}_n(x) - F(x)| < t\sqrt{\frac{F(x)\,[1 - F(x)]}{n}}$$

будет приблизительно равна $2\Phi(t)$. Таким образом, для каждой фиксированной точки x мы можем гарантировать с вероятностью α, как угодно близкой к единице, что величина $|\Delta_n(x)|$ не превысит $t_\alpha \sigma_{\tilde{F}_n(x)}$, где t_α определится из уравнения $2\Phi(t_\alpha) = \alpha$. Однако было бы неправильно на основании этого утверждать, что с той же большой вероятностью α мы можем гарантировать выполнение и неравенства $|\Delta_n(x)| < t_\alpha \sigma_{\tilde{F}_n(x)}$ одновременно во всех точках x. В самом деле, хотя вероятность нарушения этого неравенства в какой-либо индивидуальной точке мала, вероятность нарушения его *хотя бы в одной точке* из бесконечного множества их, содержащихся в рассматриваемом интервале, может оказаться немалой. И действительно, можно показать, что, каким бы большим мы ни брали значение $t > 0$, максимальное расхождение функций $\tilde{F}_n(x)$ и $F(x)$, т. е. величина $D_n = \max |\Delta_n(x)|$, почти наверно превзойдет $t\sigma_{\tilde{F}_n(x)}$. Исследование закона распределения величины, проведенное советскими математиками, позволило решить задачу доверительной оценки функции D_n в весьма общих условиях. Особенно замечательно следующее предложение, доказанное впервые акад. А. Н. Колмогоровым:

Какова бы ни была непрерывная функция распределения $F(x)$, вероятность $\mathbf{P}_n(\lambda)$ неравенства

$$D_n = \max |\tilde{F}_n(x) - F(x)| < \frac{\lambda}{\sqrt{n}} \tag{5.4.77}$$

при любом $\lambda > 0$ для больших n приблизительно равна:

$$\mathbf{P}_n(\lambda) \approx K(\lambda), \tag{5.4.78}$$

где функция распределения $K(\lambda)$ определяется как сумма бесконечного ряда, а именно:

$$K(\lambda) = 1 - 2\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1} e^{-2\nu^2\lambda^2}. \qquad (5.4.79)$$

Для функции $K(\lambda)$ составлена таблица ее значений и вычислены q-процентные пределы для некоторых значений уровня значимости.

Вот краткая таблица q-процентных уклонений для функции $K(\lambda)$ (табл. 5.4.4):

Таблица 5.4.4

q	50%	10%	5%	1%	0,1%
λ_q	0,828	1,224	1,358	1,627	1,950

Неравенство

$$D_n < \frac{\lambda_q}{\sqrt{n}}$$

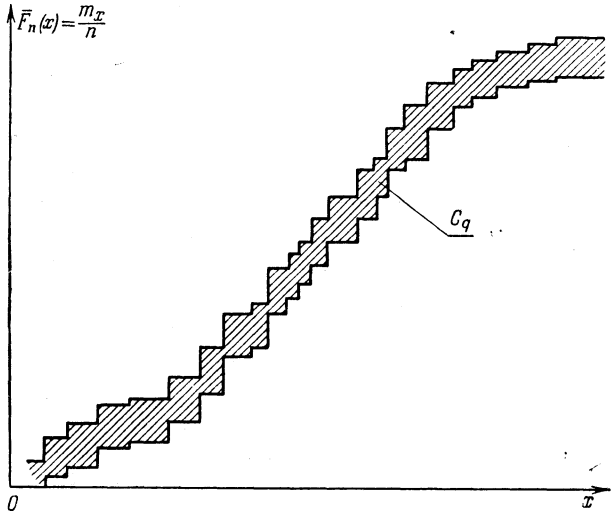
равносильно тому, что при каждом x осуществляется неравенство

$$|\tilde{F}_n(x) - F(x)| < \frac{\lambda_q}{\sqrt{n}}$$

или

$$\tilde{F}_n(x) - \frac{\lambda_q}{\sqrt{n}} < F(x) < \tilde{F}_n(x) + \frac{\lambda_q}{\sqrt{n}}. \qquad (5.4.80)$$

Рассмотрим полосу C_q, ограниченную двумя кривыми



Черт. 83. Доверительные границы для функции распределения $F(x)$, построенные по данным выборки.

$$\underline{y}_1(x) = \tilde{F}_n(x) - \frac{\lambda_q}{\sqrt{n}}$$

и

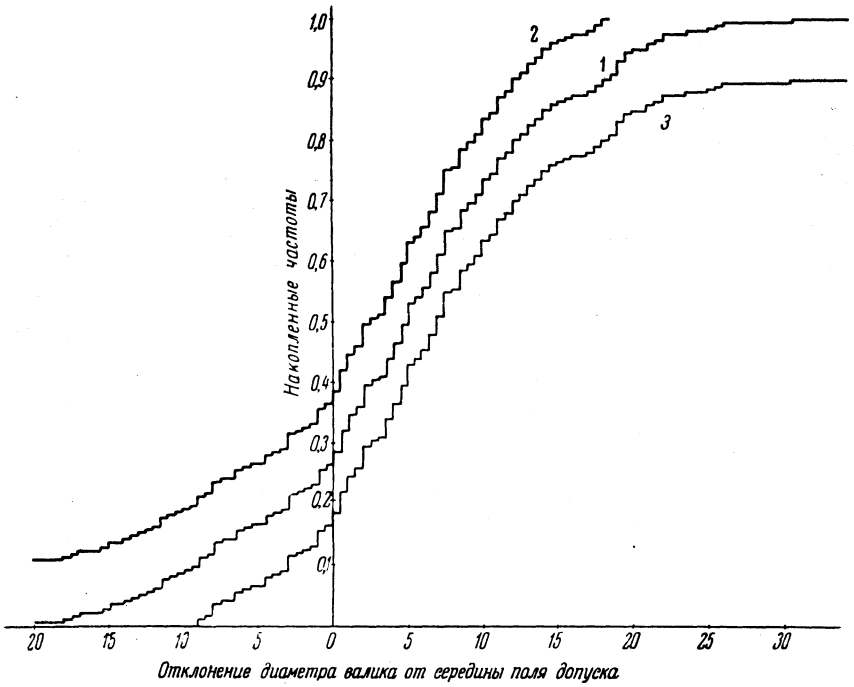
$$\bar{y}_2(x) = \tilde{F}_n(x) + \frac{\lambda_q}{\sqrt{n}},$$

получаемыми смещением вверх и вниз (вдоль оси y) эмпирической функции $\tilde{F}_n(x)$ на величину $\frac{\lambda_q}{\sqrt{n}}$ (черт. 83).

Неравенства (5.4.80) говорят, что график неизвестной функции $F(x)$ проходит на всем протяжении оси x внутри полосы C_q, не пересекая границ этой полосы. Таким образом, вероятность покрытия полосой C_q с границами $\underline{y}_1(x)$ и $\bar{y}_2(x)$ кривой $F(x)$ для больших n приближенно равна $K(\lambda_q) = \frac{q}{100}$. Мы получаем, следовательно, две доверительных границы для неизвестной функции $F(x)$, отвечающие выбранному коэффициенту доверия $1 - \frac{q}{100}$.

Отметим, что использование этого приема оценки предполагает непрерывность функции $F(x)$; вместе с тем предполагается, что эмпирическая функция $\tilde{F}_n(x)$ построена по не сведенным (не сгруппированным) в те или иные интервалы значениям величины X. Лишь с некоторым приближением доверительная оценка будет действовать и в том случае, когда интервалы группировки будут достаточно малы.

Пример 5.4.8. Рассмотрим эмпирическую кривую распределения, построенную по измерениям (приведенным в таблице примера 5.3.12) диаметров 200 валиков, изготовленных на токарном автомате. Эта кривая изображена на черт. 84.



Черт. 84. Доверительные границы для функции распределения $F(x)$ валиков по их диаметрам при обработке на токарном автомате (границы построены по выборке объема 200 штук).

$5^0/_0$-ные доверительные границы для неизвестной функции распределения $F(x)$ в данном случае будут определяться уравнениями

$$\underline{y}(x) = \tilde{F}_n(x) - \frac{1{,}358}{\sqrt{200}},$$

$$\bar{y}(x) = \tilde{F}_n(x) + \frac{1{,}358}{\sqrt{200}}.$$

Для тех значений x, для которых $\tilde{F}_n(x) < \frac{1{,}358}{\sqrt{200}}$, мы дополнительно полагаем $\underline{y}(x) = 0$ и при $\tilde{F}_n(x) > 1 - \frac{1{,}358}{\sqrt{200}}$ считаем $\bar{y}(x) = 1$.

Кривые $\underline{y}(x)$ и $\bar{y}(x)$ определяют область с $5^0/_0$-ной доверительной вероятностью, показанную на черт. 84. Мы можем считать, что с данными выборки совместимы лишь те функции распределения, которые будут проходить внутри полосы C_q.

ГЛАВА VI

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ

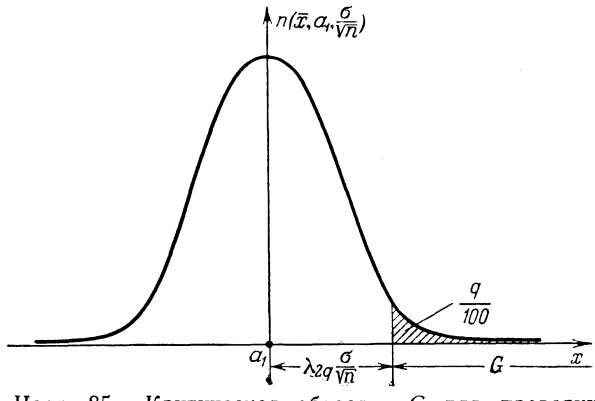
§ 1. Общие понятия о статистических гипотезах и их проверке

6.1.1. Постановка задачи о проверке гипотез в математической статистике. «Нулевые гипотезы». Пример проверки нулевой гипотезы. В предыдущей главе мы рассматривали вопрос об оценке параметров распределения, к которому, как мы видели, приводится задача получения доброкачественных выводов из данных наблюдения в естествознании и технике. Правила и положения, изложенные в предшествующей главе, относились к тому важному для практики случаю, когда сами фактические данные могут рассматриваться как случайная выборка из некоторой генеральной совокупности.

Получение доброкачественной оценки по данным выборки, однако, является, как правило, лишь некоторой предварительной стадией статистического исследования; цель же его часто состоит в использовании полученных оценок для сравнения совокупностей между собой в том или ином отношении по тому или иному признаку и т. д. Вопрос о том, по каким признакам и в каких отношениях целесообразно проводить подобного рода сравнения, всецело относится к компетенции тех научных областей, к которым применяются статистические методы, и поэтому не может быть здесь рассмотрен.

Пусть, например, желают определить, будет ли новый метод производства электрических ламп увеличивать их долговечность. Предположим, что средняя продолжительность службы лампочек при существующем способе производства составляет 1500 часов. Испытывая новую процедуру изготовления ламп, получили для некоторой (сравнительно небольшой) партии ламп среднюю продолжительность работы в 1675 часов. Спрашивается, можно ли считать, что новый способ изготовления лучше старого. Чтобы дать обоснованный ответ на этот вопрос и на весьма многочисленные аналогичные вопросы, встающие в различных областях техники, агрономии и т. п., необходимо так же, как и в задаче об оценке параметров, опираться на некоторую статистическую модель или схему подобного рода явлений. Мы рассматриваем две генеральные совокупности электрических ламп, распределенные по продолжительности их работы; среднее $a_1 = 1500$ часов первой совокупности мы предполагаем известным достаточно точно. Наиболее простое решение поставленного вопроса заключалось бы в сопоставлении средней второй совокупности a_2 со средней a_1. Однако мы не располагаем точным значением параметра a_2, и потому этот прямой путь сравнения для нас невозможен. Среднее a_2 мы можем оценить только с большей или меньшей точностью и надежностью по произведенным нами наблюдениям. Полученное нами выборочное среднее $\bar{x}$ можно рассматривать тогда как оценку генеральной средней a_2, причем закон распределения $\bar{x}$ зависит, конечно, от этого неизвестного параметра. Для того чтобы прийти к определенному заключению хотя бы вероятностного характера, мы сделаем гипотетическое допущение о равенстве генеральных средних: $a_2 = a_1 = a$. Такого рода вспомогательные гипотезы об отсутствии интересующего нас различия между параметрами генеральных совокупностей часто назы-

вают «*нулевыми гипотезами*». Таким образом, на основании выборки из второй совокупности мы должны принять или отбросить нулевую гипотезу. Для этого мы будем выводить следствия из сделанного допущения (нулевой гипотезы) и сравнивать с тем, что в действительности получилось в выборке. Пусть получено среднее выборочной совокупности, равное 1675 часов. Это как будто указывает на преимущество нового процесса перед старым. Предположим, однако, что среднее квадратическое отклонение средней арифметической $\bar{x}$, выражающееся соотношением (3.4.21) в виде $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, оказалось равным 140 часам. Тогда, как видно из (5.4.4), 95%-ный доверительный интервал для генеральной средней a_2 второй совокупности будет в круглых числах от 1400 до 1950 часов. Выборочная средняя в 1675 часов, попадая в этот интервал, легко может получиться из первой совокупности с генеральной средней $a_1 = 1500$ часов. Мы не имеем, следовательно, достаточных оснований для того, чтобы отбросить нулевую гипотезу. Если же в другом случае при $\sigma'_{\bar{x}} = 40$ часов 95%-ный доверительный интервал будет составлять примерно от 1600 до 1750 часов, то с большой надежностью мы можем отбросить нулевую гипотезу и признать расхождение существенным, т. е. таким, которое нельзя объяснить лишь случайными обстоятельствами данной выборки.



Черт. 85. «Критическая область» G для проверки гипотезы относительно альтернативных допущений вида $a_2 > a_1$, где a_1 — известная генеральная средняя, a_2 — оцениваемая по $\bar{x}$ генеральная средняя.

Рассмотренный нами прием дает возможность уверенно отвергнуть нулевую гипотезу, но не дает еще определенных указаний на то, какова величина расхождения. Мы можем, однако, поступить следующим образом. Предполагая опять выполненной нулевую гипотезу, рассмотрим на оси $\bar{x}$ область G (бесконечный интервал) (черт. 85), определяемую неравенством

$$\bar{x} > a_1 + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Предполагая n достаточно большим, мы можем считать, что вероятность попадания $\bar{x}$ (при нулевой гипотезе $a_2 = a_1 = a$) в эту область выражается интегралом

$$\mathbf{P}\left(\bar{x} > a_1 + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_t^\infty e^{-\frac{z}{2}}dz = 1 - \Phi(t). \qquad (6.1.1)$$

Полагая $t = \lambda_{2q}$, где λ_{2q} есть $2q\%$ (двухсторонний) предел нормального уклонения $\frac{\bar{x} - a_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, получим:

$$\mathbf{P}\left(\bar{x} > a_1 + \lambda_{2q}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \Phi(\lambda_{2q}) = \frac{q}{100}, \qquad (6.1.2)$$

так как

$$\mathbf{P}\left(|\bar{x} - a_1| > \lambda_{2q}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2[1 - \Phi(\lambda_{2q})] = \frac{2q}{100}.$$

Мы видим, что построенная нами гипотеза позволяет вывести определенное заключение относительно вероятности попадания $\bar{x}$ в область G. Если эта

вероятность попадания будет мала, то мы будем иметь дело с событием, практически невозможным, и с некоторым небольшим риском ошибиться мы можем пренебречь возможностью наступления этого события. Поэтому, если $\bar{x}$ попало в область G (т. е. событие произошло), то это будет для нас прямым указанием на неправильность проверяемой гипотезы. Бракуя ее, мы будем ошибаться в среднем лишь в доле $\frac{q}{100}$ всех случаев применения этого приема в аналогичных условиях. Выбор достаточно малой вероятности $\frac{q}{100}$ (уровня значимости нашей гипотезы) позволяет гарантировать исследователя достаточной надежностью от неправильных заключений — браковки гипотезы в тех случаях, когда она действительно верна.

В нашем случае, беря, например, $q = 1\%$, для λ_{2q} по табл. IV приложений получим $\lambda_{2q} = 2{,}326$, и область G определится неравенством $\bar{x} > 1500 + 2{,}326 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Построенная таким образом область является примером «критической области» для проверяемой гипотезы (относительно альтернативных допущений вида $a_2 > a_1$).

Если $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 40$ часов, то средняя арифметическая 1675 попадает в критическую область $\bar{x} > 1593$, и мы достаточно уверенно (рискуя ошибиться лишь в 1% всех случаев) можем опровергнуть нулевую гипотезу и считать, что новый процесс производства лучше старого.

Мы можем считать с надежностью в 95%, что соблюдается неравенство

$$1675 - 1{,}96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a_2 < 1675 + 1{,}96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

или, в круглых цифрах, $1595 < a_2 < 1755$ и что разность $a_2 - a_1$ удовлетворяет неравенству

$$95 < a_2 - a_1 < 255.$$

Проверка гипотез, как мы видим, тесно связана с проблемой оценки параметров распределения, которой была посвящена глава V. Однако ее целесообразно рассматривать отдельно в силу своеобразия употребляемых здесь приемов.

6.1.2. Статистические приемы проверки гипотез. «Критическая область». Уровень значимости критериев. Пример, рассмотренный в предыдущем разделе, дает повод ввести некоторые новые понятия с целью более точной формулировки задачи проверки. Мы будем называть «*статистической гипотезой*» всякое предположение о законах распределения рассматриваемых величин, или генеральных совокупностей. Допуская подобного рода предположения, мы будем выводить из них разные следствия и рассматривать, насколько оправдываются они на опыте. Эти следствия будут носить характер вероятностных суждений о поведении некоторых статистических характеристик, значения которых мы будем вычислять по данным выборки. Эти характеристики мы будем называть *критериями* проверки. Прием проверки гипотезы будет состоять тогда в выборе определенного правила, указывающего условия, при которых мы будем считать гипотезу не согласующейся с опытом и браковать ее.

Чтобы сформулировать такое правило, мы выбираем прежде всего некоторую статистическую характеристику, выборочное распределение которой при данной гипотезе должно быть полностью известно. В рассмотренном примере такой характеристикой была средняя арифметическая $\bar{x}$, нормально распределенная с центром, положение которого полностью фиксировалось сделанной гипотезой, а дисперсию мы считали известной. Далее мы выбираем некоторый уровень значимости, т. е. достаточно малое значение вероятности, отвечающее событиям, которые в данной обстановке исследования можно считать практически невозмож-

ными. Появление такого события мы будем считать указанием на неправильность нашего исходного предположения. Обычно берут 5%-, 2%- или 1%-ный и т. п. уровни значимости. Чем меньше уровень значимости, тем меньше вероятность забраковать верную гипотезу. Для данного уровня значимости мы указываем далее область, попадание в которую выбранной нами статистической характеристики в том случае, когда испытываемая гипотеза верна, будет в точности равно уровню значимости. Такая область носит название «*критической области*» данного критерия. Попадание в критическую область говорит о несоответствии гипотезы фактическим данным, и гипотеза бракуется, так как мы получаем результат, практически невозможный при данном попадании. Область, дополняющая критическую, носит название *области «допустимых значений»*. С уменьшением уровня значимости расширяется область допустимых значений критерия и вместе с тем теряется его чувствительность, так как повышается вероятность принять гипотезу даже в тех случаях, когда эта гипотеза неверна и на самом деле осуществляются гипотезы, противоречащие проверяемой, но близкие к ней и потому обеспечивающие большую вероятность попадания критерия в область допустимых значений. Гарантируя себя выбором достаточно малого уровня значимости от возможности неправильной браковки верной гипотезы (т. е. от ошибки «первого рода»), мы вместе с тем должны озаботиться и тем, чтобы гарантировать себя от ошибочного принятия ложной гипотезы (т. е. от ошибки «второго рода»).

Обоснование статистических критериев составляет весьма сложную задачу современной математической статистики. Несколько подробнее вопросы общей теории проверки гипотез будут рассмотрены в § 7 настоящей главы.

Если используемый нами критерий попадает в область допустимых значений, то мы не можем еще сделать вывода о правильности нашей гипотезы: мы можем только заключить, что наблюденное значение критерия не противоречит ей, и признать допустимость гипотезы, по крайней мере, до тех пор, пока более обстоятельные исследования (например, по большему материалу или с помощью других более точных критериев) не приведут нас к противоположному заключению. В рассмотренном примере критической областью для гипотезы $a_2 = a_1$ с уровнем значимости $\frac{q\%}{100}$ служил бесконечный с одной стороны интервал

$$\bar{x} > 1500 + \lambda_{2q}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Разумеется, описанная процедура выбора приема проверки не обладает полной определенностью, например, при данном уровне значимости для выбора критической области имеется еще бесконечно много возможностей. Точно так же неясно, каким критерием лучше пользоваться в каждом случае проверки. Все эти вопросы весьма важны для теории и практики.

Вопрос о сравнительной эффективности различных способов проверки гипотез мы рассмотрим в общем виде в конце настоящей главы, следующие же параграфы посвятим изложению современных способов проверки статистических гипотез, относящихся к некоторым типичным проблемам практики.

§ 2. Проверка гипотезы о равенстве средних

6.2.1. Гипотеза о положении центра группирования. Мы рассмотрим здесь еще два примера испытания гипотезы о положении центра группирования по данным выборки. При этом мы, как и в **6.1.1**, будем опираться на оценку генеральной средней по средней арифметической выборки, предполагая сначала, что эта последняя распределена нормально с известным средним квадратическим отклонением σ. Если же среднее квадратическое отклонение совокупности неизвестно и его в свою очередь приходится оценивать по выборочным данным,

мы принуждены будем обратиться к оценке по методу Стьюдента, предполагая, конечно, что условие нормальности распределения также выполнено.

Пример 6.2.1. На основе подробного анализа точности работы горизонтально-ковочной машины № 4 было установлено, что высота отштампованных внутренних колец шарикоподшипников составляет в среднем 21,46 *мм*, а среднее квадратическое отклонение высоты $\sigma = 0{,}36$ *мм*. Распределение отштампованных колец по высоте оказалось достаточно близким к нормальному.

Позднее был проведен сокращенный анализ работы машины № 2. Была взята выборка в 30 штук колец, отштампованных на этой машине. Средняя арифметическая высота кольца оказалась равной $\bar{x} = 21{,}58$ *мм* и среднее квадратическое отклонение s оказалось несущественно отличающимся от σ. Требовалось определить, можно ли считать различие в высотах колец, отштампованных на машинах № 4 и № 2, случайным и, следовательно, несущественным.

Наша «нулевая гипотеза» заключается в том, что центр распределения a_1 при работе на машине № 4 не отличается от центра a_2, имевшего место при работе на машине № 2. В качестве критерия проверки нулевой гипотезы мы принимаем нормально распределенную с плотностью $n(z; 0; 1)$ величину:

$$z = \frac{\bar{x} - a_1}{\sigma_{\bar{x}}}.$$

Выбирая уровень значимости, равный 5%, мы строим для нашего критерия область допустимых значений с помощью табл. V приложений. Границами ее будут: $-1{,}96$ $+1{,}96$.

Таким образом, наша критическая область расположена по обе стороны от этих границ.

Имеем:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}36}{\sqrt{30}} = 0{,}066 \text{ мм}.$$

Полученное из выборки значение нашего критерия составляет:

$$z = \frac{21{,}58 - 21{,}46}{0{,}066} = 1{,}82.$$

Оно лежит в области допустимых значений. Поэтому предположение об отсутствии существенной разницы между средними высотами колец, отштампованных на машинах № 4 и № 2, не противоречит произведенным наблюдениям.

Пример 6.2.2. Пусть известно, что после чистового нарезания зубьев на точном зуборезном станке погрешность эвольвентного профиля зубьев шестерен составляет в среднем для данного типо-размера шестерен $a_1 = 18$ *мк* при нормальном ее распределении. Требуется определить, дает ли существенное преимущество в отношении точности бокового профиля зубьев этих шестерен применение последующего шевингования, если на 20 шевингованных шестернях была получена средняя погрешность профиля $\bar{x} = 14$ *мк* и среднее квадратическое отклонение этой погрешности $s = 4{,}5$ *мк*. 20 шевингованных шестерен мы рассматриваем как выборку из генеральной совокупности со средней $a_1 = 18$ *мк*. Так как точные значения средних квадратических отклонений при чистовом зубофрезеровании и шевинговании неизвестны, но имеются основания (например, по наблюдениям, относящимся к другим типо-размерам шестерен) считать их одинаковыми и общее для обоих случаев среднее квадратическое отклонение приходится оценивать по той же выборке, то здесь при построении критической области придется воспользоваться методом Стьюдента.

При уровне значимости $q = 5\%$ по табл. XIV приложений, считая $\frac{q}{100} = 0{,}05$ и $k = 20 - 1 = 19$, мы находим $t_{q,k} = 2{,}07$, откуда критическая область будет

определяться неравенством

$$|\bar{x} - a_1| > \frac{4{,}5}{\sqrt{20-1}} \quad 2{,}07 \cong 2{,}1 \ мк.$$

Мы же получили в выборке значение

$$|\bar{x} - a_1| = |14 - 18| = 4 \ мк.$$

Этот результат лежит в критической области не только при уровне значимости 5%, но и при 1% и даже 0,5%, что легко проверить по табл. XVIII приложений. Поэтому нулевую гипотезу следует отбросить, а шевингование нужно определенно считать существенно влияющим на точность бокового профиля зубьев шестерен.

При условии нормальности распределения погрешности профиля мы можем с 90%-ным коэффициентом доверия утверждать, что оцениваемая разность $a_2 - a_1$ между средними двух совокупностей определяется следующим образом:

$$\mathbf{P}\left(-t < \frac{a_2 - \bar{x}}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}} < t\right) = 2S(t) = 0{,}90.$$

Из табл. XVII приложений находим $t = 1{,}7$. Далее

$$-1{,}7 \frac{4{,}5}{\sqrt{20-1}} < a_2 - 14 < 1{,}7 \frac{4{,}5}{\sqrt{20-1}}$$

или

$$-1{,}8 \ мк < a_2 - 14 < 1{,}8 \ мк$$

и окончательно

$$-5{,}8 < a_2 - a_1 < -2{,}2.$$

6.2.2. Проверка гипотезы о равенстве двух средних по выборкам большого объема. Мы предполагали до сих пор среднюю и дисперсию (или только среднюю) одной из сравниваемых совокупностей известными точно. В других случаях мы должны сравнивать данные двух выборок и по результатам их судить о реальности расхождения генеральных средних в интересующих нас совокупностях.

Пусть $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — выборочные средние, полученные по двум независимым выборкам объемов соответственно n_x и n_y из двух генеральных совокупностей. Если исходные случайные величины X и Y распределены нормально или объемы выборок n_x и n_y достаточно велики, величины $\bar{x}$ и $\bar{y}$, как мы видели в **5.3.5**, будут распределены соответственно нормально или приближенно нормально. Но по свойству нормального закона сумма, разность и вообще всякая линейная комбинация независимых нормальных величин сама распределена нормально с соответствующими центром и дисперсией (см. § 5 главы IV). Поэтому мы будем считать, что разность $\bar{y} - \bar{x}$ подчиняется закону

$$N\left(z;\ a_y - a_x,\ \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}\right).$$

Это обстоятельство и дает возможность построить критическую область для нулевой гипотезы $a_y - a_x = 0$, если допустить еще, что, по крайней мере, при большом объеме выборки мы располагаем достаточно точными оценками неизвестных дисперсий σ_x^2 и σ_y^2. Критерием проверки служит тогда нормированная разность

$$Z = \frac{\bar{y} - \bar{x}}{\sigma_{(\bar{y}-\bar{x})}},$$

а критической областью с уровнем значимости $q\%$ — область больших по абсолютной величине уклонений

$$|Z| > Z_q.$$

Если альтернативным к нулевой гипотезе предположением является допущение $a_y > a_x$ или, наоборот, $a_y < a_x$, то доверительная область (при уровне значимости q) определяется неравенством

$$Z > Z_{2q} \tag{6.2.1}$$

или соответственно

$$Z < -Z_{2q}. \tag{6.2.2}$$

Пример 6.2.3. Пусть у нас имеются данные об испытаниях двух выборок по 50 штук из продукции двух электроламповых заводов; оказалось, что средняя арифметическая продолжительность работы ламп завода A составила 1282 часа со средним квадратическим отклонением 80 часов, а завода B — 1208 часов со средним квадратическим отклонением 94 часа.

Требуется установить, имеется ли реальное различие в качестве ламп заводов A и B. Так как σ_x^2 и σ_y^2 неизвестны, их необходимо оценить по выборочным данным. Такая оценка, естественно, связана с погрешностью, однако при выборке объема 50 эта погрешность не будет существенно влиять на выводы. С достаточным приближением будем иметь:

$$\sigma_{(\bar{y}-\bar{x})} \approx \sqrt{\frac{80^2}{50} + \frac{94^2}{50}} = 17{,}5 \text{ часа}.$$

Выбирая, как и прежде, уровень значимости критической области равным $q = 5\%$ и пользуясь табл. VII приложений, получим $z_5 = 1{,}96$; поэтому расхождение между средними, превышающее по абсолютной величине $z_5 \cdot \sigma_{(\bar{y}-\bar{x})} \approx$ $\approx 1{,}96 \cdot 17{,}5 = 34{,}3$ часа, следует считать существенным, мы же имеем $\bar{y} - \bar{x} =$ $= 1282 - 1208 = 74$ часа. Это уклонение попадает в критическую область даже, если бы мы взяли значительно более высокий уровень значимости, например $q = 0{,}01\%$. Таким образом, в данном случае следует признать, что продолжительность работы ламп завода A определенно больше, нежели завода B.

Для разности $a_y - a_x$ мы можем дать доверительные границы. Например, доверительной вероятности $P = 0{,}95$ соответствует интервал для $a_y - a_x$ с границами $\alpha = 74 - 34{,}3 = 39{,}7$ часа и $\beta = 74 + 34{,}3 = 108{,}3$ часа.

6.2.3. Проверка гипотезы о равенстве двух средних по малым выборкам. Если объемы выборок малы, то способ проверки гипотезы о расхождении между двумя средними, примененный в **6.2.2**, будет недостаточно точным даже в том случае, когда величины X и Y, а следовательно, и средние арифметические $\bar{x}$ и $\bar{y}$ строго подчинены нормальным законам. В этих случаях мы должны считаться с тем, что дисперсии σ_x^2 и σ_y^2 не могут быть оценены достаточно точно; поэтому естественно опираться на критерии, построенные по методу Стьюдента, использующие эмпирические дисперсии s_x^2 и s_y^2, полученные в выборках. Однако мы принуждены будем сделать еще одно существенное допущение, которое суживает область применения нового критерия: мы предположим, что дисперсии генеральных совокупностей равны $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$.

Пусть опять две случайные независимые выборки объемов n_x и n_y будут взяты из двух нормальных совокупностей с центрами a_x и a_y и дисперсией σ^2. Рассмотрим величину

$$Z = \frac{(\bar{y} - \bar{x}) - (a_y - a_x)}{\sigma_{(\bar{y}-\bar{x})}} = \frac{(\bar{y} - \bar{x}) - (a_y - a_x)}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}}.$$

Наряду с Z введем еще величину

$$V^2 = \frac{n_x s_x^2 + n_y s_y^2}{\sigma^2},$$

которая, как мы видели в **5.4.3**, распределена по закону χ^2 с числом $k = n_x + n_y - 2$ степеней свободы. Как легко видеть, величины Z и V^2 будут отвечать условиям теоремы **5.4.3**, при которых имеет место t-распределение для частного $t = \frac{Z}{V}$.

Следовательно, критерий, основанный на характеристике

$$t = \frac{(\bar{y} - \bar{x}) - (a_y - a_x)}{\sqrt{n_x s_x^2 + n_y s_y^2}} \sqrt{\frac{n_x n_y (n_x + n_y - 2)}{n_x + n_y}}, \qquad (6.2.3)$$

будет следовать распределению Стьюдента с числом $n_x + n_y - 2$ степеней свободы. Тогда для проверки нулевой гипотезы $a_y = a_x$ мы выберем критическую область с уровнем значимости q, определяемую неравенством

$$|t| > t_{q,k} \qquad (q = n_x + n_y - 2), \qquad (6.2.4)$$

где $t_{q,k}$ определяется с помощью табл. XVI, XVII и XVIII приложений. Затем мы проверяем, попадает ли выборочное значение

$$t = \frac{\bar{y} - \bar{x}}{\sqrt{n_x s_x^2 + n_y s_y^2}} \sqrt{\frac{n_x n_y (n_x + n_y - 2)}{n_x + n_y}} \qquad (6.2.5)$$

в указанную критическую область.

Следует еще раз подчеркнуть, что применение критерия t связано с предположением о равенстве дисперсий; это последнее допущение должно быть обосновано предварительно. В противном случае показания критерия t могут привести к ошибочным заключениям.

Если показано, что нулевая гипотеза $a_y = a_x$ неприемлема, то бывает интересно знать, насколько велико или мало возможное расхождение между генеральными средними. Для заданной доверительной вероятности P доверительные границы дают минимальное и максимальное значения расхождения между средними.

Рассмотрим числовой пример.

Пример 6.2.4. При обработке втулок (с диаметром по чертежу $2{,}050 + 0{,}150$ *мм*) на автоматическом станке было отобрано две пробы по 10 штук деталей в каждой. Результаты измерений диаметров валиков, попавших в первую и вторую пробы, приводятся в табл. 6.2.1:

Таблица 6.2.1

№ деталей в порядке обработки.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Проба № 1 (x)	2,066	2,063	2,068	2,060	2,067	2,063	2,059	2,062	2,062	2,060
Проба № 2 (y)	2,063	2,060	2,057	2,056	2,059	2,058	2,062	2,059	2,059	2,057

Распределение диаметров втулок предполагается нормальным. Поскольку пробы отбирались из продукции одного и того же станка, можно без специального исследования предположить, что $\sigma_x = \sigma_y$. Пусть теперь наша гипотеза заключается в том, что генеральные средние, соответствующие моментам отбора проб

№ 1 и № 2, равны между собой, т. е. $a_x = a_y$. Вычислим средние арифметические и эмпирические дисперсии

$$\bar{x} = 2{,}063 \text{ мм}, \quad \bar{y} = 2{,}059 \text{ мм}, \quad n_x s_x^2 = 86 \text{ мк}^2, \quad n_y s_y^2 = 44 \text{ мк}^2.$$

Пользуясь соотношением (6.2.5), получим:

$$t = \frac{-4}{\sqrt{86+44}} \cdot \sqrt{\frac{100 \cdot 18}{20}} = -3{,}3, \qquad k = 18.$$

Из табл. XVII находим, что вероятность q получения t, большего по абсолютной величине, чем 3,3, при $k = 18$ равна $q = 0{,}4\%$.

Таким образом, полученное на опыте значение критерия t будет попадать в критические области при уровнях значимости в 5, 2, 1 и даже $0{,}5\%$, что свидетельствует о наличии несомненного расхождения центров группирования, т. е., иными словами, уровней настроек станка.

К тому же выводу мы могли бы прийти, воспользовавшись табл. XVIII приложений. По этой таблице находим, что при уровне значимости, например, в 1% и $k = 18$ $t_{q,k} = 2{,}878$, т. е. меньше наблюденного нами значения.

Найдем теперь доверительные границы для оценки расхождения между центрами $a_y - a_x$, используя метод Стьюдента.

Беря, например, 95%-ный доверительный интервал, мы будем иметь:

$$\mathbf{P}(|t| < t_{5,\,18}) = 0{,}95,$$

откуда

$$\alpha = \bar{y} - \bar{x} - t_{5,\,18}\sqrt{\frac{(n_x s_x^2 + n_y s_y^2)(n_x + n_y)}{n_x n_y (n_x + n_y - 2)}} < a_y - a_x < \beta =$$

$$= \bar{y} - \bar{x} + t_{5,\,18}\sqrt{\frac{(n_x s_x^2 + n_y s_y^2)(n_x + n_y)}{n_x n_y (n_x + n_y - 2)}}. \qquad (6.2.6)$$

В данном примере, замечая, что при $t_{5,\,18} = 2{,}101$ (см. табл. XVIII), найдем:

$$\alpha = -4 - 2{,}1\sqrt{\frac{(86+44)\cdot 20}{100 \cdot 18}} = -4 - 2{,}5 = -6{,}5 \text{ и } \beta = -4 + 2{,}5 = -1{,}5.$$

Таким образом,

$$-6{,}5 \text{ мк} < a_y - a_x < -1{,}5 \text{ мк}.$$

Из этого результата ясно, что в данном случае по двум малым выборкам объемов по 10 штук можно с достаточно высокой надежностью заключить о смещении центра настройки станка в момент времени, соответствующий пробе № 2, по сравнению с моментом, соответствующим пробе № 1, в сторону уменьшения размера примерно на $1{,}5 + 6{,}5$ микрона.

6.2.4. Проверка гипотезы об однородности средних совокупности и ее подгрупп. Нередко на практике совокупность наблюдений составляется из нескольких подгрупп, полученных в том или ином порядке (например, из различных частей генеральной совокупности). В этом, а также и в некоторых других случаях иногда требуется проверить однородность средних в такой совокупности с целью суждения о возможности использования обобщенных данных. Другими словами, мы хотим знать, существенно ли расхождение между средними подгрупп и общим средним для всей совокупности наблюдений или это расхождение можно отнести за счет случайных колебаний в отдельных выборках. Эта проверка может быть проведена с помощью критерия, аналогичного критерию Стьюдента.

Пусть $\bar{x}_m$ представляет среднюю арифметическую, вычисленную по некоторой подгруппе из m наблюдений, т. е. по той или иной части всей совокупности n наблюдений. Далее обозначим через

$$y_m = \frac{\bar{x}_m - \bar{x}}{s} \tag{6.2.7}$$

относительное (в долях общего эмпирического среднего квадратического отклонения s) уклонение средней $\bar{x}_m$ подгруппы от общей средней $\bar{x}$. Тогда можно доказать [1]), что величина

$$t = \frac{y_m \sqrt{m(n-2)}}{\sqrt{n - m - m y_m^2}} \tag{6.2.8}$$

будет распределена по закону Стьюдента с $k = n - 2$ степенями свободы.

Полученный нами таким образом критерий, основанный на характеристике t, может быть использован для проверки гипотезы об отсутствии существенного различия между средней по подгруппе $\bar{x}_m$ и общей средней арифметической. Построение критических областей для этого критерия производится в том же порядке, что и в предыдущих случаях.

Пример 6.2.5. Пусть у нас имеется «большая выборка» объема 140 штук из текущей продукции горизонтально-ковочной машины, составленная из 7 отдельных «временных» проб по 20 штук штамповок, т. е. проб, отштампованных через определенные промежутки времени. При этом известно, что общее среднее отклонение от чертежного размера по всей «большой выборке» составляет $\bar{x} = +1{,}20$ *мм* и общее эмпирическое среднее квадратическое отклонение $s = 0{,}32$ *мм*. Требуется оценить с 5%-ным уровнем значимости, является ли существенным расхождение между средней арифметической (наибольшей по величине) в пробе № 2, равной $\bar{x}_2 = 1{,}49$ *мм*, и общей средней арифметической по всей «большой выборке».

По формулам (6.2.7) и (6.2.8) получаем:

$$y_2 = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}}{s} = \frac{1{,}49 - 1{,}20}{0{,}32} = 0{,}91,$$

$$t = \frac{0{,}91\sqrt{20(140-2)}}{\sqrt{140 - 20 - 20 \cdot 0{,}91^2}} = +4{,}7.$$

По табл. XVIII приложений для $q = 5\%$ и $k = \infty$ (так как в таблице нет значений для числа степеней свободы $k = 140 - 2 = 138$) находим:

$$t_{5,\infty} = 1{,}96.$$

Таким образом, средняя по пробе № 2 попадает в критическую область, определяемую неравенством

$$\bar{x} > t_q \frac{\sqrt{m(n-2)}}{\sqrt{n - m - m y_m^2}}, \tag{6.2.9}$$

и поэтому гипотеза об однородности средних пробы № 2 и всей выборки должна быть отвергнута. Отсюда следует, что за время отбора семи проб, повидимому, имели место смещения центра настройки машины.

§ 3. F-распределение и его применения к проверке гипотез

6.3.1. F-распределение. Как было указано в **6.2.3**, для того чтобы применять t-распределение при проверке гипотезы о расхождении между средними, необходимо предположить, что генеральные средние квадратические отклонения, соответствующие двум сравниваемым выборкам, равны между собой, т. е. что $\sigma_x = \sigma_y$.

[1]) См. Г. Крамер, Математические методы статистики, стр. 427.

Такая же задача выдвигается в ряде других случаев, например при сравнении точности двух рядов измерений, при проверке устойчивости технологического процесса и т. п.

В свою очередь, для того чтобы судить о равенстве дисперсий, естественно рассмотреть отношение выборочных дисперсий и исследовать закон распределения этого отношения (конечно, в предположении нормальности рассматриваемых генеральных совокупностей). Эта задача приведет нас к новой функции распределения, имеющей применение при решении многих важных проблем практики. Мы докажем сначала одно вспомогательное предложение:

Если U и V независимы и распределены по закону χ^2 со степенями свободы k_1 и k_2 соответственно, то величина

$$F = \frac{\frac{U}{k_1}}{\frac{V}{k_2}} = \frac{k_2 U}{k_1 V} \tag{6.3.1}$$

имеет плотность вероятности

$$\varphi_F(f) = \frac{C_0 f^{\frac{k_1-2}{2}}}{(k_2 + k_1 f)^{\frac{k_1+k_2}{2}}}, \quad C_0 = \frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right) k_1^{\frac{k_1}{2}} \cdot k_2^{\frac{k_2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}, \tag{6.3.2}$$

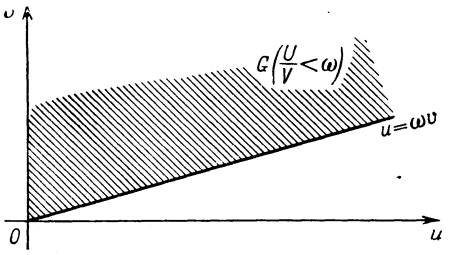
называемую плотностью F-распределения со степенями свободы k_1 и k_2.

Докажем это предложение.

Рассмотрим сначала распределение вероятности величины $W = \frac{U}{V}$. Пусть $w > 0$, тогда

$$\mathbf{P}(W < w) = \mathbf{P}\left(\frac{U}{V} < w\right) = \int\int_G \varphi_U(u)\,\varphi_V(v)\,du\,dv, \tag{6.3.3}$$

где G — область плоскости (u, v), определяющаяся неравенствами $u \geqslant 0$, $v > 0$ и



Черт. 86. Геометрическая интерпретация функции распределения величины $W = \frac{U}{V}$.

$$\frac{u}{v} < w \quad \text{или} \quad u < vw.$$

Эта область ограничена положительными полуосями координат прямой $u = v \cdot w$, проходящей через начало координат (черт. 86).

Интегрируя по G и пользуясь (4.5.49), мы получим:

$$\mathbf{P}(W < w) = \int_0^\infty \varphi_v(v)\,dv \int_0^{vw} \varphi_u(u)\,du =$$

$$= C_1 C_2 \int_0^\infty e^{-\frac{v}{2}} v^{\frac{k_2-2}{2}}\,dv \int_0^{vw} u^{\frac{k_1-2}{2}} e^{-\frac{u}{2}}\,du, \tag{6.3.4}$$

где C_1 и C_2 — постоянные, полученные из (4.5.49).

Найдем теперь плотность распределения W, продифференцировав левую и правую части выражения (6.3.4) (причём в правой части дифференцирование произведем под знаком интеграла) по w:

$$\frac{d\mathbf{P}(W<w)}{dw} = \varphi_W(w) = C_1 C_2 \int_0^\infty e^{-\frac{v}{2}} v^{\frac{k_2}{2}-1} (vw)^{\frac{k_1-2}{2}} e^{-\frac{vw}{2}} v\,dv =$$

$$= C_1 C_2 w^{\frac{k_1-2}{2}} \int_0^\infty e^{-\frac{v}{2}(1+w)} v^{\frac{k_1+k_2-2}{2}}\,dv.$$

Сделаем далее в интеграле замену переменного v, полагая $y = \frac{v}{2}(1+w)$; тогда $\varphi_W(w)$ преобразуется следующим образом:

$$\varphi_W(w) = C_1 C_2 w^{\frac{k_1-2}{2}} \int_0^\infty \left(\frac{2y}{1+w}\right)^{\frac{k_1+k_2-2}{2}} e^{-y} \frac{2}{1+w}\, dy =$$

$$= \frac{C_1 C_2 w^{\frac{k_1-2}{2}} \cdot 2^{\frac{k_1+k_2}{2}}}{(1+w)^{\frac{k_1+k_2}{2}}} \int_0^\infty y^{\frac{k_1+k_2-2}{2}} e^{-y}\, dy = \frac{C w^{\frac{k_1-2}{2}}}{(1+w)^{\frac{k_1+k_2}{2}}}, \quad (6.3.5)$$

где константа C, включающая полученное с помощью (4.5.2) значение интеграла, зависит только от k_1 и k_2. Ее точное выражение будет:

$$C = \frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}. \quad (6.3.6)$$

В приложениях оказывается более удобным оперировать не величиной W, а выражением вида

$$F = \frac{\frac{U}{k_1}}{\frac{V}{k_2}} = \frac{k_2 U}{k_1 V} = \frac{k_2}{k_1} W.$$

Переходя от плотности распределения W, заданной (6.3.5), к плотности распределения F (т. е. делая замену $w = \frac{k_1}{k_2} f$, $dw = \frac{k_1}{k_2} df$ и принимая во внимание значение C_0 в (6.3.2)), получим:

$$\varphi_F(f) = \varphi_W\left(\frac{k_1}{k_2} f\right) \cdot \frac{k_1}{k_2} = \frac{C\left(\frac{k_1}{k_2} f\right)^{\frac{k_1-2}{2}} \cdot \frac{k_1}{k_2}}{\left(1+\frac{k_1}{k_2} f\right)^{\frac{k_1+k_2}{2}}} =$$

$$= C\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{k_1-2}{2}} \cdot \frac{f^{\frac{k_1-2}{2}} k_2^{\frac{k_1+k_2}{2}}}{(k_2+k_1 f)^{\frac{k_1+k_2}{2}}} \cdot \frac{k_1}{k_2} = \frac{C_0 f^{\frac{k_1-2}{2}}}{(k_2+k_1 f)^{\frac{k_1+k_2}{2}}},$$

что и требовалось доказать.

Для F-распределения составлены таблицы (см. табл. XX приложений) $q^0/_0$-пределов F_q, таких, что вероятность того, что случайная величина F примет значение, большее F_q, равна $\frac{q}{100}$.

В табл. XX приложений приводятся значения F_q (в верхней строчке, напечатанной обычным шрифтом, при $\frac{q}{100} = 0{,}05$ и в нижней строчке, напечатанной жирным шрифтом, при $\frac{q}{100} = 0{,}01$) для чисел степеней свободы k_1 от 1 до 500 и k_2 от 1 до 1000. Эти значения F_q удовлетворяют соотношению

$$\frac{q}{100} = \int_{F_q}^\infty \frac{C_0 f^{\frac{k_1-2}{2}}}{(k_2+k_1 f)^{\frac{k_1+k_2}{2}}}\, df. \quad (6.3.7)$$

Перейдем теперь к *приложениям F-распределения*.

6.3.2. Проверка гипотезы о равенстве дисперсий. Мы рассмотрим теперь приложение F-распределения в первую очередь к испытанию гипотезы о равенстве дисперсий двух нормально распределенных величин X и Y по двум независимым выборкам объемов n_x и n_y. Это предположение лежало в основе рассмотренной уже процедуры испытания гипотезы о равенстве центров с помощью t-критерия.

Пусть s_x^2 и s_y^2 будут выборочными дисперсиями, полученными из случайных выборок из указанных двух совокупностей.

Так как случайные величины $\frac{n_x s_x^2}{\sigma_x^2}$ и $\frac{n_y s_y^2}{\sigma_y^2}$ обладают независимыми χ^2-распределениями с числом $k_1 = (n_x - 1)$ и $k_2 = (n_y - 1)$ степеней свободы соответственно, то величины

$$\frac{U}{k_1} = \frac{n_x s_x^2}{(n_x - 1)\sigma_x^2}$$

и

$$\frac{V}{k_2} = \frac{n_y s_y^2}{(n_y - 1)\sigma_y^2}$$

удовлетворяют требованиям, предъявляемым в (6.3.1) к U и V. Учитывая гипотезу о том, что $\sigma_x = \sigma_y$, мы приходим далее к тому, что

$$F = \frac{\frac{n_x}{n_x - 1} s_x^2}{\frac{n_y}{n_y - 1} s_y^2} = \frac{\bar{s}_x^2}{\bar{s}_y^2} \tag{6.3.8}$$

(где $\bar{s}_x^2$ и $\bar{s}_y^2$ — несмещенные оценки дисперсий величин X и Y) имеет F-распределение с $k_1 = n_x - 1$ и $k_2 = n_y - 1$ числами степеней свободы.

Отметим, что мы при этом выводе не делали никаких допущений относительно центров распределений a_x и a_y наших генеральных совокупностей. Способ проверки равенства дисперсий, подобно способу проверки гипотезы о равенстве средних с помощью t-распределения, опирается на независимость F-распределения от каких-либо неизвестных параметров генеральных совокупностей.

Пример 6.3.1. В качестве числовой иллюстрации рассмотрим данные примера 6.2.4. Находим:

$$\bar{s}_x^2 = \frac{n_x s_x^2}{n_x - 1} = \frac{86}{9} = 9{,}6 \text{ мк}^2, \quad \bar{s}_y^2 = \frac{n_y s_y^2}{n_y - 1} = \frac{44}{9} = 4{,}9 \text{ мк}^2,$$

откуда

$$F = \frac{9 \cdot 86}{44 \cdot 9} = 1{,}95 \text{ с } k_1 = k_2 = 9 \text{ степенями свободы.}$$

Чтобы проверить гипотезу о равенстве дисперсий $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$, мы должны еще построить критическую область для критерия. Только тогда мы сможем судить о том, будет ли полученное нами значение слишком большим или слишком малым. За эту критическую область принимают два интервала: интервал «больших» значений F, удовлетворяющих неравенству $F > F_2$, и интервал «малых» значений $0 < F < F_1$, причем подбирают критические точки F_1 и F_2 так, что при уровне значимости α

$$\mathbf{P}(F > F_2) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{и} \quad \mathbf{P}(F < F_1) = \frac{\alpha}{2}. \tag{6.3.9}$$

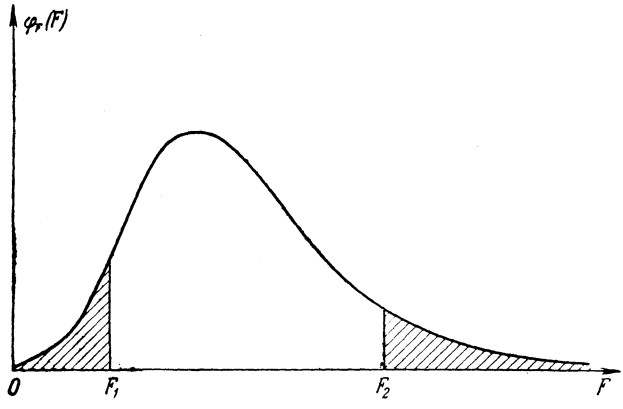
Такой выбор критической области, как можно показать, обеспечивает большую чувствительность критерия F.

На черт. 87 изображена кривая распределения критерия F. Здесь заштрихованные площади равны каждая в точности $\frac{\alpha}{2}$.

Если выборочное значение F оказывается вне интервала допустимых значений (F_1, F_2), то гипотеза $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ должна быть отвергнута. Пусть $F' = \frac{1}{F}$. Тогда в силу того, что $F = \frac{\overline{s_x^2}}{\overline{s_y^2}}$ имеет F-распределение (со степенями свободы k_1 и k_2), то $F' = \frac{\overline{s_y^2}}{\overline{s_x^2}}$ имеет также F-распределение со степенями свободы k_2 и k_1. С помощью функции F' вероятность $\mathbf{P}(F < F_1)$ может быть выражена следующим образом:

$$\frac{\alpha}{2} = \mathbf{P}(F < F_1) = \mathbf{P}\left(\frac{1}{F} > \frac{1}{F_1}\right) = \mathbf{P}\left(F' > \frac{1}{F_1}\right). \qquad (6.3.10)$$

Этот результат показывает, что левая критическая точка F-распределения соответствует правой критической точке F'-распределения. Таким образом, необходимо найти только правые критические точки для F и F', чтобы определить F_1 и F_2. Ввиду этого свойства случайной величины F табулированы только правые критические точки этого распределения. К сожалению, табл. XX приложений включает лишь 5%- и 1%-ные правые критические точки для различных сочетаний степеней свободы k_1 и k_2. Тем самым мы получаем возможность строить критические области для уровней значимости $\alpha = 0{,}1$ (10%) и $\alpha = 0{,}02$ (2%).



Черт. 87. График плотности вероятности F-распределения для типичных значений k_1 и k_2 и доверительные границы F_1 и F_2.

Для промежуточных значений уровня значимости нужные критические точки можно получать из таблиц лишь путем грубой интерполяции.

Для упрощения процедуры принято при использовании F-критерия в качестве числителя брать большее значение из двух несмещенных оценок дисперсий $\overline{s_x^2}$ и $\overline{s_y^2}$ так, что выборочное значение F всегда больше единицы. Если далее условиться отбрасывать гипотезу, когда F превосходит верхнее критическое значение для уровня значимости $\frac{\alpha}{2}$, то тем самым критическая область критерия будет отвечать уровню α. В самом деле, если $F > 1$, то нужно, чтобы $F > F_2$ для отбрасывания гипотезы; если же $F < 1$, то мы используем в качестве критерия величину $F' = \frac{1}{F}$ и $F' > 1$; чтобы гипотеза была отброшена, нужно, чтобы $F' > F_2'$, где F_2' — верхняя критическая точка при том же уровне $\frac{\alpha}{2}$. Но неравенство $F' > F_2'$ равносильно неравенству $F < F_1$, так как из (6.3.10) следует, что $F_2' = \frac{1}{F_1}$. Таким образом, при указанном правиле мы будем браковать гипотезу

всякий раз, когда отношение оценок дисперсий $\frac{\overline{s_x^2}}{\overline{s_y^2}}$ выходит за границы области допустимых значений, т. е. за границы интервала (F_1, F_2).

Обращаясь к примеру и беря 10%-ный уровень значимости, мы находим по табл. XX приложений при $\frac{\alpha}{2} = 5\%$ и $k_1 = k_2 = 9$ значение $F_{10} = 3{,}18$. Таким образом, выборочное значение $F_н = 1{,}95$ является незначимым. Этот результат подтверждает, что предположение о равенстве дисперсий не противоречит наблюдениям и что значимая величина t, полученная в примере 6.2.4 в связи с задачей проверки отсутствия смещения центра настройки станка, т. е. проверки равенства $a_x = a_y$, не может быть приписана неудовлетворительности предположения о равенстве $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$.

Возьмем теперь уровень значимости $\alpha = 0{,}05$, т. е. 5%. Для построения критических областей в этом случае необходимо найти F для $\frac{\alpha}{2} = 0{,}025$, т. е. для $2{,}5\%$. Но такого значения в табл. XX приложений нет, и поэтому приходится интерполировать. При 1%-ном значении имеем $F_2 = 5{,}35$, при 5%-ном — $F_{10} = 3{,}18$. Так как

1% соответствует 5,35,

5% соответствует 3,18,

то $2{,}5\%$ соответствует

$$F_б = 5{,}35 - \frac{(5{,}35 - 3{,}18) \cdot 1{,}5}{5 - 1} \approx 4{,}5.$$

Применение 5%-ного уровня значимости, естественно, не может изменить нашего вывода (принятия гипотезы), сделанного при 10%-ном уровне, так как снижение уровня значимости приводит к расширению области допустимых значений.

6.3.3. Понятие о дисперсионном анализе. Проверка гипотезы об однородности ряда средних. Задачи, подобные рассмотренным в **6.2.3,** являются довольно обычными, однако нередко приходится сопоставлять друг с другом более чем два значения средних. Так, например, с помощью нескольких различных приборов могло быть произведено по нескольку измерений с целью проверки наличия систематических погрешностей измерения. Задачи подобного рода, в которых рассматривается влияние интересующих нас факторов (в простейшем случае одного фактора) на средние, выведенные для каждой группы экспериментов, отвечающих различным возможным значениям или, как часто говорят, вариантам одного фактора, весьма многочисленны и разнообразны. Исследование подобного рода задач в различных условиях постановки опыта объединяется в настоящее время в особый отдел математической статистики, носящей название *дисперсионного анализа.* Мы рассмотрим лишь простейший случай из задач этого типа; более сложные задачи требуют уже более тонкого математического аппарата и не будут рассматриваться в этой части книги.

Заметим, что было бы неправильно применять процедуру, предназначенную для сравнения двух средних, к выбранным тем или иным способом парам средних, так как различия между средними в известной степени зависят и от взятого числа средних, т. е. разность между крайними членами в последовательности наблюдений растет с возрастанием числа наблюдений. Если бы мы располагали большим числом таких средних, то наибольшие различия между парами средних значительно выросли бы даже в том случае, когда все средние были бы получены по выборкам, извлеченным из одной совокупности.

Для того чтобы лучше уяснить руководящую идею дисперсионного анализа, мы рассмотрим сначала с несколько иной точки зрения вопрос о проверке гипо-

тезы, относящейся к одной выборке из нормальной совокупности (a, σ^2). Пусть по данным n независимым наблюдениям $x_1, x_2, \ldots, x_n$ требуется проверить гипотезу $a = a_0$.

Мы имеем прежде всего следующее тождество:

$$\sum_i (x_i - a)^2 = \sum_i (x_i - \bar{x} + \bar{x} - a)^2 = \sum_i (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - a)^2. \quad (6.3.11)$$

Каждое из двух слагаемых, стоящих в правой части (6.3.11), может быть использовано для получения несмещенной оценки неизвестной дисперсии σ^2: в самом деле, согласно (5.3.61) и (5.3.62)

$$\mathbf{M}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right] = \mathbf{M}[(n-1)\bar{s}^2] = \sigma^2(n-1),$$

$$\mathbf{M}[n(\bar{x} - a)^2] = n\mathbf{M}(\bar{x} - a)^2 = n\frac{\sigma^2}{n} = \sigma^2.$$

Мы знаем далее, что первое из слагаемых в правой части (6.3.11) имеет распределение величины $\sigma^2\chi^2$ с $(n-1)$ степенями свободы (см. **5.4.2**), а второе также можно рассматривать как величину, имеющую распределение $\sigma^2\chi^2$ с одной степенью свободы (как квадрат нормально распределенной величины).

С другой стороны, для суммы, стоящей в правой части, мы имеем распределение $\sigma^2\chi^2$ с n степенями свободы; равенство (6.3.11) представляет разбиение суммы n независимых квадратов (с n степенями свободы) на две суммы квадратов (некоторых линейных функций от $x_1, x_2, \ldots, x_n$) соответственно с $n-1$ и 1 степенями свободы. Важное свойство этого разбиения состоит в независимости слагаемых разбиения, на что указывалось в **5.4.2**.

Оказывается, что факт независимости и принадлежности к χ^2-распределению с соответствующим числом степеней свободы является следствием одной важной общей теоремы, доказательство которой мы здесь приводить не будем.

Чтобы разъяснить смысл этой теоремы, мы введем сначала важное для всего дальнейшего изложения понятие *числа степеней свободы* линейных форм от n независимых аргументов. Функция вида

$$h = \alpha_1 z_1 + \ldots + \alpha_n z_n$$

носит название *линейной формы переменных* $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Средняя арифметическая $\frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_n}{n}$ или средняя взвешенная $\frac{g_1 z_1 + g_2 z_2 + \ldots + g_n z_n}{g_1 + g_2 + \ldots + g_n}$ могут служить примерами таких форм.

Если рассматривается одновременно несколько таких форм, то всегда существенно знать, какое число среди них будет линейно независимых форм.

Формы $h_1, h_2, \ldots, h_k$ от одних и тех же переменных называются *линейно независимыми*, если ни при какой системе значений коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ при этих формах, кроме тривиальной $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$, мы не будем иметь тождество

$$\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + \ldots + \lambda_k h_k = 0. \quad (6.3.12)$$

Если r форм линейно независимы, мы будем говорить, что *число степеней свободы* равно r. В противном случае, когда формы связаны зависимостью вида (6.3.12), причем хотя бы один коэффициент λ_i отличен от нуля, они называются *линейно зависимыми*. Если, например, имеет место (6.3.12) и, скажем, $\lambda_k \neq 0$, то (6.3.12) можно разрешить относительно h_k и записать в виде

$$h_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k} h_1 - \ldots - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} h_{k-1}.$$

Таким образом, при наличии одного соотношения (6.3.12) одну из форм всегда можно линейно выразить через другие формы. Если $k-1$ форм

$h_1, h_2, \ldots, h_{k-1}$ линейно независимы, то мы будем говорить, что число степеней свободы форм $h_1, h_2, \ldots, h_k$ равно $k-1$. Аналогичным образом, если среди k линейных форм $h_1, h_2, \ldots, h_k$ содержится $k-m$ линейно независимых, а остальные m форм можно выразить через независимые формы, то говорят, что число степеней свободы форм $h_1, h_2, \ldots, h_k$ равно $k-m$. В частности, если k форм связаны m линейными соотношениями, позволяющими m форм выразить линейно через остальные $k-m$ форм, то число свободы этих k форм равно $k-m$. Пусть, далее, мы рассматриваем *квадратичную форму* (т. е. однородный многочлен второй степени относительно переменных $z_1, z_2, \ldots, z_n$) Q, представляющую сумму квадратов линейных форм $h_1, h_2, \ldots, h_k$,

$$Q = h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_k^2,$$

где

$$h_m = \alpha_{m1}z_1 + \alpha_{m2}z_2 + \ldots + \alpha_{mn}z_n.$$

Тогда мы условимся считать, что *число степеней свободы* Q равно числу степеней свободы линейных форм $h_1, h_2, \ldots, h_k$; очевидно, если это число равно $r\,(r < k)$, то Q можно выразить в функции r форм из числа $h_1, h_2, \ldots, h_k$.

Значение *теоремы «подразделения»*, к формулировке которой мы сейчас перейдем, заключается в том, что она указывает условия, при которых квадратичная форма $Q = \sum_{i=1}^{k} h_i^2$, представляющая сумму квадратов линейных форм от случайных нормально распределенных величин, подчиняется закону χ^2 с числом степеней свободы, равным как раз числу степеней свободы самой формы Q.

Теорема подразделения. *Пусть сумма* $\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$ *n нормально распределенных переменных* $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ *с центрами в нуле и единичной дисперсией представлена в виде суммы k квадратичных форм* Q_i *вида*

$$Q_i = h_{1i}^2 + h_{2i}^2 + \ldots + h_{si}^2$$

с f_i *степенями свободы. Здесь* h_{pi} *— линейные формы переменных* $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$, *так что мы имеем тождественно относительно* $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 = \sum_{i=1}^{k} Q_i = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{s} h_{ji}^2.$$

Тогда неодходимое и достаточное условие для того, чтобы квадратичные формы $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ *были независимы между собой и распределены по закону* χ^2 *с* $f_1, f_2, \ldots, f_k$ *степенями свободы соответственно, заключается в выполнении равенства*

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_k = n.$$

В рассмотренном в начале этого раздела случае число сумм Q_i разбиения равнялось двум, т. е. мы имели в правой части $Q_1 + Q_2$, причем

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right)^2 = h_{11}^2 + \ldots + h_{n1}^2,$$

так что $s = n$ и

$$h_{m1} = \left(x_m - \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) = \left[(x_m - a) - \frac{(x_1 - a) + (x_2 - a) + \ldots + (x_n - a)}{n}\right]$$

есть линейная функция нормально распределенных величин $x_l - a$ с центром в нуле.

Число степеней свободы Q_1 будет $(n-1)$, так как линейные формы $h_{11}, h_{21}, \ldots, h_{n1}$ связаны одним соотношением

$$\sum_{m=1}^{n} h_{mi} = \sum_{m=1}^{n} (x_m - \bar{x}) = 0.$$

С другой стороны, в том же случае

$$Q_2 = n(\bar{x} - a)^2 = n\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} - a\right)^2 = h_{12}^2.$$

В этом случае имеется всего одна линейная форма

$$h_{12} = \sqrt{n}\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n - na}{n}\right) = \frac{\sum_{m=1}^{n} (x_m - a)}{\sqrt{n}}$$

и Q_2 имеет одну степень свободы.

Возвращаясь теперь снова к разложению (6.3.11), отметим, что две несмещенные оценки дисперсии σ^2 — $\bar{s}^2$ и $s'^2 = n(\bar{x} - a)^2$ существенно различны между собой.

Оценка $\bar{s}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ не зависит от того, какое значение имеет центр нормального распределения в генеральной совокупности и, следовательно, не зависит от сделанного допущения $a = a_0$. С другой стороны, оценка $s'^2 = n(\bar{x} - a)^2$ может быть использована только в том случае, когда относительно a мы имеем надлежащую информацию. При нашей гипотезе $a = a_0$ эта оценка примет значение

$$s'^2_{a_0} = n(\bar{x} - a_0)^2 = n(\bar{x} - a + a - a_0)^2 =$$
$$= n(\bar{x} - a)^2 + n(a - a_0)^2 + 2n(\bar{x} - a)(a - a_0). \quad (6.3.13)$$

Если гипотеза неверна и, следовательно, $a \neq a_0$, то математическое ожидание $s'^2_{a_0}$ уже не будет равно σ^2, а будет всегда больше, чем σ^2. В самом деле, из (6.3.13) следует

$$\mathbf{M}s'^2_{a_0} = n\mathbf{M}(\bar{x} - a)^2 + n(a - a_0)^2 + 2n(a - a_0)\mathbf{M}(\bar{x} - a) =$$
$$= n\frac{\sigma^2}{n} + n(a - a_0)^2 + 0 = \sigma^2 + n(a - a_0)^2.$$

Следовательно, при всяком уклонении истинного значения a от предположенного a_0 $s'^2_{a_0}$ стремится быть больше чем $\bar{s}^2$ (последняя же будет, как мы видели в **5.4.2**, при всяком a флюктуировать около σ^2).

Если мы рассмотрим отношение $F = \frac{s'^2_{a_0}}{\bar{s}^2}$, то значение F, значительно превосходящее единицу, очевидно, будет указывать на неверность гипотезы $a = a_0$. Если вместо отношения $\frac{s'^2_{a_0}}{\bar{s}^2}$ мы используем отношение $\frac{s'_{a_0}}{\bar{s}}$, то мы придем к критерию Стьюдента (см. **5.4.4**), так как

$$\frac{s'_{a_0}}{\bar{s}} = \frac{\sqrt{n}\,|\bar{x} - a_0|}{\bar{s}}.$$

Мы рассмотрим теперь простейшую схему дисперсионного анализа, применяемую при проверке гипотезы о влиянии какого-либо фактора A на результаты

экспериментов. Предполагается, что этот фактор может встречаться в нескольких различных вариантах $A_1, A_2, \ldots, A_k$ и каждому варианту A_i соответствует группа из n_i произведенных опытов, давших результаты $x_{i\nu}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n_i$).

Данные наблюдений образуют в этом случае таблицу, подобную табл. 6.3.3.

Таким образом, всего произведено $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$ опытов, результаты которых мы обозначим буквой x с двумя индексами, обозначающими: первый — номер группы, а второй — номер опыта в соответствующей группе. Мы предполагаем, что по наблюдениям каждой группы представляют выборку из нормальной совокупности; дисперсия этих совокупностей σ^2 предполагается одинаковой, не зависящей от номера группы. Это предположение будет играть очень существенную роль и должно быть проверено приемом, который был описан в **5.4.3**. Обозначая через a_i центр i-й совокупности, мы можем положить:

$$x_{i\nu} = a_i + x'_{i\nu}, \tag{6.3.14}$$

где $x'_{i\nu}$ — случайные отклонения в каждом индивидуальном опыте.

Изменение «существенных» компонент a_i в разложении (6.3.14) будет отражать влияние факторов: каждому варианту A_i отвечают соответствующие значения a_i. Для того чтобы обнаружить влияние этих факторов, мы построим «нулевую» гипотезу

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_k = a = \text{const},$$

как раз основанную на отрицании этого влияния.

В этом случае структура наблюдений (6.3.14) упрощается

$$x_{i\nu} = a + x'_{i\nu}. \tag{6.3.15}$$

Пусть $\bar{x}_i$ — среднее арифметическое i-й выборки $\bar{x}_i = \dfrac{\sum_{\nu=1}^{n_i} x_{i\nu}}{n_i}$. Подобно соотношению (6.3.11) мы можем написать теперь для каждого i ($i = 1, 2, \ldots, k$) соотношение

$$\sum_{\nu=1}^{n_i} (x_{i\nu} - a_i)^2 = \sum_{\nu=1}^{n_i} (x_{i\nu} - \bar{x}_i)^2 + n_i (\bar{x}_i - a_i)^2, \tag{6.3.16}$$

причем два члена правой части независимы между собой и распределены, как $\sigma^2\chi^2$ с $n_i - 1$ и 1 степенями свободы. Суммируя соотношения, подобные (6.3.16) при всех i, получим:

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{n_i} (x_{i\nu} - a_i)^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{n_i} (x_{i\nu} - \bar{x}_i)^2 + \sum_{i=1}^{k} n_i (\bar{x}_i - a_i)^2. \tag{6.3.17}$$

Первая из сумм правой части (6.3.17) по теории сложения для χ^2-распределений будет распределена, как $\sigma^2\chi^2$ с $N - k$ ($N = \sum_{i=1}^{k} n_i$) степенями свободы, тогда как вторая распределяется по тому же закону с k степенями свободы — оба члена представляют независимые друг от друга величины. Каждое из слагаемых, поделенное на соответствующее число степеней свободы, может рассматриваться как оценка параметра σ^2.

Полагая

$$s_r^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{n_i} (x_{i\nu} - \bar{x}_i)^2}{N - k}, \tag{6.3.18}$$

мы будем иметь несмещенную оценку σ^2, основанную лишь на колебаниях внутри каждой из выборок и не зависящую от величины центров $a_1, a_2, \ldots, a_k$ отдельных совокупностей. С другой стороны, полагая $\frac{a_1n_1+a_2n_2+\ldots+a_kn_k}{N}=a$, будем иметь:

$$\bar{x}_i-a_i=(\bar{x}_i-\bar{x})+(\bar{x}-a)-(a_i-a)=[(\bar{x}_i-\bar{x})-(a_i-a)]+(\bar{x}-a), \quad (6.3.19)$$

где

$$\bar{x}=\frac{\bar{x}_1n_1+\bar{x}_2n_2+\ldots+\bar{x}_kn_k}{N}.$$

Беря взвешенную сумму квадратов уклонений средних $\bar{x}_i$ от их центров, получим согласно (6.3.19):

$$\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{x}_i-a_i)^2=\sum_{i=1}^{k} n_i[(\bar{x}_i-\bar{x})-(a_i-a)]^2+N(\bar{x}-a)^2+$$

$$+2\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{x}-a)[\bar{x}_i-\bar{x}-(a_i-a)]. \quad (6.3.20)$$

Но для последней суммы имеем:

$$\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{x}-a)[\bar{x}_i-\bar{x}-(a_i-a)]=(\bar{x}-a)\left\{\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{x}_i-\bar{x})-\sum_{i=1}^{k} n_i(a_i-a)\right\}=0,$$

так как

$$\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{x}_i-\bar{x})=0, \quad \sum_{i=1}^{k} n_i(a_i-a)=0$$

как взвешенные суммы уклонения от средних.

Поэтому из (6.3.20) следует:

$$\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{x}_i-a_i)^2=\sum_{i=1}^{k} n_i[(\bar{x}_i-\bar{x})-(a_i-a)]^2+N(\bar{x}-a)^2. \quad (6.3.21)$$

Левая часть (6.3.21) представляет сумму k квадратов независимых нормально распределенных величин $\sqrt{n_i}(\bar{x}_i-a_i)$, первое слагаемое правой части Q_1 представляет сумму k квадратов линейных функций

$$\sqrt{n_i}[(x_i-\bar{x})-(a_i-a)]=\sqrt{n_i}[(x_i-a_i)-(\bar{x}-a)]=$$

$$=\sqrt{n_i}\left[\bar{x}_i-a_i-\frac{n_1(\bar{x}_1-a_1)+n_2(\bar{x}_2-a_2)+\ldots+n_k(\bar{x}_k-a_k)}{N}\right]$$

от тех же переменных. Эти функции связаны одним линейным соотношением

$$\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{x}_i-\bar{x}-a_i+a)=0.$$

Поэтому Q_1 имеет $k-1$ степеней свободы, второе слагаемое $Q_2=N(\bar{x}-a)^2$ — одну степень свободы. Применяя к разложению (6.3.21) теорему о подразделении χ^2, мы заключаем, что $\frac{Q_1}{\sigma^2}$ и $\frac{Q_2}{\sigma^2}$ распределены, как χ^2 с $(k-1)$ и одной степенью свободы соответственно.

Однако использовать первое из слагаемых правой части (6.3.21) для оценки дисперсии мы можем, лишь сделав определенные предположения относительно разностей a_i-a.

Предположим теперь, что верна гипотеза равенства средних в рассматриваемых совокупностях, тогда

$$a_1=a_2=\ldots=a_k=a$$

и

$$a_i - a = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Полагая

$$s_a^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2}{k-1}, \tag{6.3.22}$$

мы при *сделанном предположении* будем иметь оценку σ^2 такую, что $\frac{s_a^2 (k-1)}{\sigma^2}$ распределено по закону χ^2. Эта оценка основана на колебаниях средних в выборках около общего среднего; можно показать, что она не зависит от оценки s_r^2, определенной из (6.3.18), основанной на колебаниях индивидуальных значений внутри каждой серии около отвечающих им средних. Значит, при нашем предположении отношение

$$F = \frac{s_a^2}{s_r^2} \tag{6.3.23}$$

имеет F-распределение с $k-1$ и $N-k$ степенями свободы.

Если гипотеза неверна, то величина s_a^2, как правило, будет больше σ^2, и отношение $\frac{s_a^2}{s_r^2}$ будет стремиться значительно превзойти единицу.

В самом деле, легко показать простым вычислением, что во всех случаях

$$\mathbf{M} s_a^2 = \sigma^2 + \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k} n_i (a_i - a)^2.$$

Таким образом, чем далее система $a_1, a_2, \ldots, a_k$ уклоняется от однородного случая $a_1 = a_2 = \ldots = a_k$, тем значительнее s_a^2 будет превосходить σ^2 и, значит, s_r^2.

Характеристики s_r^2 и s_a^2 и отвечающие им суммы квадратов связаны соотношением, получающимся возведением в квадрат и суммированием двух частей тождества $(x_{iv} - \bar{x}) = x_{iv} - \bar{x}_i + (\bar{x}_i - \bar{x})$,

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{v=1}^{n_i} (x_{iv} - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{v=1}^{n_i} (x_{iv} - \bar{x}_i)^2 + \sum_{i=1}^{k} n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2.$$

Рассмотренная нами простейшая схема дисперсионного анализа может быть представлена табл. 6.3.1.

Таблица 6.3.1

Вариация	Соответствующая сумма квадратов	Число степеней свободы	Оценка дисперсии
Между выборками	$\sum_{i=1}^{k} n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2$	$k-1$	s_a^2
Внутри выборок	$\sum_{i=1}^{k} \sum_{v=1}^{n_i} (x_{iv} - \bar{x}_i)^2$	$\sum_{i=1}^{k} n_i - k = N - k$	s_r^2
Общая	$\sum_{i=1}^{k} \sum_{v=1}^{n_i} (x_{iv} - \bar{x})^2$	$N-1$	

Вычислительная схема может быть записана в следующую таблицу (табл. 6.3.2).

Таблица 6.3.2

№ выборок	Наблюдения	Число наблюдений	Суммы	Суммы квадратов	Квадраты сумм, отнесенные к числу наблюдений в группе	Суммы квадратов уклонений	Число степеней свободы
1	$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n_1}$	n_1	$\sum_{\nu=1}^{n_1} x_{1\nu}$	$\sum_{\nu=1}^{n_1} x_{1\nu}^2$	$\frac{\left(\sum_{\nu=1}^{n_1} x_{1\nu}\right)^2}{n_1}$	$\sum_{\nu=1}^{n_1} (x_{1\nu} - \bar{x}_1)^2$	$n_1 - 1$
2	$x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n_2}$	n_2	$\sum_{\nu=1}^{n_2} x_{2\nu}$	$\sum_{\nu=1}^{n_2} x_{2\nu}^2$	$\frac{\left(\sum_{\nu=1}^{n_2} x_{2\nu}\right)^2}{n_2}$	$\sum_{\nu=1}^{n_2} (x_{2\nu} - \bar{x}_2)^2$	$n_2 - 1$
. . .	. . . . .	. . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . .
k	$x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn_k}$	n_k	$\sum_{\nu=1}^{n_k} x_{k\nu}$	$\sum_{\nu=1}^{n_k} x_{k\nu}^2$	$\frac{\left(\sum_{\nu=1}^{n_k} x_{k\nu}\right)^2}{n_k}$	$\sum_{\nu=1}^{n_k} (x_{k\nu} - \bar{x}_k)^2$	$n_k - 1$
	Общий итог . .	N	$\sum_{i=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{n_i} x_{i\nu}$	$\sum_{i=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{n_i} x_{i\nu}^2$	$\sum_{i=1}^{k} \frac{\left(\sum_{\nu=1}^{n_i} x_{i\nu}\right)^2}{n_i}$	$\sum_{i=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{n_i} (x_{i\nu} - \bar{x}_i)^2$	$N - k$

Вычисление сумм, характеризующих вариации между выборками и внутри их, происходит по формулам, в которых использованы итоговые данные таблицы:

$$s_r^2 (N-k) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{n_i} (x_{i\nu} - \bar{x}_i)^2, \tag{6.3.24}$$

$$s_a^2 (k-1) = \sum_{i=1}^{k} n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(\sum_{\nu=1}^{n_i} x_{i\nu}\right)^2}{n_i} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{n_i} x_{i\nu}\right)^2}{N}. \tag{6.3.25}$$

Для проверки можно использовать упомянутое уже в тексте соотношение

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{n_i} (x_{i\nu} - \bar{x})^2 = s_r^2 (N-k) + s_a^2 (k-1). \tag{6.3.26}$$

Если нулевая гипотеза подтвердилась, мы можем оценивать дисперсию σ^2 с помощью несмещенной оценки $\bar{s}_0^2$ по совокупности всех наблюдений

$$\bar{s}_0^2 = \frac{Q}{N-1} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{n_i} (x_{i\nu} - \bar{x})^2}{N-1}. \tag{6.3.27}$$

Для оценки a при этом мы используем $\bar{x}$ и можем построить доверительный интервал, пользуясь распределением Стьюдента для

$$t = \frac{\bar{x} - a}{\frac{s_0}{\sqrt{N}}} \tag{6.3.28}$$

с $(N-1)$ степенями свободы.

Если же зависимость от факторов обнаружена (нулевая гипотеза не подтвердилась), то мы можем оценить «существенные» компоненты a_i с помощью $\bar{x}_i$, воспользовавшись опять-таки отношением Стьюдента

$$t_i = \frac{\bar{x}_i - a_i}{\frac{s_r}{\sqrt{n_i}}} \tag{6.3.29}$$

с $(N-k)$ степенями свободы при любом i.

Таким образом, для каждого a_i мы можем построить доверительный интервал. В некоторых случаях представляет интерес оценить разность $a_i - a_j$ между центрами двух групп; для этой цели мы можем использовать критерий Стьюдента

$$t = \frac{(\bar{x}_i - \bar{x}_j) - (a_i - a_j)}{s_r \sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}}} \tag{6.3.30}$$

с $(N-k)$ степенями свободы.

Рассмотрим теперь пример.

Пример 6.3.2. Пусть у нас имеются данные об отклонениях показаний в микронах по общепринятому критерию H_{ck} чистоты поверхности четырех различных моделей профилометров от показаний образцового профилометра при проверке поверхности 7-го класса чистоты. В табл. 6.3.3 приводятся данные, полученные в результате четырех повторных проверок одной и той же поверхности с помощью каждого из четырех приборов.

Таблица 6.3.3

№ повторных измерений	Номера и модели приборов			
	1 КВ	2 ПИ5	3 ПИ5/6	4 ПИ6
1	−0,21	+0,16	+0,10	+0,12
2	−0,06	+0,08	−0,07	−0,04
3	−0,17	+0,03	+0,15	−0,02
4	−0,14	+0,11	−0,02	+0,11

Дисперсии во всех четырех сериях предполагаются однородными. Эта гипотеза подлежит, вообще говоря, предварительной проверке приемом, рассмотренным в **6.4.3.** Требуется проверить гипотезу об однородности ряда средних $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$, иными словами, требуется проверить предположение об отсутствии существенных систематических ошибок у приборов. Поставленную задачу мы решаем по изложенной выше методике, причем для удобства и наглядности вычислений располагаем наши данные в табл. 6.3.4 и 6.3.5.

Таблица 6.3.4

№ приборов по порядку	Наблюденные значения в сотых долях микрона					
	x_{i1}	x_{i2}	x_{i3}	x_{i4}	$\sum_{\nu=1}^{n_i} x_{i\nu}$	$\sum_{\nu=1}^{n_i} x_{i\nu}^2$
1	−21	−6	−17	−14	−55	962
2	16	8	3	11	38	450
3	10	−7	15	−5	13	399
4	12	−4	−2	11	17	285
$\sum_{i=1}^{k}$	17	−9	−1	3	10	2096

Таблица 6.3.5

№ приборов по порядку	n_i	$\sum_{\nu=1}^{n_i} x_{i\nu}$	$\sum_{\nu=1}^{n_i} x_{i\nu}^2$	$\left(\sum_{\nu=1}^{n_i} x_{i\nu}\right)^2$	$\frac{\left(\sum_{\nu=1}^{n_i} x_{i\nu}\right)^2}{n_i}$	$\sum_{\nu=1}^{n_i} (x_{i\nu}-\bar{x}_i)^2$	f_i	$\bar{x}_i$
1	4	—58	962	3364	841	121	3	—14,5
2	4	38	450	1444	361	89	3	9,5
3	4	13	399	169	42,25	356,75	3	3,25
4	4	17	285	289	72,25	212,75	3	4,25
$\sum_{i=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{n_i}$	16	10	2096	5266	1316,5	779,5	12	2,5

Вычисляем по формулам (6.3.24) и (6.3.25) суммы, характеризующие вариации, используя итоговые числа табл. 6.3.5:

$$s_r^2(N-k)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{n_i}(x_{i\nu}-\bar{x}_i)^2=779{,}5,$$

$$s_a^2(k-1)=\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{x}_i-\bar{x})^2=\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{\left(\sum_{\nu=1}^{n_i} x_{i\nu}\right)^2}{n_i}\right]-\frac{\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{n_i} x_{i\nu}\right)^2}{N}=$$

$$=1316{,}5-\frac{10^2}{16}=1310{,}25.$$

С целью проверки вычислений определяем еще, следуя (6.3.26), сумму

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{n_i}(x_{i\nu}-\bar{x})^2=2096-\frac{10^2}{16}=2089{,}75$$

и убеждаемся, что $2089{,}75=779{,}5+1310{,}25$, откуда следует, что вычисления сделаны верно.

Определяем теперь критерий F согласно (6.3.23):

$$F=\frac{s_a^2}{s_r^2}=\frac{1310{,}25\cdot 12}{3\cdot 779{,}5}=6{,}7.$$

При числах степеней свободы $k-1=3$ и $N-k=16-4=12$ соответственно для s_a^2 и s_r^2 по табл. XX приложений находим $F_{0,05}=3{,}49$ и $F_{0,01}=5{,}95$, мы же получили из наблюдений $F=6{,}7$.

Таким образом, $F>F_q$, и с высокой степенью надежности гипотезу об однородности ряда средних, т. е. предположение об отсутствии систематических погрешностей у приборов, следует отвергнуть на основании проведенных наблюдений.

Построим теперь доверительные интервалы для систематических погрешностей a_i приборов. Задаваясь уровнем значимости $\frac{q}{100}=0{,}05$, мы по табл. XVIII приложений находим для $N-k=16-4=12$ степеней свободы пятипроцентный предел $t_{5,12}=2{,}179$, откуда, пользуясь (6.3.24) и (6.3.29), находим:

$$s_r^2=\frac{779{,}5}{12}=64{,}96,\quad s_r=\sqrt{64{,}96}=8{,}06$$

и

$$-14{,}5-2{,}179\cdot\frac{8{,}06}{\sqrt{4}}<a_1<-14{,}5+2{,}179\cdot\frac{8{,}06}{\sqrt{4}},$$

$$-23{,}3<a_1<-5{,}7$$

и аналогично

$$0{,}7<a_2<18{,}3,$$

$$-5{,}55<a_3<12{,}05,$$

$$-4{,}55<a_4<13{,}05.$$

Мы видим, что прибор КВ имеет отрицательную систематическую погрешность, которая оценивается 95%-ными доверительными границами от —0,23 до —0,06; наименьшую систематическую ошибку имеет прибор ПИ5/6; она лежит в пределах от —0,06 до 0,12 *мк*.

Если принять прибор ПИ5/6 за образцовый, то систематическая составляющая отклонений прибора ПИ6 от его показаний может быть оценена на основе (6.3.30) следующим 95%-ным доверительным интервалом:

$$1-2{,}179\cdot 8{,}06\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}<a_4-a_3<1+2{,}179\cdot 8{,}06\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}$$

или

$$-0{,}11\ мк<a_4-a_3<0{,}13\ мк.$$

Таким образом, вполне возможно, что между систематическими составляющими этих приборов в действительности отсутствует какое-либо различие.

§ 4. Статистическая проверка соответствия между гипотетическим распределением и данными выборки

6.4.1. Критерий χ^2. Мы рассмотрим теперь, как проверяется гипотеза об определенном виде закона распределения случайной величины или, как часто говорят, о распределении генеральной совокупности, если мы имеем в своем распоряжении выборку достаточно большого объема из этой генеральной совокупности. Начнем с простейшего случая, когда случайная величина может принимать только два значения, и данные наблюдения группируются естественным образом в две дополняющие друг друга группы S_1 и S_2. Допустим, что проверяемая гипотеза полностью определяет вероятности p_1 и p_2 каждого из двух значений, т. е. вероятности отнесения наблюдений соответственно в группы S_1 и S_2, причем, конечно,

$$p_1+p_2=1;\quad p_1>0\quad\text{и}\quad p_2>0. \tag{6.4.1}$$

Если мы обозначим через ν_1 и ν_2 числа наблюдений, попавших в S_1 и S_2 из общего их числа

$$\nu_1+\nu_2=n \tag{6.4.2}$$

в выборке, то, очевидно, задача проверки соответствия состоит в оценке близости между гипотетически допускаемыми вероятностями p_1 и p_2 и наблюденными на опыте частостями $\frac{\nu_1}{n}$ и $\frac{\nu_2}{n}$ классов S_1 и S_2.

В качестве меры уклонения мы возьмем взвешенную сумму квадратов уклонений ν_1 и ν_2 от их математических ожиданий np_1 и np_2:

$$\chi^2=\frac{(\nu_1-np_1)^2}{np_1}+\frac{(\nu_2-np_2)^2}{np_2}. \tag{6.4.3}$$

В качестве «весов» мы выбираем величины, обратные математическим ожиданиям; о причинах такого выбора мы скажем несколько позднее. Проанализи-

руем сначала алгебраическую структуру выражения χ^2. Уклонения $x_1 = \nu_1 - np_1$ и $x_2 = \nu_2 - np_2$ не представляют независимых величин. В самом деле, принимая во внимание (6.4.1) и (6.4.2), мы будем иметь:

$$x_1 + x_2 = (\nu_1 + \nu_2) - n(p_1 + p_2) = n - n = 0, \tag{6.4.4}$$

откуда

$$x_1 = -x_2. \tag{6.4.5}$$

Точно так же взвешенные уклонения

$$z_1 = \frac{x_1}{\sqrt{np_1}} = \frac{\nu_1 - np_1}{\sqrt{np_1}} \quad \text{и} \quad z_2 = \frac{x_2}{\sqrt{np_2}} = \frac{\nu_2 - np_2}{\sqrt{np_2}}$$

благодаря (6.4.4) будут связаны линейным соотношением

$$z_1\sqrt{np_1} + z_2\sqrt{np_2} = 0. \tag{6.4.6}$$

Преобразуя выражение (6.4.3), мы получим ввиду (6.4.5):

$$\chi^2 = z_1^2 + z_2^2 = \frac{x_1^2}{np_1} + \frac{x_2^2}{np_2} = \frac{x_1^2}{n}\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}\right) = \frac{x_1^2}{np_1p_2} =$$

$$= \frac{(\nu_1 - np_1)^2}{np_1(1-p_1)} = \left(\frac{\nu_1 - np_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right)^2. \tag{6.4.7}$$

Но нормированное уклонение $\frac{\nu_1 - np_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}$ по теореме (4.3.67) Лапласа распределено при достаточно большом числе наблюдений n приблизительно нормально. Следовательно, χ^2 при тех же условиях приближенно следует закону χ^2 с одной степенью свободы. Это дает возможность при данном уровне значимости построить критическую область для проверки гипотезы соответствия. Считая, например, значения χ^2, превышающие 1%-ный предел $\chi^2_{0,01}$, практически невозможными, если наша гипотеза верна, мы должны будем ее отвергнуть, когда вычисленное по данным выборки значение χ^2 превысит $\chi^2_{0,01}$. Результат, к которому мы пришли, рассматривая простейший случай двух групп, оказывается возможно обобщить на любое их число. Пусть мы имеем l групп $S_1, S_2, \ldots, S_l$ возможных значений рассматриваемого признака; допускаемая нами гипотеза позволяет определить значения вероятностей $p_1, p_2, \ldots, p_l$, $\sum_{i=1}^{l} p_i = 1$ для попадания в каждую из групп. Пусть численность наблюдений в группах будет соответственно $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_l$, $\sum_{i=1}^{l} \nu_i = n$. Для оценки полученного на опыте соответствия мы можем использовать величину

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{l} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^{l} \frac{x_i^2}{np_i}, \tag{6.4.8}$$

т. е. взвешенную сумму квадратов уклонений $x_i = \nu_i - np_i$.

Как и в рассмотренном выше случае, уклонения x_i связаны одним линейным соотношением

$$\sum_{i=1}^{l} x_i = 0.$$

Закон распределения, которому следуют числа ν_i, в данном случае будет выражаться полиномиальной формулой, обобщающей биномиальный закон

(см. **2.4.1, 2.4.2** и **4.2.1**):

$$\mathbf{P}(\nu_1 = m_1,\ \nu_2 = m_2,\ \ldots,\ \nu_l = m_l) = \frac{n!}{m_1!\, m_2! \ldots m_l!}\, p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_l^{m_l}, \qquad (6.4.9)$$

где $\sum_{i=1}^{l} m_i = n$.

На этот случай обобщается также и теорема (4.3.67) Лапласа, показывающая, что для нормированных уклонений

$$z_1 = \frac{x_1}{\sqrt{np_1}},\quad z_2 = \frac{x_2}{\sqrt{np_2}},\quad \ldots,\quad z_l = \frac{x_l}{\sqrt{np_l}},$$

связанных (как и величины x_i) одним линейным соотношением, применим обобщенный $(l-1)$-мерный нормальный закон.

Величина

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{l} z_i^2$$

оказывается поэтому распределенной при нашей гипотезе (приближенно) согласно закону χ^2 с $l-1$ степенями свободы [1]).

Это обстоятельство и дает возможность построить критическую область типа $\chi^2 > \chi_q^2$, вероятность попадания в которую при данной гипотезе отвечает заданному уровню значимости q. При надлежащем подборе q такое событие может считаться практически невозможным.

Рассмотрим теперь вопрос о чувствительности критерия χ^2 к альтернативным гипотезам, противоречащим нашей гипотезе, другими словами, вопрос о вероятности принять неверную гипотезу, совершив ошибку второго рода (см. **6.1.2**). Допустим, что фактические значения вероятностей попадания в группы (обозначим их через p_i') на самом деле отличны от гипотетически допустимых p_i, так что $p_i' \neq p_i$ хотя бы при одном i. Если мы рассмотрим величину

$$\chi'^2 = \sum_{i=1}^{l} \frac{(\nu_i - np_i')^2}{np_i'}, \qquad (6.4.10)$$

то она будет следовать, как мы установили, закону χ^2 с $l-1$ единицами степеней свободы. Математическое ожидание этой величины, принимая во внимание (4.2.10), будет равно

$$\mathbf{M}\chi'^2 = \mathbf{M}\left[\sum_{i=1}^{l} \frac{(\nu_i - np_i')^2}{np_i'}\right] = \sum_{i=1}^{l} \frac{\mathbf{M}(\nu_i - np_i')^2}{np_i'} = \sum_{i=1}^{l} \frac{n^2\mathbf{M}\left(\frac{\nu_i}{n} - p_i'\right)^2}{np_i'} =$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \frac{n^2 p_i'(1-p_i')}{n^2 p_i'} = \sum_{i=1}^{l}(1-p_i') = l - \sum_{i=1}^{l} p_i' = l - 1. \qquad (6.4.11)$$

Величина же

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{l} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i}, \qquad (6.4.12)$$

которая отвечает гипотетически допущенным нами значениям вероятностей, уже не будет следовать закону χ^2. Ее математическое ожидание с помощью тех же

---

[1]) Точное доказательство см.: Г. Крамер, Математические методы статистики, стр. 460.

соотношений, что и выше, может быть выражено следующим образом:

$$\mathbf{M}\chi^2 = \sum_{i=1}^{l} \frac{\mathbf{M}(\nu_i - np_i' + np_i' - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^{l} \frac{\mathbf{M}(\nu_i - np_i')^2 + n^2(p_i' - p)^2}{np_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \frac{np_i'(1-p_i') + n^2(p_i' - p_i)^2}{np_i} > n\sum_{i=1}^{l} \frac{(p_i' - p_i)^2}{p_i}. \qquad (6.4.13)$$

Сумма $\sum_{i=1}^{l} \frac{(p_i' - p_i)^2}{p_i}$ не обращается в нуль при увеличении числа наблюдений n и, следовательно, $\mathbf{M}\chi^2$ неограниченно возрастает вместе с n. Поэтому, если проверяемая гипотеза оказывается неверной, то, как правило, выборочное значение χ^2 при достаточно большом n оказывается настолько большим, что попадает в критическую область, и испытание заканчивается браковкой гипотезы соответствия.

Таким образом, критерий χ^2 оказывается состоятельным по крайней мере при большом числе наблюдений в том смысле, что он почти наверно опровергает неверную гипотезу при достаточно большом числе испытаний. Более тонкое исследование показывает также, что критерий χ^2 обеспечивает минимальную возможную вероятность ошибки второго рода по сравнению с другими критериями, работающими на том же уровне значимости по отношению к гипотезам, тем более близким к проверяемой, чем больше объем наблюдений (при такого рода допущениях вероятности p_i' отличаются от вероятностей p_i на величину порядка $\frac{1}{\sqrt{n}}$). Таким образом, кажущийся несколько искусственным выбор весов $\frac{1}{np_i}$ при взвешивании квадратов отклонений может быть теоретически оправдан.

Покажем схему применения этого критерия на примере.

Пример 6.4.1. При отсчетах по шкалам измерительных приборов последние цифры показаний обычно оцениваются лишь приблизительно в долях деления шкалы. При этом часто констатируется предпочтение, которое даже опытные наблюдатели оказывают одним цифрам перед другими. В табл. 6.4.1 приводится распределение 200 случаев оценки последней цифры одним из наблюдателей при отсчете по измерительному прибору в долях деления шкалы.

Таблица 6.4.1

Цифры	Наблюденные численности ν_i	Математические ожидания численностей np_i	Уклонения $\nu_i - np_i$	$\frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i}$
1	2	3	4	5
0	35	20	15	11,25
1	16	20	—4	0,80
2	15	20	—5	1,25
3	17	20	—3	0,45
4	17	20	—3	0,45
5	19	20	—1	0,05
6	11	20	—9	4,05
7	16	20	—4	0,80
8	30	20	10	5,00
9	24	20	4	0,80
Σ	200	200	0	24,90

Табл. 6.4.1 обнаруживает, что цифры 0 и 8 встречаются значительно чаще, чем другие. Вопрос заключается в том, имеем ли мы здесь дело с систематической ошибкой в отсчете или нет. Этот вопрос, естественно, решается сравнением наблюденного распределения с гипотетически допускаемым равномерным, при котором вероятность получения любой из цифр 0, 1, 2, ..., 9 равна $\frac{1}{10}$.

В графе 4 таблицы указаны значения уклонений наблюденных численностей от их математических ожиданий и в графе 5 сделаны подсчеты χ^2.

Значение $\chi^2 = 24{,}90$ при 9 степенях свободы превосходит $0{,}5\%$-ное уклонение, как это видно из табл. VIII приложений, и потому гипотеза равномерности должна быть отброшена.

Практическое применение χ^2-критерия, а главное — истолкование полученного результата должно производиться с некоторой осторожностью. Прежде всего следует помнить, что мы используем χ^2-распределение как точный закон, тогда как оно применимо лишь приближенно и только в тех случаях, когда численность групп достаточно велика, во всяком случае не менее *пяти* в каждой группе. Если некоторые группы не удовлетворяют данному требованию, то лучше объединить несколько малочисленных групп в одну. При небольшом числе наблюдений, как правило, можно провести лишь грубую проверку с разбивкой материала на небольшое число групп. Возможность разбить материал разными способами на группы приводит к некоторой условности вероятностной оценки, так как эта последняя зависит от числа групп и величины полученного при данном разбиении критерия χ^2. С этим обстоятельством особенно часто встречаются, когда рассматривают распределение непрерывно варьирующего признака и выбор длины и положения классовых интервалов производят более или менее произвольно.

Если проверяемая гипотеза заключается в том, что закон распределения рассматриваемой непрерывной величины выражается определенной интегральной функцией $F(x)$ (не содержащей каких-либо неизвестных параметров), то лучший способ проверки может быть основан на упомянутой выше теореме (5.4.78) А. Н. Колмогорова о распределении максимума уклонения эмпирической функции $\overline{F}_n(x)$ от теоретической $F(x)$.

Величина $D_n = \max |\overline{F}_n(x) - F(x)|$ в этом случае может быть определена путем сличения графиков функций $\overline{F}_n(x)$ и $F(x)$. Если $\sqrt{n}D_n$ превосходит $q\%$-ный уровень значимости, определяемый с помощью распределения $K(\lambda)$, т. е.

$$\sqrt{n}D_n > \lambda_q, \tag{6.4.14}$$

где $1 - K(\lambda_q) = \frac{q}{100}$, то гипотезу следует считать несовместимой с данными опыта; в противном случае ее можно признать не противоречащей наблюдениям.

Следует, однако, отметить, что случаи, когда вид функции $F(x)$ полностью фиксируется проверяемой гипотезой, составляют скорее исключения. На практике гипотетическое распределение обычно содержит некоторое число параметров, которые оцениваются с помощью того же выборочного распределения, с которым мы должны сравнить теоретическое. Как показывают исследования [1]), метод проверки с помощью χ^2-критерия может быть обобщен и на этот случай, если применять надлежащую оценку параметров. В этом случае для вероятностей p_i точное значение не может быть найдено; однако, заменяя в функции $F(x; \theta_1, \theta_2, \ldots)$ неизвестные параметры их оценками $\tilde{\theta}_1$, $\tilde{\theta}_2$, ... по данным выборки, мы можем в качестве ее приближения рассматривать функцию $F(x; \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \ldots)$. Отсюда имеется возможность получить и приближенные оценки для вероятностей p_i — некоторые функции $\tilde{p}_i$, зависящие от данных наблюдения.

[1]) Г. Крамер, Математические методы статистики, гл. 30.

Предположим, например, что мы проверяем гипотезу нормальности для некоторого наблюденного распределения. Заменяя неизвестные параметры центра рассеивания a и дисперсии σ^2 их эмпирическими оценками $\bar{x}$ и s^2 соответственно, мы будем в качестве приближения к теоретической плотности рассматривать функцию

$$n(x;\ a,\ \sigma) \approx g(x;\ \bar{x},\ s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, s} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2s^2}}. \tag{6.4.15}$$

В этом случае в качестве оценки вероятности попадания в какой-нибудь интервал Δ естественно считать:

$$\tilde{p}_\Delta = \int_\Delta g(x;\ \bar{x},\ s)\, dx. \tag{6.4.16}$$

Эти оценки $\tilde{p}_\Delta$ зависят от выборочных характеристик $\bar{x}$ и s.

В качестве критерия соответствия в данном случае рассматривают величину

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{l} \frac{(\nu_i - n\tilde{p}_i)^2}{n\tilde{p}_i}, \tag{6.4.17}$$

где $\tilde{p}_i$ — оценки вероятностей для каждой i-й группы $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ l$, на которые мы подразделили наше распределение.

Уклонения в данном случае связаны между собой более чем одним линейным соотношением

$$\sum_{i=1}^{l} (\nu_i - n\tilde{p}_i) = 0.$$

Если число оцениваемых параметров равно c, то на уклонения $\nu_i - n\tilde{p}_i$ накладывается тем самым еще c связей; поэтому число независимых между собой уклонений в этом случае будет $l - c - 1$. Можно показать, что при достаточно больших численностях групп и в этом случае критерий (6.4.17) будет приближенно следовать закону χ^2 с $l - c - 1$ степенями свободы.

Методика его применения остается прежней: мы сравниваем полученное значение χ^2 с $q\%$-ным верхним пределом, отвечающим $l - c - 1$ степеням свободы, и в том случае, когда χ^2 окажется превосходящим этот предел, мы бракуем гипотезу.

Заметим еще, что в некоторых случаях критерий χ^2 получается настолько малым, что значения, бо́льшие полученного, можно ожидать теоретически с вероятностью, весьма близкой к единице. Такое положение дела может являться следствием того, что большое число оцениваемых по данному материалу параметров искусственно форсирует слишком хорошее согласование опытных данных с теорией. Поэтому следует внимательно и осторожно анализировать причины полученного согласования, используя и другие критерии и оценки.

Рассмотрим теперь еще один пример.

Пример 6.4.2. Пусть требуется оценить с помощью критерия χ^2 соответствие выборочного распределения, приведенного в примере 5.2.2, нормальному закону.

Пользуясь уже полученными в примерах 5.2.2 и 5.2.6 результатами, строим табл. 6.4.2.

Таблица 6.4.2

№ интервалов	Границы интервалов	Частота в интервале ν_i	Координаты границ интервалов в долях s относительно $\bar{x}$	$\Phi(z_i)$	Оценка вероятности попадания в интервал $\tilde{p}_i$	Оценка математических ожиданий $n\tilde{p}_i$	Взвешенные квадраты уклонений $\frac{(\nu_i - n\tilde{p}_i)^2}{n\tilde{p}_i}$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	$-\infty \div -15$	7	$-\infty \div -1{,}99$	$-0{,}5$	0,0233	4,66	1,18
2	$-15 \div -10$	11	$-1{,}99 \div -1{,}47$	$-0{,}4761$	0,0475	9,50	0,24
3	$-10 \div -5$	15	$-1{,}47 \div -0{,}96$	$-0{,}4292$	0,0977	19,54	1,05
4	$-5 \div 0$	24	$-0{,}96 \div -0{,}44$	$-0{,}3315$	0,1615	32,30	2,13
5	$0 \div 5$	49	$-0{,}44 \div 0{,}07$	$-0{,}1700$	0,1979	39,58	2,24
6	$5 \div 10$	41	$0{,}07 \div 0{,}59$	0,0279	0,1945	38,90	0,11
7	$10 \div 15$	26	$0{,}59 \div 1{,}10$	0,2224	0,1419	28,38	0,20
8	$15 \div 20$	17	$1{,}10 \div 1{,}62$	0,3643	0,0831	16,62	0,01
9	$20 \div 25$	7 } 10	$1{,}62 \div 2{,}13$	0,4474	0,0526	10,52	0,03
10	$25 \div \infty$	3	$2{,}13 \div \infty$	0,4834			
Сумма		200		0,5	1,0000	200,00	7,19

В графы 1, 2 и 3 мы заносим данные о номерах интервалов (разрядов), границах интервалов и частотах в интервалах, полученные в примере 5.2.2.

Далее, используя вычисленные в примере 5.2.6 значения $\bar{x} = 4{,}30$ *мк* и $s^2 = 94{,}26$ *мк*^{2}, мы определяли координаты границ интервалов относительно $\bar{x}$, выраженные в долях s. Так, например, учитывая, что $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{94{,}26} = 9{,}71$ *мк*, находим для начала z_2 второго интервала ($z_1 = -\infty$ начало первого, z_2 — конец первого и одновременно начало второго и т. д.):

$$z_2 = \frac{-15 - 4{,}30}{9{,}71} = \frac{-19{,}3}{9{,}71} = -1{,}99$$

и для его конца z_3

$$z_3 = \frac{-10 - 4{,}30}{9{,}71} = \frac{-14{,}3}{9{,}71} = -1{,}47.$$

Вообще длина нормированных интервалов (кроме первого и последнего)

$$\Delta z = \frac{5}{9{,}71} = 0{,}515.$$

Полученные этим способом координаты границ интервалов вносим в графу 4. Затем с помощью табл. IV приложений находим оценки $\tilde{p}_i$ вероятностей попадания в интервалы. Так, например, для первого интервала мы находим:

$$\Phi(z_1) = \Phi(-\infty) = -0{,}5 \quad \text{и} \quad \Phi(z_2) = \Phi(-1{,}99) = -0{,}4767;$$

тогда $\tilde{p}_1 = -0{,}4767 - (-0{,}5) = 0{,}0233$.

Результаты вычислений заносим в графу 6; интервал 10 при этом ввиду его малочисленности (в него попало всего три наблюдения) мы объединяем с интервалом 9. Замечаем, что вспомогательная графа 5, в которой проставлены взятые из табл. IV приложений значения функции Лапласа, в началах соответствующих интервалов может облегчить получение данных графы 6 оценок вероятностей. Сумма чисел $\tilde{p}_i$ в 6-й графе всегда будет равна единице.

В графу 7 заносим оценки математических ожиданий частот по интервалам, получаемые путем умножения оценок вероятностей $\tilde{p}_i$ на общее число наблюдений n. Так, например, в первом интервале получаем $n\tilde{p}_1 = 200 \cdot 0{,}0233 = 4{,}66$.

Итог по графе 7, конечно, должен равняться итогу по графе 3. Наконец, в графе 8 проставляем взвешенные квадраты уклонений частот от оценок их математических ожиданий; итог по этой графе и дает критерий χ^2, определяемый формулой (6.4.17). Таким образом, мы получим:

$$\chi^2_{\text{н}} = 7{,}19.$$

Так как мы по данным выборки оценивали два параметра (a и σ) нормального закона, то в нашем случае число степеней свободы будет равно:

$$k = l' - c - 1 = 9 - 2 - 1 = 6,$$

где l' — число интервалов, получившееся после объединения интервалов 9 и 10; $c = 2$.

По табл. VIII приложений находим, что полученное по данным выборки значение $\chi^2 = 7{,}16$ меньше значения χ^2_q, соответствующего 30%-ному уровню значимости, другими словами, вероятность получить такие же или еще бо́льшие значения χ^2 при нашей гипотезе более 0,3. Отсюда заключаем, что результат нельзя считать значимым, и гипотеза о нормальности генеральной совокупности, из которой получена наша выборка, не противоречит наблюдениям. При вычислении χ^2 (или для контроля вычислений по указанной схеме) можно пользоваться также легко проверяемым соотношением

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{l} \frac{(\nu_i - n\tilde{p}_i)^2}{n\tilde{p}_i} = \sum_{i=1}^{l} \frac{\nu_i^2}{n\tilde{p}_i} - n.$$

6.4.2. Критерий независимости. Пусть мы имеем совокупность независимых наблюдений, распределенных по двум признакам A и B, каждый из которых может варьировать от одного наблюдения к другому. Эта вариация признаков может носить количественный или качественный характер. Допустим, что по признаку A возможные результаты наблюдения могут быть подразделены на m групп $A_1, A_2, \ldots, A_m$ и по признаку B на l групп $B_1, B_2, \ldots, B_l$, так что возможны любые комбинации A_iB_j ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, l$) признаков. Классифицируя все наблюдения по группам A_iB_j и обозначая численность этой группы через h_{ij}, мы будем иметь уже ранее встречавшуюся «двумерную» таблицу (табл. 6.4.3).

Таблица 6.4.3

A \ B	B_1	B_2	. . .	B_k	Всего
A_1	h_{11}	h_{12}	. . .	h_{1l}	h_{10}
A_2	h_{21}	h_{22}	. . .	h_{2l}	h_{20}
.	.	.	. . .	.	.
.	.	.	. . .	.	.
.	.	.	. . .	.	.
A_m	h_{m1}	h_{m2}	. . .	h_{ml}	h_{m0}
Всего . . .	h_{01}	h_{02}	. . .	h_{0l}	n

Если распределение вероятностей $\mathbf{P}(A_iB_j) = p_{ij}$ попадания в каждую из групп задано гипотетически, то эта гипотеза может быть проверена, как было указано в **6.4.1**, путем вычисления критерия, который в данном случае будет иметь следующий вид:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{l} \frac{(h_{ij} - np_{ij})^2}{np_{ij}}, \qquad (6.4.18)$$

при этом число степеней свободы следует считать равным $f = ml - 1$. Если вероятности зависят от c параметров, которые будут оцениваться по этому же материалу, то, как мы видели в **6.4.1**, число степеней свободы будет меньше f на число параметров. Если проверяемая гипотеза H заключается в независимости признаков A и B, то это предположение равносильно осуществлению равенств

$$\mathbf{P}(A_iB_j) = \mathbf{P}(A_i)\,\mathbf{P}(B_j) \tag{6.4.19}$$

или

$$p_{ij} = p_{i0}p_{0j},$$

где

$$\mathbf{P}(A_i) = p_{i0}, \quad \mathbf{P}(B_j) = p_{0j},$$

причем

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{m} p_{i0} = 1, \tag{6.4.20}$$

$$\sum_{j=1}^{l} \mathbf{P}(B_j) = \sum_{j=1}^{l} p_{0j} = 1. \tag{6.4.21}$$

Таким образом, из (6.4.19), (6.4.20) и (6.4.21) следует, что при гипотезе H распределение вероятностей полностью определяется заданием $m-1$ параметров p_{i0}, например p_{10}, p_{20}, ..., $p_{m-1,\,0}$, и $l-1$ параметров p_{0j}, например p_{01}, p_{02}, ..., $p_{0,\,l-1}$, т. е. заданием всего $c = m + l - 2$ параметров. В качестве оценки этих параметров естественно рассмотреть соответствующие частости:

$$\frac{h_{i0}}{n} \approx p_{i0}, \quad \frac{h_{0j}}{n} \approx p_{0j}.$$

В качестве оценки математического ожидания числа наблюдений в группе A_iB_j, равного $n\mathbf{P}(A_iB_j) = np_{ij}$ при данной гипотезе H, используем произведение

$$n\frac{h_{i0}}{n}\frac{h_{0j}}{n} = \frac{h_{i0}h_{0j}}{n}.$$

Внося это значение вместо произведения np_{ij} в выражение (6.4.18) для χ^2, получим:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{l} \frac{\left(h_{ij} - \dfrac{h_{i0}h_{0j}}{n}\right)^2}{\dfrac{h_{i0}h_{0j}}{n}}; \tag{6.4.22}$$

в свою очередь (6.4.22) можно привести к такому виду:

$$\chi^2 = n\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{l} \frac{h_{ij}^2}{h_{i0}h_{0j}} - 1\right). \tag{6.4.23}$$

Критерий (6.4.22)—(6.4.23) по тем же причинам, что и критерий (6.4.3), рассмотренный в **6.4.1**, будет распределен по закону χ^2 с числом степеней свободы

$$k = ml - 1 - c = ml - 1 - (m + l - 2) = ml - m - l + 1 = (m-1)(l-1).$$

Легко видеть и непосредственно, что ml уклонений

$$h_{ij} - \frac{h_{i0}h_{0j}}{n}$$

удовлетворяют $m + l - 1$ независимым линейным соотношениям, которые получаются в результате суммирования вдоль строк и столбцов приведенной в начале

этого раздела табл. 6.4.3. Например, суммируя по индексу j (вдоль строки i), получим:

$$\sum_{j=1}^{l} h_{ij} - \frac{h_{i0}}{n} \cdot \sum_{j=1}^{l} h_{0j} = h_{i0} - \frac{h_{i0}}{n} n = 0, \tag{6.4.24}$$

и аналогично

$$\sum_{i=1}^{m} h_{ij} - \frac{h_{0j}}{n} \sum_{i=1}^{m} h_{i0} = 0. \tag{6.4.25}$$

Так как сумма всех уклонений, получаемых двойным суммированием по i и j также равна нулю, то из $m+l$ соотношений (6.4.24) и (6.4.25) независимыми будут только $m+l-1$ соотношений. Всего, следовательно, из ml уклонений независимых будет $k = ml - (m+l-1) = (m-1)(l-1)$, что мы и видели.

При $m = l = 2$ мы можем представить критерий (6.4.22) в очень простом виде

$$\chi^2 = \frac{n(h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21})^2}{h_{10}h_{20}h_{01}h_{02}}, \tag{6.4.26}$$

причем число степеней свободы $k = 1$.

Рассмотрим числовой пример.

Пример 6.4.3. В табл. 6.4.4 приводятся данные о распределении 320 штамповок колец подшипников по высоте (A) и наружному диаметру (B) на нормальные (т. е. находящиеся в пределах допуска) и завышенные (т. е. превышающие наибольший предельный размер).

Таблица 6.4.4

Диаметр / Высота	Нормальные	Завышенные	Итого
Нормальные . .	239	60	299
Завышенные . .	14	7	21
Итого . . .	253	67	320

Требуется проверить, являются ли независимыми завышения штамповок против допускаемых размеров по высоте и наружному диаметру.

Если оба признака дефектности встречаются независимо друг от друга, то ожидаемое число штамповок, имеющих одновременно оба дефекта, должно быть

$$\frac{21 \cdot 67}{320} = 4{,}4 \text{ штуки.}$$

По имеющимся данным их больше, а именно 7 штук. Это как будто говорит против гипотезы о независимости.

Подсчитаем теперь критерий χ^2 по формуле (6.4.26):

$$\chi^2 = \frac{(239 \cdot 7 - 14 \cdot 60)^2 \cdot 320}{299 \cdot 21 \cdot 253 \cdot 67} = 2{,}1.$$

По табл. VIII приложений находим, что при числе степеней свободы $k = 1$ полученное на опыте значение $\chi^2 = 2{,}1$ меньше значения χ^2, отвечающего при $k = 1$ уровню значимости $q = 10\%$. Таким образом, имеющиеся в нашем распоряжении данные не противоречат гипотезе о независимости получения завышений размеров штамповок против установленных в чертеже предельных отклонений высоты и

наружного диаметра. Еще раз заметим, что получение положительного результата при проверке гипотезы не может еще рассматриваться как вполне достаточное ее подтверждение.

6.4.3. Проверка гипотезы об однородности ряда дисперсий. Метод χ^2 может быть применен также к решению задачи, которую можно рассматривать как естественное обобщение задачи о равенстве дисперсий по двум независимым выборкам из нормальной совокупности, рассмотренной в **6.3.2.**

Пусть мы имеем k серий независимых наблюдений, представляющих выборки из некоторых нормальных совокупностей с дисперсиями $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_k^2$. Пусть $\bar{s}_1^2, \bar{s}_2^2, \ldots, \bar{s}_k^2$ — несмещенные оценки дисперсии по данным выборок, причем

$$\bar{s}_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{m=1}^{n_i} (x_m^{(i)} - \bar{x}^{(i)})^2, \tag{6.4.27}$$

где $\bar{x}^{(i)}$ — средняя арифметическая из данных $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_{n_i}^{(i)}$ i-й выборки объема n_i.

Требуется проверить, что $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2 = \sigma^2$, где σ^2—общая дисперсия всех генеральных совокупностей. Если проверяемая гипотеза верна, то при каждом i частное $\dfrac{\bar{s}_i^2 (n_i - 1)}{\sigma^2}$ будет распределено по закону χ^2 с $(n_i - 1)$ степенями свободы (см. **5.4.2**). Величину

$$\bar{s}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} \bar{s}_i^2 (n_i - 1)}{N - k}, \tag{6.4.28}$$

где

$$N = \sum_{i=1}^{k} n_i,$$

следует считать при нашей гипотезе несмещенной оценкой σ^2. Следовательно, согласно теореме сложения для χ^2 распределений сумма независимых слагаемых

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} \bar{s}_i^2 (n_i - 1)}{\sigma^2} = \frac{\bar{s}^2 (N - k)}{\sigma^2}$$

будет иметь распределение χ^2 с $(N - k)$ степенями свободы.

Очевидно, что распределение отношения $\dfrac{\bar{s}_i^2}{\bar{s}^2}$ при нашей гипотезе зависит лишь от n_i и не зависит от каких-либо других параметров.

Рассмотрим критерий

$$Q = -\frac{1}{c} \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) \ln \frac{\bar{s}_i^2}{\bar{s}^2}, \tag{6.4.29}$$

где

$$c = 1 + \frac{1}{3(k-1)} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{N - k} \right). \tag{6.4.30}$$

Можно показать, что величина Q имеет распределение, близкое к χ^2 с $(k - 1)$ степенями свободы, если только n_i не слишком малы $(n_i > 3)$.

Для вычисления Q пользуются следующей расчетной формулой, в которой совершен переход от натуральных к десятичным логарифмам:

$$Q = \frac{2{,}3026}{c}\left[(N-k)\log \bar{s}^2 - \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)\log \bar{s}_i^2\right]. \qquad (6.4.31)$$

Задаваясь некоторым уровнем вероятности, например, полагая $P = 0{,}95$, определяют соответствующий верхний критический предел χ^2 по распределении χ^2 с $k-1$ единицами свободы. Если для полученного вычислением Q найдем $Q > \chi_q^2$, то проверяемая гипотеза бракуется, так как при нашей гипотезе отдельные значения $\bar{s}_i^2$ и $\bar{s}^2$ отличаются от общего математического ожидания, равного σ^2, только случайными флуктуациями. Если $Q \leqslant \chi_q^2$, то мы можем считать это подтверждением гипотезы, которая выдержала проверку (однако не следует, как и всегда при использовании статистических методов, считать гипотезу доказанной).

Заметим, что если произведение Qc, вычисляемое обычно раньше Q, окажется меньше χ_p, то в вычислении c нет надобности, так как при $c > 1$ значение Q оказывается незначимым, а гипотеза об однородности ряда дисперсий — не противоречащей наблюдениям.

Пример 6.4.4. Пусть требуется по условиям примера 5.3.6 проверить гипотезу однородности ряда дисперсий, состоящего из семи дисперсий, т. е., иными словами, проверить предположение об отсутствии разладок горизонтально-ковочной машины по рассеиванию размеров штамповок за семь смен работы. При этом, однако, мы будем считать, что данные примера 5.3.6 относятся не к эмпирическим дисперсиям s_j^2, а к несмещенным оценкам $\bar{s}_j^2$.

Для того чтобы произвести вычисления по формулам (6.4.28) и (6.4.31), мы сначала составляем табл. 6.4.5.

Таблица 6.4.5

№ смен	$\bar{s}_i^2$	n_i	$n_i - 1$	$\bar{s}_i^2(n_i-1)$	$\frac{1}{n_i-1}$	$\log \bar{s}_i^2$	$(n_i-1)\log \bar{s}_i^2$
1	0,067	25	24	1,61	0,0417	$\bar{2}$,8261	$\overline{29}$,826
2	0,136	20	19	2,58	0,0526	$\bar{1}$,1335	$\overline{17}$,536
3	0,168	15	14	2,35	0,0714	$\bar{1}$,2253	$\overline{11}$,154
4	0,068	20	19	1,29	0,0526	$\bar{2}$,8325	$\overline{23}$,818
5	0,066	20	19	1,25	0,0526	$\bar{2}$,8195	$\overline{23}$,570
6	0,102	25	24	2,45	0,0417	$\bar{1}$,0086	$\overline{24}$,206
7	0,137	25	24	3,29	0,0417	$\bar{1}$,1367	$\overline{21}$,281
		150	143	14,82	0,3543		$\overline{146}$,391

Далее по формуле (6.4.28) находим:

$$\bar{s}^2 = \frac{14{,}81}{150-7} = 0{,}104 \ мм^2.$$

По формуле (6.4.31) находим Q, для чего предварительно определяем:

$$c = 1 + \frac{1}{3(7-1)}\left(0{,}3543 - \frac{1}{150-7}\right) = 1{,}0193.$$

Продолжая вычисления, находим:

$$\log s^2 = \log 0{,}104 = \bar{1}{,}0170,$$

и потому

$$Q = \frac{2{,}3026}{1{,}0193}\,[(150-7)\,\bar{1}{,}0170 - \overline{145}{,}391] = 9{,}13.$$

Выбираем доверительную вероятность равной $P = 0{,}95$. Тогда верхний критический предел χ^2_q при числе степеней свободы, равном $7 - 1 = 6$, будет составлять согласно табл. VIII приложений

$$\chi^2_q = 12{,}6.$$

Так как мы получили

$$Q = 9{,}13 < \chi^2_q = 12{,}6,$$

то нашу гипотезу об однородности ряда дисперсий следует считать не противоречащей наблюдениям, т. е. данные наблюдений не дают оснований утверждать, что на протяжении семи смен работы машины имела место разладка по рассеиванию.

В том случае, когда числа наблюдений n_i одинаковы, $n_i = n$ и $\sum_{i=1}^{k} n_i = kn = N$ велика по сравнению с n, мы можем более детально исследовать распределение отношений

$$q_i = \frac{(n-1)\,\bar{s}_i^2}{\bar{s}^2}, \tag{6.4.32}$$

которые будут при нашем предположении приближенно следовать распределению χ^2 с $(n-1)$ степенями свободы.

Таким образом, в последнем случае задача сводится к задаче проверки согласованности наблюденного распределения величин q_i с их гипотетическим распределением. Мы видели в **6.4.1**, как такая задача решается опять-таки с помощью χ^2-распределения. Однако при такой проверке для получения определенных результатов требуется значительное число проб (100—200), которое редко встречается на практике.

Вместо этой проверки при тех же условиях (т. е. при одинаковых объемах ряда выборок, по которым проверяется однородность дисперсий соответствующего ряда совокупностей) можно использовать еще один упрощенный прием, основанный на рассмотрении последовательности величин G_i

$$G_i = \frac{\max\,[s_i^2]}{s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_k^2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k). \tag{6.4.33}$$

Для максимального из членов этой последовательности $G_{\max}$ найден закон распределения, с помощью которого построены табл. XXI приложений, в которых при числах k выборок от 2 до 120 и объемах выборок n от 2 до 145 даны значения показателя $G_{\max}$, отвечающие 5%- и 1%-ным уровням значимости.

Если найденное из наблюдений значение $G_{\max}$ окажется больше указанного в таблице для соответствующих k и $n-1$, то вероятность получить такое значение оказывается меньше того уровня значимости, для которого составлена данная таблица, и потому гипотеза об однородности ряда дисперсий с тем же уровнем значимости должна быть отброшена.

Пример 6.4.5. Пусть у нас имеются данные о рассеивании по высоте штамповок, полученных на горизонтально-ковочной машине, причем было произведено через каждый час работы машины по одной выборке объема 20 штук каждая и всего было 47 выборок, по данным каждой из которых была вычислена несмещенная оценка $\bar{s}_i^2$ дисперсии.

Результаты после некоторого округления получились в следующем виде (табл. 6.4.6):

Таблица 6.4.6

i	$\bar{s}_i^2$ в $мм^2$	i	$\bar{s}_i^2$ в $мм^2$	i	$\bar{s}_i^2$ в $мм^2$	i	$\bar{s}_i^2$ в $мм^2$
1	0,0576	13	0,1444	25	0,0676	37	0,1089
2	0,1444	14	0,1600	26	0,1369	38	0,1089
3	0,1600	15	0,1521	27	0,1681	39	0,0784
4	0,1024	16	0,2116	28	0,0676	40	0,1369
5	0,1369	17	0,1024	29	0,0676	41	0,0729
6	0,0961	18	0,0961	30	0,1024	42	0,1089
7	0,0961	19	0,1156	31	0,1369	43	0,0784
8	0,1156	20	0,1024	32	0,0576	44	0,1521
9	0,1764	21	0,1521	33	0,1024	45	0,2116
10	0,0900	22	0,1024	34	0,0841	46	0,0400
11	0,1225	23	0,2601	35	0,0729	47	0,1764
12	0,2025	24	0,1296	36	0,1225		
						Сумма	5,6893

Требуется проверить гипотезу об однородности ряда дисперсии или, иными словами, предположение об отсутствии разладки машины в смысле изменения рассеивания по высоте.

При решении этой задачи, хотя объемы всех выборок одинаковы ($n = 20$), мы все же не можем воспользоваться с достаточной уверенностью показателем q_i и критерием «согласия» χ^2 ввиду недостаточного числа выборок.

Однако для иллюстрации пользования данным приемом мы все же сначала используем его.

Пользуясь формулой (6.4.28), сначала находим:

$$\bar{s}^2 = \frac{19 \sum \bar{s}_i^2}{940 - 47} = \frac{19 \cdot 5{,}6893}{893} = 0{,}1210,$$

затем вычисляем q_i и находим для этого показателя эмпирическое среднее квадратическое отклонение s_q, используя для вычислений табл. 6.4.7:

Таблица 6.4.7

№ по пор.	$\bar{s}_i^2$	ν_i	q_i	q_i^2	$\nu_i q_i^2$
1	0,0400	1	6,28	39,4	39,4
2	0,0576	2	9,04	81,7	163,4
3	0,0676	3	10,62	112,8	338,4
4	0,0729	2	11,45	131,1	262,2
5	0,0784	2	12,31	151,5	302,6
6	0,0841	1	13,20	174,2	174,2
7	0,0900	1	14,12	199,4	199,4
8	0,0961	3	15,09	227,7	683,1
9	0,1024	6	16,07	258,2	1549,2
10	0,1089	3	17,09	292,1	876,3
11	0,1156	2	18,14	329,1	658,2
12	0,1225	2	19,22	369,4	738,8
13	0,1296	1	20,34	413,7	413,7
14	0,1369	4	21,48	461,4	1845,6
15	0,1444	2	22,66	513,5	1027,0
16	0,1521	3	23,87	569,8	1709,4
17	0,1600	2	25,11	630,5	1261,0
18	0,1681	1	26,38	695,9	695,9
19	0,1764	2	27,68	766,2	1532,4
20	0,2025	1	31,78	1010,0	1010,0
21	0,2116	2	33,21	1102,9	2205,8
22	0,2601	1	40,82	1666,3	1666,3
		47			19352,3

Из табл. 6.4.7 находим несмещенную оценку дисперсии[1]):

$$\bar{s}_q^2 = \frac{19\,352 - 47 \cdot 19^2}{47 - 1} = \frac{2385}{46} = 51{,}8,$$

$$\bar{s}_q = \sqrt{51{,}8} = 7{,}20.$$

При дальнейших вычислениях, следуя указаниям, содержащимся в **6.4.1**, мы прежде всего разбиваем значения показателя на интервалы с таким расчетом, чтобы частота в каждом интервале была не менее пяти, после чего производим необходимые для использования критерия χ^2 подсчеты (табл. 6.4.8):

Таблица 6.4.8

№ интервалов	Границы интервалов значений q_i	Частоты ν_i	Оценка вероятности попадания в интервал $\tilde{p}$	Оценка математических ожиданий $N\tilde{p}$	Взвешенные квадраты уклонений $\frac{(\nu - N\tilde{p})^2}{N\tilde{p}}$
1	2	3	4	5	6
1	6 ÷ 11	6	0,0741	3,5	1,79
2	11 ÷ 16	9	0,2665	12,5	0,98
3	16 ÷ 21	14	0,3205	15,1	0,08
4	21 ÷ 26	11	0,2066	9,7	0,17
5	26 ÷ 41	7	0,1291	6,1	0,13
Сумма		47	0,9968	46,9	3,15

В столбец 3 мы заносим частоты ν_i по интервалам, беря их из предыдущей таблицы. Так, например, в первый интервал войдут значения $q_1 = 6{,}28$; $q_2 = 9{,}04$ и $q_3 = 10{,}62$, а потому частота в нем будет $\nu_1 = 1 + 2 + 3 = 6$. Проставляемые в столбце 4 оценки $\tilde{p}$ вероятности попадания в интервал мы берем по табл. IX приложений, учитывая, что показатель q_i распределен по закону χ^2 с числом степеней свободы $n - 1 = 19$. Так, например, оценку $\tilde{p}_1$ для первого интервала мы получаем следующим образом.

При числе степеней $n - 1 = 19$ для $\chi_q^2 = 6$ имеем $\mathbf{P}(\chi^2 > 6) = 0{,}9979$, а для $\chi_q^2 = 11$ вероятность $\mathbf{P}(\chi^2 > 11) = 0{,}9238$; отсюда $\tilde{p}_1 = \mathbf{P}(6 < \chi^2 < 11) = 0{,}9979 - 0{,}9238 = 0{,}0741$. При определении $\tilde{p}_5$ затруднение заключается в том, что табл. IX приложений содержит вероятности для значений χ_q^2 до 30, а так как верхняя граница пятого интервала представляет $\chi_q^2 = 41$, то, учитывая близость «хвостов» χ^2-распределения и нормального распределения, мы используем табл. IV приложений.

Мы находим координату верхней границы пятого интервала по формуле

$$z_5 = \frac{q_5 - q_0}{\bar{s}_q} = \frac{41 - 19}{7{,}20} = 3{,}06.$$

По табл. IV приложений находим:

$$\Phi(3{,}06) = 0{,}49889 \approx 0{,}4989.$$

Поэтому

$$\mathbf{P}(\chi^2 > 41) = 0{,}5 - 0{,}4989 = 0{,}0011.$$

После этого, учитывая, что

$$\mathbf{P}(\chi^2 > 26) = 0{,}1302,$$

находим:

$$\tilde{p}_5 = \mathbf{P}(26 < \chi^2 < 41) = 0{,}1302 - 0{,}0011 = 0{,}1291.$$

Заполнение столбцов 5 и 6 понятно без пояснений.

---

[1]) $$\bar{s}_q^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k} \nu_i (q_r - q_0)^2,$$

где q_0 равно среднеарифметическому величин q_i. Но легко проверить на основании (6.4.18) и (6.4.32), что $q_0 = n - 1$. Поэтому мы получаем:

$$\bar{s}_q^2 = \frac{\sum \nu_i q_i^2 - (n-1)^2 k}{k - 1}.$$

Сумма по пяти строкам шестого столбца представляет наблюденное значение критерия «согласия» χ^2. Таким образом,

$$\chi^2_н = 3{,}15.$$

Число степеней свободы в этом случае равно:

$$k = 5 - c - 1 = 5 - 2 - 1 = 2,$$

где $c = 2$, так как по данным выборки оцениваются два параметра исходного нормального распределения.

Просматривая табл. VIII приложений, мы видим, что при двух степенях свободы полученное в наблюдениях значение $\chi^2_н = 3{,}15$ меньше даже значения χ^2_q, отвечающего уровню значимости в 20%. Отсюда заключаем, что результат нельзя считать значимым, и гипотеза об однородности 47 дисперсий не противоречит наблюдениям. Таким образом, нет еще достаточных оснований считать, что за 47 часов работы машины имели место разладки по рассеиванию высоты штамповок. Подчеркнем еще раз, что число выборок—47, использованных в данном примере для оценки однородности ряда дисперсий, является недостаточным, и поэтому результаты проверки несколько условны.

Используем теперь для решения поставленной задачи второй прием, не требующий большого числа выборок. Учитывая, что самой большой дисперсией из 47 дисперсий является 23-я по счету дисперсия $\overline{s}^2_{23} = 0{,}2601$, вычислим показатель G_{23} по формуле (6.4.33):

$$G_{23} = \frac{0{,}2601}{5{,}6893} = 0{,}046.$$

По табл. XXI приложений при 5%-ном уровне значимости, при $k = 47$ и числе степеней свободы $n - 1 = 20 - 1 = 19$ находим двойным линейным интерполированием:

а) при $k = 40$ для $n - 1 = 19$ находим:

$$0{,}0595 - \left(\frac{0{,}0595 - 0{,}0462}{20} \cdot 3\right) = 0{,}0575;$$

б) при $k = 60$ для $n - 1 = 19$ находим:

$$0{,}0411 - \left(\frac{0{,}0411 - 0{,}0316}{20} \cdot 3\right) = 0{,}0397;$$

в) при $n - 1 = 19$ для $k = 47$ находим:

$$0{,}0575 - \left(\frac{0{,}0575 - 0{,}0397}{20} \cdot 7\right) = 0{,}0513 \approx 0{,}051.$$

Так как мы получили

$$G_{23} = 0{,}046 < 0{,}051,$$

то проверка и этим приемом указывает на незначимость результата, т. е. на отсутствие существенного противоречия между гипотезой однородности дисперсий и данными опыта.

6.4.4. Проверка гипотезы принадлежности двух независимых выборок одной и той же генеральной совокупности. Пусть мы имеем две совокупности независимых наблюдений (или, что то же, две выборки) объемов n_1 и n_2 соответственно, проведенных над величинами X_1 и X_2. Законы распределения этих величин в генеральных совокупностях пусть будут $F_1(x)$ и $F_2(x)$. Мы будем считать эти последние функции непрерывными. Задача заключается в том, чтобы по данным наблюдения решить, можно ли считать правильной гипотезу тождественности законов распределения $F_1(x) \equiv F_2(x)$, т. е. тождественности генеральных совокупностей, к которым принадлежат рассматриваемые выборки. Подобного рода задача неизбежно возникает, когда хотят показать в картине распределения существенное изменение, обусловленное влиянием какого-либо известного нам фактора. Так, например, сравнивают погрешности геометрической формы изделий, получаемых с помощью двух различных методов обработки, или продолжительность службы двух групп электрических лампочек, производимых в различных производственных условиях. В других случаях, наоборот, мы хотим получить подтверждение тождественности двух распределений. Так, например, мы имеем две машины, вырабатывающие одинаковую продукцию, и хотим проверить предположение о том, что разбросы размеров изделий, получаемых на обеих машинах, одинаковы для того, чтобы можно было применять к этим машинам единые нормативы при точностных расчетах. В качестве приближений к теоретическим функциям распределения мы рассматриваем эмпирические функции $\overline{F}^{(1)}_{n_1}(x)$ и $F^{(2)}_{n_2}(x)$

при объемах выборок n_1 и n_2. За меру расхождения этих двух функций естественно принять величину наибольшей разности:

$$D_{n_1 n_2} = \max \left| \overline{F}^{(2)}_{n_2}(x) - \overline{F}^{(1)}_{n_1}(x) \right|. \tag{6.4.34}$$

Величину $D_{n_1 n_2}$ легко определить непосредственным вычислением для каждого x или графически, построив графики ступенчатых кривых $F^{(1)}_{n_1}(x)$ и $F^{(2)}_{n_2}(x)$. Оказывается, что в том случае, когда гипотеза H справедлива, т. е. $F_1(x) = F_2(x) = F(x)$ при любых x, величина $D_{n_1 n_2} \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}}$ подчиняется при больших n_1 и n_2 приближенно закону распределения Колмогорова $K(\lambda)$ независимо от вида непрерывной функции $F(x)$. Другими словами,

$$\mathrm{P}\left(D_{n_1 n_2} < \lambda \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2}}\right) \to K(\lambda) \tag{6.4.35}$$

$$n_1 \to \infty$$
$$n_2 \to \infty$$

при любом $\lambda > 0$.

Эта теорема дает возможность проверить гипотезу H по крайней мере при достаточно больших n_1 и n_2 ($n_1 > 50$, $n_2 > 50$). Для меньших значений n_1 и n_2 предельную теорему применять нельзя и следует применять формулы, основанные на точном законе распределения $D_{n_1 n_2}$. Для уровня значимости α критическая область для проверки гипотезы определяется неравенством

$$D_{n_1 n_2} > \lambda_\alpha \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2}}. \tag{6.4.36}$$

Иначе говоря, расхождение, превышающее предел, стоящий в правой части неравенства, можно считать существенным с вероятностью ошибки, не превосходящей α. Рассмотрим числовой пример.

Пример 6.4.6. Пусть у нас имеются нижеследующие данные о наружных диаметрах 120 штамповок колец подшипников одного определенного типо-размера, полученных на двух горизонтально-ковочных машинах — № 1 и № 4 (по 60 колец на каждой машине) (табл. 6.4.9).

Таблица 6.4.9

№ по пор.	Наружный диаметр кольца		№ по пор.	Наружный диаметр кольца		№ по пор.	Наружный диаметр кольца	
	машина № 1	машина № 4		машина № 1	машина № 4		машина № 1	машина № 4
1	72,58	72,50	21	72,50	72,35	41	72,30	72,31
2	72,35	72,35	22	72,69	72,16	42	72,28	72,46
3	72,33	72,69	23	72,54	72,51	43	72,51	72,36
4	72,54	72,60	24	72,48	72,50	44	72,37	72,39
5	72,24	72,54	25	72,36	72,50	45	72,14	72,30
6	72,42	72,42	26	72,50	72,48	46	72,42	72,30
7	72,58	72,68	27	72,43	72,53	47	72,36	72,38
8	72,47	72,54	28	72,46	72,25	48	72,28	72,55
9	72,54	72,55	29	72,56	72,48	49	72,20	72,36
10	72,24	72,33	30	72,48	72,36	50	72,48	72,24
11	72,38	72,56	31	72,43	72,53	51	72,66	72,23
12	72,70	72,36	32	72,56	72,23	52	72,64	72,16
13	72,47	72,36	33	72,34	72,55	53	72,73	72,17
14	72,49	72,15	34	72,38	72,51	54	72,43	72,37
15	72,28	72,48	35	72,56	72,25	55	72,28	72,38
16	72,47	72,46	36	72,32	72,11	56	72,64	72,46
17	71,95	72,36	37	72,41	72,44	57	72,72	72,12
18	72,18	72,38	38	72,14	72,51	58	72,35	72,28
19	72,66	72,40	39	72,29	72,55	59	72,60	72,23
20	72,35	72,38	40	72,31	72,24	60	72,46	72,38

Требуется проверить гипотезу о том, что обе «пробы» взяты из одной генеральной совокупности, т. е., иными словами, что обе машины дают более или менее одинаковое распределение штамповок по их наружным диаметрам.

С целью такой проверки находим величину наибольшей разности между эмпирическими функциями распределения (накопленными частостями), пользуясь табл. 6.4.10.

Таблица 6.4.10

Значение	Частота		Накопленная частота		Накопленная частость		Разность накоплен. частостей (абс. вел.)
	машина № 1	машина № 4	машина № 1	машина № 4	машина № 1	машина № 4	
71,95	1		1	0	0,0167	0,0000	0,0167
72,11		1	1	1	0,0167	0,0167	0,0000
72,12		1	1	2	0,0167	0,0333	0,0167
72,14	2		3	2	0,0500	0,0333	0,0167
72,15		1	3	3	0,0500	0,0500	0,0000
72,16		2	3	5	0,0500	0,0833	0,0333
72,17		1	3	6	0,0500	0,1000	0,0500
72,18	1		4	6	0,0667	0,1000	0,0333
72,20	1		5	6	0,0833	0,1000	0,0167
72,23		3	5	9	0,0833	0,1500	0,0667
72,24	2	2	7	11	0,1167	0,1833	0,0667
72,25		2	7	13	0,1167	0,2167	0,1000
72,28	4	1	11	14	0,1833	0,2333	0,0500
72,29	1		12	14	0,2000	0,2333	0,0333
72,30	1	2	13	16	0,2167	0,2667	0,0500
72,31	1	1	14	17	0,2333	0,2833	0,0500
72,32	1		15	17	0,2500	0,2833	0,0333
72,33	1	1	16	18	0,2667	0,3000	0,0333
72,34	1		17	18	0,2833	0,3000	0,0167
72,35	3	2	20	20	0,3333	0,3333	0,0000
72,36	2	6	22	26	0,3667	0,4333	0,0667
72,37	1	1	23	27	0,3833	0,4500	0,0667
72,38	2	5	25	32	0,4167	0,5333	0,1167
72,39		1	25	33	0,4167	0,5500	0,1333
72,40		1	25	34	0,4167	0,5667	0,1500
72,41	1		26	34	0,4333	0,5667	0,1333
72,42	2	1	28	35	0,4667	0,5833	0,1167
72,43	3		31	35	0,5167	0,5833	0,0667
72,44		1	31	36	0,5167	0,6000	0,0833
72,46	2	3	33	39	0,5500	0,6500	0,1000
72,47	3		36	39	0,6000	0,6500	0,0500
72,48	3	3	39	42	0,6500	0,7000	0,0500
72,49	1		40	42	0,6667	0,7000	0,0333
72,50	2	3	42	45	0,7000	0,7500	0,0500
72,51	1	3	43	48	0,7167	0,8000	0,0833
72,53		2	43	50	0,7167	0,8333	0,1167
72,54	3	2	46	52	0,7667	0,8667	0,1000
72,55		4	46	56	0,7667	0,9333	0,1667
72,56	3	1	49	57	0,8167	0,9500	0,1333
72,58	2		51	57	0,8500	0,9500	0,1000
72,60	1	1	52	58	0,8667	0,9667	0,1000
72,64	2		54	58	0,9000	0,9667	0,0667
72,66	2		56	58	0,9333	0,9667	0,0333
72,68		1	56	59	0,9333	0,9833	0,0500
72,69	1	1	57	60	0,9500	1,0000	0,0500
72,70	1		58	60	0,9667	1,0000	0,0333
72,72	1		59	60	0,9833	1,0000	0,0167
72,73	1		60	60	1,0000	1,0000	0,0000
Сумма	60	60					

Просматривая последнюю графу этой таблицы, мы обнаруживаем, что наибольшая разность между эмпирическими функциями распределения отвечает диаметру кольца 72,55 *мм*; она равна:

$$D_{60\cdot 60} = 0{,}1667.$$

Используя табл. 5.4.4 значений λ, приведенную в **5.4.9**, находим, что $\lambda = 1{,}358$ при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

Тогда критическая область определится с помощью неравенства (6.4.36) следующим образом:

$$D_{60\cdot 60} > 1{,}358 \sqrt{\frac{60+60}{60^2}} = 0{,}248.$$

Полученное нами на опыте значение $D_{60\cdot 60} = 0{,}1667$ лежит в области «допустимых значений». Таким образом, гипотезу об одинаковости распределений штамповок, полученных на двух машинах, по диаметрам следует признать не противоречащей наблюдениям.

§ 5. Критерий «случайности» последовательности

6.5.1. Постановка задачи. Мы знаем, что основные условия, при которых последовательность наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над некоторой величиной X можно считать случайной выборкой из генеральной совокупности, состоят в том, чтобы, во-первых, величины x_i были независимы и, во-вторых, чтобы они были одинаково распределены [1]). Только при этих условиях мы можем рассматривать величины x_i как повторения одной и той же величины X с некоторым законом распределения $F(x)$. Закон распределения совокупности величин x_i в условиях случайной выборки можно записать в таком виде:

$$\mathbf{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x_1)\,F(x_2)\ldots F(x_n), \qquad (6.5.1)$$

где $\mathbf{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть интегральный n-мерный закон распределения совокупности n величин. Значение $\mathbf{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не изменяется при перестановке любых аргументов x_i и x_j между собой. Отсюда следует, что в том случае, когда выборка случайна, порядок, в котором располагаются наблюдения различной величины, не играет существенной роли: все $n!$ перестановок, дающие ту же группу наблюденных значений, будут равновозможны. Невозможно поэтому дать какой-нибудь признак «случайности» выборки, описываемый в терминах величин и относительного порядка в расположении наблюдений. Однако часто гипотезы, исключающие «случайность» и возможно фактически имеющие место в рассматриваемых случаях, как раз указывают на необходимость определенной зависимости между порядком наблюдения и величиной, зарегистрированной в этом наблюдении.

Так, в том случае, когда мы можем допустить, что в течение наблюдения центр распределения смещался, непрерывно возрастая, естественно ожидать появления наблюдений в порядке их роста от меньшего к большему с некоторыми, быть может, исключениями, которые следует приписать случайным флуктуациям.

Разумеется, схема случайной выборки представляет некоторую математическую модель, которую с хорошим приближением можно воспроизвести в искусственных опытах, например, с вынимание карточек с написанными на них числами из ящика, в который эти карточки помещаются перед опытом в хорошо перемешанном виде; после каждого вынимания карточка возвращается обратно и после нового перемешивания опыт повторяется в тех же условиях, как и предыдущий. Если вероятности появления каждого из возможных чисел нам известны, то, как мы видели ранее, возможны и некоторые статистические предсказания

[1]) В этом смысле безвозвратная выборка, строго говоря, не является в полной мере случайной, так как она не обеспечивает полной независимости отдельных наблюдений.

относительно результатов длинной серии подобных опытов. В этом случае говорят, что массовый процесс находится в статистически контролируемом состоянии в том смысле, что мы можем говорить о вероятности нахождения изменяющегося признака в любых заданных заранее границах и предсказывать по крайней мере средний процент попадания признака в заданный наперед интервал в результате многократного повторения случайных испытаний (подобных вынниманию карточек в нашем примере).

Этой схеме процесса, находящегося под «статистическим контролем», до известной степени уподобляют практически процесс изготовления деталей на станке, работающем по методу автоматического получения размера; если точность его соответствует заданной точности обработки, он правильно настроен и все основные производственные условия являются в достаточной мере стабильными. В этих условиях изменчивость размеров изготовленных деталей носит, по крайней мере как правило, не опасный характер в том смысле, что выход за границы производственного допуска теоретически возможен лишь в исчезающе малом проценте случаев; практически же тем самым гарантируется возможность работы без брака. Однако такое «статистически контролируемое» состояние длится до тех пор, пока под действием тех или иных факторов (разладка станка, износ или поломка инструмента, изменение температурного режима и т. д.) в ходе процесса не произойдут перемены, систематически существенным образом изменяющие характер изменчивости в опасную сторону в смысле появления заметного процента изделий, выходящих по размерам за границы допуска. (Здесь мы пока оставляем в стороне факторы, изменяющие масштабы самого рассеивания размеров.)

Одна из важных задач, которая возникает при статистическом анализе последовательно наблюденных данных в таких условиях, заключается в разработке оперативной системы своевременной сигнализации о всех нарушениях нормального хода процесса. Другая задача состоит в том, чтобы перед тем, как применять к статистическим данным те или иные описанные выше приемы с целью получения интересующих нас теоретических и практических выводов, проверить, в какой мере эти данные можно рассматривать как случайную выборку.

Мы рассмотрим теперь несколько простых приемов, которые оказываются полезными для того, чтобы проверить гипотезу «случайности». Там, где эта гипотеза будет забракована, естественно искать причины, обнаруживающие свое действие в особом порядке расположения следующих друг за другом наблюдений.

6.5.2. Понятие серии. Мы введем сначала некоторые новые понятия. Рассмотрим последовательность, в которой наблюдается случайное чередование n элементов, состоящих из n_1 элементов одного рода — они будут обозначаться буквой a и n_2, элементов второго рода — элементов b. Вот пример такой последовательности:

$$aaabbaabaabbbbaabba,$$

состоящей из 10 элементов a и 9 элементов b.

Всякий отрезок последовательности максимальной возможной длины, состоящий из элементов одного и того же рода, называется *серией*. Иными словами, серия представляет совокупность следующих друг за другом одинаковых элементов, причем первый элемент этой совокупности следует за элементом другого рода. Число элементов, входящих в серию, называется ее *длиной*. В приведенном выше примере последовательность начинается с серии из трех элементов a, за ней следует серия из двух элементов b, далее серия из двух элементов a, серия из *одного* элемента b и т. д. Всего в нашем примере последовательность содержит 9 серий, из них 5 серий элементов a и 4 серии элементов b. Ясно, что число серий из элементов одного и другого рода может быть или

одинаковым или различаться на одну единицу, смотря по тому, будет ли последовательность начинаться и кончаться разными или одинаковыми элементами.

В теории серий используют следующие обозначения:

r_{1i} — число серий a длины i;

r_{2i} — число серий b длины i;

$r_i = r_{1i} + r_{2i}$ — общее число серий длины i;

$R_{1k} = \sum_{i=k}^{n_1} r_{1i}$ — число серий из элементов a длины, не меньшей k;

$R_{2k} = \sum_{i=k}^{n_2} r_{2i}$ — число серий элементов b длины, не меньшей k;

$R_k = R_{1k} + R_{2k}$ — общее число серий длины, не меньшей k;

R — общее число серий.

В приведенном выше примере числа серий разного рода соответственно их длине можно свести в отдельную таблицу (табл. 6.5.1).

Таблица 6.5.1

i	r_{1i}	r_{2i}	r_i	k	R_{1k}	R_{2k}	R_k
1	1	1	2	1	5	4	9
2	3	2	5	2	4	3	7
3	1	0	1	3	1	1	2
4	0	1	1	4	0	1	1

6.5.3. Законы распределения, математические ожидания и дисперсии чисел серий. Каждая из величин $r_{1i}, \ldots, R_i, R$ при гипотезе случайности следует закону распределения, вычисление которого представляет довольно сложную задачу комбинаторики. Мы выведем здесь для примера закон распределения величины R — общего числа серий в данной последовательности, предполагая возможные чередования элементов a и b одинаково вероятными. Подсчитаем прежде всего число различных способов образования последовательностей из n_1 букв a и из n_2 букв b, причем $n_1 + n_2 = n$. Очевидно, что каждой такой последовательности отвечает вполне определенное сочетание из n номеров $1, 2, \ldots, n$ по n_1, если мы будем отмечать порядковые номера тех мест, которые заняты буквой a, и, обратно, каждому сочетанию из указанных номеров по n_1 будет отвечать вполне определенная последовательность из букв a и b, причем буква a будет стоять на выбранных (входящих во взятое сочетание) n_1 местах, а остающиеся $n - n_1 = n_2$ мест будут заняты буквой b. Таким образом, число различных последовательностей a и b будет равно $C_n^{n_1} = C_n^{n_2}$. Все они имеют одинаковую вероятность осуществления. Рассмотрим теперь, какова будет вероятность равенства $R = 2k$. Так как за каждой серией букв одного рода должна следовать серия из букв другого, то, очевидно, число R должно состоять в данном случае из k серий букв a и k серий букв b. Мы покажем несколько ниже, что k серий из n_1 букв a можно образовать $C_{n_1-1}^{k-1}$ способами и аналогично k серий из n_2 букв b можно образовать $C_{n_2-1}^{k-1}$ способами. Комбинируя тогда каждый набор из k серий первого рода (из общего их числа $C_{n_1-1}^{k-1}$) с каждым набором из k серий элементов второго рода, мы можем двумя способами получать интересующие нас последовательности с $2k$ сериями: можно начинать с серии букв a (и кончать тогда серией из b) или начинать ее серией из b (кончая в этом случае серией из a). Таким образом, в результате комбинирования мы получим

$2C_{n_1-1}^{k-1} \cdot C_{n_2-1}^{k-1}$ последовательностей с $2k$ сериями, и потому искомая вероятность будет равна:

$$\mathbf{P}(R=2k) = p_{2k} = \frac{2C_{n_1-1}^{k-1} \cdot C_{n_2-1}^{k-1}}{C_n^{n_1}}. \qquad (6.5.2)$$

Докажем теперь, что из n_1 букв a можно получить k серий ровно $C_{n_1-1}^{k-1}$ отличающимися друг от друга способами. Другими словами, этим числом способов можно n_1 элементов (т. е. букв a) разбить на k групп, причем ни одна из них не должна быть пустой. Наглядно можно представить себе такое разбиение следующим образом: выписав n_1 букв a друг за другом, проведем $k+1$ вертикальных черточек, отделяющих одну группу от другой, например:

$$|aa| \qquad a| \qquad aaa| \qquad a \ldots a|aaaa|$$

1-я группа 2-я группа 3-я группа k-я группа

Чтобы ни одна группа не оказалась пустой, мы должны позаботиться о том, чтобы каждая из черточек, кроме первой и последней, прошла в промежутке между смежными буквами. Число таких промежутков равно $n_1 - 1$, а число внутренних черточек $k-1$; поэтому удовлетворяющее указанному условию разбиение можно получить $C_{n_1-1}^{k-1}$ способами, отличающимися друг от друга положением хотя бы одной черточки. Этим подсчетом мы и воспользовались выше. Точно таким же способом можно показать, что

$$\mathbf{P}(R=2k+1) = p_{2k+1} = \frac{C_{n_1-1}^{k} \cdot C_{n_2-1}^{k-1} + C_{n_1-1}^{k-1} C_{n_2-1}^{k}}{C_n^{n_1}}. \qquad (6.5.3)$$

Формула (6.5.2) вместе с (6.5.3) определяет закон распределения R.

Укажем теперь, каковы будут математические ожидания и дисперсии чисел серий разного рода [1]) и как можно приближенно определить вероятности, связанные с распределениями этих чисел. Математическое ожидание числа серий элементов a длины i при случайном чередовании n элементов равно:

$$\mathbf{M}r_{1i} = \frac{n_1(n_1-1)\ldots(n_1-i+1)(n_2+1)n_2}{n(n-1)\ldots(n-i)} \qquad (i=1, 2, \ldots, n_1). \qquad (6.5.4)$$

Выражение для r_{2i} получится заменой n_1 на n_2 и n_2 на n_1. Для числа R_{1k} мы будем иметь:

$$\mathbf{M}R_{1k} = \frac{n_1(n_1-1)\ldots(n_1-k+1)(n_2+1)}{n(n-1)\ldots(n-k+1)} \qquad (k=1, 2, \ldots, n_1). \qquad (6.5.5)$$

С помощью (6.5.4) и (6.5.5) могут быть получены и математические ожидания других величин. Мы ограничимся случаем, когда число элементов первого и второго рода одинаково, т. е. $n_1 = n_2 = m$ и $n = 2m$.

В этом случае из (6.5.4) получим:

$$\mathbf{M}r_{1i} = \mathbf{M}r_{2i} = \frac{m(m-1)\ldots(m-i+1)\,m(m+1)}{n(n-1)\ldots(n-i)} = \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(\frac{m}{n}-\frac{i-1}{n}\right)\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}+\frac{1}{n}\right)n}{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{i}{n}\right)}; \qquad (6.5.6)$$

[1]) Теорию рассматриваемого здесь вопроса см. в книге: В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, М., ИЛ, 1952.

а так как $\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$, то

$$\mathbf{M}r_{1i}=\mathbf{M}r_{2i}\approx\frac{n}{2^{i+2}}. \tag{6.5.7}$$

Точно так же из (6.5.5) будет следовать

$$\mathbf{M}R_{1k}=\mathbf{M}R_{2k}\approx\frac{n}{2^{k+1}}. \tag{6.5.8}$$

Наконец,

$$\mathbf{M}R_k=2\mathbf{M}R_{1k}=\frac{2m\,(m-1)\ldots(m-k+1)\,(m+1)}{n\,(n-1)\ldots(n-k+1)}\approx\frac{n}{2^k}. \tag{6.5.9}$$

Математическое ожидание и дисперсия числа серий того и другого типа выражаются формулами

$$\mathbf{M}R=\frac{n+2}{2},\quad \mathbf{D}R=\frac{n}{4}\left(1-\frac{1}{n-1}\right)\approx\frac{n-1}{4}. \tag{6.5.10}$$

Из (6.5.8) следует, что объем выборки, для которого можно ожидать появления хотя бы одной серии (из элементов a или элементов b) длины k или еще большей, должен быть приблизительно равен 2^{k+1}. Например, в последовательности из 64 элементов (32 элемента a и 32 элемента b) в среднем может осуществиться не более одной серии длиной шесть или еще большей длины.

Исследование вероятностей p_{2k} и p_{2k+1} для больших $n\,(n_1=n_2)$ показывает, что R распределено при этом приближенно нормально.

Поэтому при достаточно больших n имеет место следующее соотношение:

$$\mathbf{P}\,(R\leqslant z)\approx 0{,}5+\Phi\left(\frac{z+\frac{1}{2}-\frac{n+2}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{n-1}}\right). \tag{6.5.11}$$

Практически этой формулой можно пользоваться уже при $n\geqslant 20$. Обозначая через u_p нижний предел нормированного уклонения, которому при нормальном законе отвечает вероятность $\mathbf{P}\,(u>u_p)=0{,}5-\Phi\,(u_p)=\frac{p}{100}$, и полагая

$$z=z_p(R)=\frac{1}{2}\,(n+1+u_p\sqrt{n-1}), \tag{6.5.12}$$

получим из (6.5.11) и (6.5.12):

$$\mathbf{P}\,(R<z_p)\approx\frac{p}{100}. \tag{6.5.13}$$

Например, полагая $n=40$ и $p=2{,}5\%$, будем иметь: $u_p=-1{,}96$, $z_p(R)=\frac{1}{2}\,(41-1{,}96\sqrt{39})\approx 14{,}37$. Следовательно, вероятность встретить 14 серий или меньше $\left(\text{при среднем числе серий } \frac{40+2}{2}=21\right)$ при случайном чередовании 20 элементов a и 20 элементов b не превосходит $2{,}5\%$.

Распределение R_{11} общего числа серий элементов (длины 1 и более единицы) также приближенно нормально при $n>20$ с математическим ожиданием

$$\mathbf{M}R_{11}\approx\frac{1}{2}\mathbf{M}R=\frac{n+2}{4} \tag{6.5.14}$$

и дисперсией

$$\mathbf{D}R_{11}=\frac{n+2}{16}\left(1-\frac{1}{n-1}\right)\approx\frac{n+1}{16}, \tag{6.5.15}$$

что позволяет указать для R_{11} нижний предел допустимых значений с уровнем значимости $\frac{p}{100}\%$:

$$z_p(R_{11}) \approx \frac{1}{4}(n + u_p\sqrt{n+1}). \tag{6.5.16}$$

Распределение R_{1k} или $k > 2$ хотя и сходится к нормальному, но более медленно и при малых n резко асимметрично.

Для больших k можно с успехом использовать распределение Пуассона

$$\mathbf{P}(R_{1k} = \nu) \approx \frac{a^\nu}{\nu!} e^{-a},$$

считая

$$a = \mathbf{M}R_{1k} \approx \frac{n}{2^{k+1}}. \tag{6.5.17}$$

Следовательно, для вероятности найти хотя бы одну серию из элементов a длины k или больше мы будем иметь приближенно:

$$\mathbf{P}(R_{1k} \geqslant 1) = 1 - \mathbf{P}(R_{1k} = 0) = 1 - e^{-\frac{n}{2^{k+1}}}. \tag{6.5.18}$$

Отсюда легко определить критическое значение k такое, что $\mathbf{P}(R_{1k} \geqslant 1)$ оказывается равной наперед заданному малому числу α.

Например, при $n = 40$ и $\alpha = 0{,}05$

$$\mathbf{P}(R_{1k} \geqslant 1) = 1 - e^{-\frac{4}{2^{k+1}}} = 0{,}05,$$

откуда $k = \dfrac{\lg_{10}\left(-\dfrac{40}{\ln 0{,}95}\right)}{\lg_1 2} - 1 = 8{,}6.$

Таким образом, с вероятностью всего в 5% мы можем рассчитывать найти по крайней мере одну серию длиной 8 и более из букв a в случайном расположении 20 букв a и 20 букв b.

6.5.4. Различные критерии «случайности». Изложенная теория может быть применена к проверке «случайности» выборки из некоторой генеральной совокупности с непрерывным распределением. Допустим, что мы имеем $n = 2m + 1$ наблюдений непрерывно распределенной величины. Определив медиану из наших наблюдений, т. е. найдя $m+1$-й член по порядку в нашем вариационном ряду, мы классифицируем теперь все остальные наблюдения в порядке их появления, разбивая их на два класса равной численности, а именно на большие медианы и меньшие медианы. Обозначив первые буквой a, а вторые — буквой b, мы получим последовательность, в которой в некотором порядке чередуется m букв a и m букв b. В случае четного числа $n = 2m$ можно за эмпирическую медиану принять некоторое число, промежуточное между двумя центральными членами с порядковыми номерами (по возрастанию значений) m и $m+1$.

При гипотезе «случайности» мы имеем вполне определенное распределение общего числа серий и числа очень длинных серий. Пусть, с другой стороны, мы можем допустить, что в течение наблюдения происходило смещение центра распределения, например, в сторону больших значений. В этом случае мы как следствие указанного смещения будем обнаруживать в ряду наблюдений очень длинные серии при сравнительно малом их общем числе. Так мы естественным путем приходим к двум критериям проверки гипотезы «случайности»:

1) длине серий и

2) числу серий.

Таблица 6.5.2

Длина серии k	Наибольшее общее число наблюдений n, для которого вероятности выполнения нижеследующих неравенств меньше 0,05		
	$R_k \geqslant 1$	$R_{1k} \geqslant 1$ и $R_{2k} \geqslant 1$	$R_{1k} \geqslant 1$
5	10	16	10
6	14	32	18
7	22	64	28
8	34	120	48
9	54	230	80
10	86		130
11	140		230
12	230		420

В табл. 6.5.2 мы приводим для длин серий $k = 5, 6, \ldots, 12$ такие наибольшие значения общего числа наблюдений, для которого вероятности $\mathbf{P}(R_k \geqslant 1)$ (наличия хотя бы одной серии любого из элементов длиной, не меньшей k), вероятности $\mathbf{P}(R_{1k} \geqslant 1;\ R_{2k} \geqslant 1)$ (наличия хотя бы по одной серии первого и второго элементов длиной, не меньшей k) и вероятности $\mathbf{P}(R_{1k} \geqslant 1)$ (наличия хотя бы одной серии первого элемента длиной, не меньшей k) оказываются меньшими 0,05.

Из табл. 6.5.2 мы можем заключить, например, что до тех пор, пока общее число наблюдений n меньше 22, вероятность появления хотя бы одной серии любого из элементов длиной 7 или большей будет меньше 0,05. При числе наблюдений n, большем 22, мы можем встретить хотя бы одну серию длиной 7 или больше с вероятностью, уже большей чем 0,05. Вероятность встретить среди наблюдений хотя бы одну серию элементов a и в то же время по крайней мере одну серию элементов b длиной, большей или равной 8, будет меньше 0,05 до тех пор, пока общее число наблюдений n будет меньше 120.

Приведем еще одну таблицу (табл. 6.5.3) для второго критерия. В ней даются при числах наблюдений $n = 10, 20, 30, \ldots, 200$ и при числе элементов a, равном числу элементов b, верхние и нижние пределы для числа серии R в рассматриваемой последовательности.

Таблица 6.5.3

Вероятности встретить R	Общее число серий R												
	Общее число наблюдений n												
	10	20	30	40	50	60	80	100	120	140	160	180	200
0,05	3	6	11	15	19	24	33	42	51	60	70	79	88
0,95	8	15	20	26	32	37	48	59	70	81	91	102	113
0,025	2	6	10	14	18	22	31	40	49	58	68	77	86
0,975	9	15	21	27	33	39	50	61	72	83	93	104	115

В первой строке указаны пределы такие, что вероятность получить для R меньшее значение, чем указанное в таблице, не превосходит 0,05. Аналогичные пределы для вероятности 0,025 указаны в третьей строке. Во второй и четвертой строках помещены пределы такие, что с вероятностями 0,95 и 0,975 соответственно мы можем быть уверены в том, что R превзойдет указанные пределы. Малые вероятности предназначены для проверки гипотезы «случайности» тогда, когда число серий в выборке мало, меньше ожидаемого числа, а большие вероят-

ности — для обратного случая. Таким образом, в таблице приведены нижний и верхний пределы общего числа серий R при уровнях значимости 0,05 и 0,10.

По табл. 6.5.3 мы можем заключить, например, что при общем числе наблюдений, равном 100, мы можем встретить общее число серий R, не большее 42 с вероятностью, не большей 0,05, и не большее 40 с вероятностью, не большей 0,025, не меньшее 59 с вероятностью, не меньшей 0,95, и не меньшее 61 с вероятностью, не меньшей 0,975.

Покажем теперь, пользуясь данными о штамповках колец из примера 5.2.1 и о валиках из примера 5.2.2, как пользоваться указанными двумя критериями.

Найдем сначала медианы распределений колец и валиков. Как можно усмотреть из примеров 5.2.3 и 5.3.12, медианы наших распределений соответственно равны:

$$m_{e_1} = 32{,}295 \text{ мм} \quad \text{и} \quad m_{e_2} = 5 \text{ мк}.$$

Запишем теперь последовательности наблюдений в виде букв a (значения меньшие медианы) и букв b (значения, бо́льшие медианы).

Распределение 20 колец будет тогда иметь вид

abbabaaabbabaaabbabb

Распределение 200 валиков будет выглядеть так:

aaaaaaabaaaabaaaaabbaabbb

bbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbb

bbbbbbbbbbbbbbbbbbbabaaa

baabbabbbbbbabaaabaaabbbb

abaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaa

aaaaaaaaaabbbbabbbaaaaaba

abbabaababababbbbbbbaabaaa

bbbbbaababaaabaaaaaabaaaa

Произведем теперь подсчет чисел серий различной длины и сведем результаты подсчета в нижеследующие таблицы (при этом из семи значений второй выборки, равных 5, первое отнесем к элементам a и все последующие — к b) (табл. 6.5.4 и 6.5.5):

Таблица 6.5.4

Распределение серий колец

Длина серий i	Фактическое число серий			Ожидаемое число серий		
	r_{1i} (элемента a)	r_{2i} (элемента b)	r_i (общее число)	$\mathbf{M}r_{1i} = \mathbf{M}r_{2i}$	$\mathbf{M}r_i$	$\mathbf{M}R_{1k}$
1	2	3	4	5	6	7
1	4	2	6	2,9	5,8	5,5
2	0	4	4	1,5	2,9	2,6
3	2	0	2	0,7	1,4	1,1
Сумма			12			

Таблица 6.5.5

Распределение серий валиков

Длина серий l	Фактическое число серий			Ожидаемое число серий		
	r_{1i} (элемента a)	r_{2i} (элемента b)	r_i (общее число)	$\mathbf{M}r_{1i}=\mathbf{M}r_{2i}$	$\mathbf{M}r_i$	$\mathbf{M}R_{1k}$
1	2	3	4	5	6	7
1	9	16	25	25,4	50,8	50,5
2	6	3	9	12,7	25,4	25,1
3	5	1	6	6,3	12,6	12,4
4	2	2	4	3,1	6,2	6,1
5	2	1	3	1,5	3,1	3,0
6	1	1	2	0,75	1,51	1,46
7	1	0	1	0,37	0,73	0,71
8	0	1	1	0,18	0,36	0,34
33	1	0	1	~ 0	~ 0	~ 0
48	0	1	1	~ 0	~ 0	~ 0
Сумма			53			

Для контроля правильности подсчета служит графа 4. Если просуммировать произведения чисел, стоящих в графе 4, на соответствующие длины серий, стоящие в графе 1, то мы должны получить общее число наблюдений.

Для колец мы имеем:

$$6 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 0 = 20 \text{ и общее число колец равно } 20,$$

следовательно, подсчет сделан правильно.

Аналогично этому для валиков получим:

$$25 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 7 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 33 + 1 \cdot 48 = 200.$$

Ожидаемое число $\mathbf{M}R_{1k}$ серий первого элемента длиной, не меньшей k, мы получим по формуле (6.5.5).

Если число n_1 элементов a не равно числу n_2 элементов b, то из этой формулы получаем:

$$\mathbf{M}R = \mathbf{M}R_{11} = \frac{n_1(n_2+1)}{n}, \tag{6.5.19}$$

где n — общее число всех элементов a и b.

В случае же равенства чисел элементов a и b, т. е. когда $n_1 = n_2 = m = \frac{n}{2}$, будем из той же формулы иметь:

$$\mathbf{M}R_{11} = \frac{m+1}{2}. \tag{6.5.20}$$

Далее из приведенных в **6.5.3** вычислений вытекает:

$$\mathbf{M}R_{1,\,k+1} = \mathbf{M}R_{1,\,k} \cdot \frac{m-k}{n-k}, \tag{6.5.21}$$

$$\mathbf{M}r_{1i} = \mathbf{M}R_{1i} - \mathbf{M}R_{1,\,i+1}. \tag{6.5.22}$$

Для колец мы имеем:

$$n_1 = n_2 = m = \frac{n}{2} = 10;$$

$$\mathbf{M}R_{11} = \frac{10+1}{2} = 5{,}5, \qquad \mathbf{M}R_{12} = 5{,}5\,\frac{10-1}{20-1} = 2{,}6,$$

$$\mathbf{M}R_{13} = 2{,}6\,\frac{10-2}{20-2} = 1{,}1, \quad \mathbf{M}R_{14} = 1{,}1 \cdot \frac{10-3}{20-3} = 0{,}4.$$

Эти результаты, кроме последнего, мы проставляем в графе 7.

Далее с помощью формулы (6.5.22) находим:

$$\mathbf{M}r_{11} = 5{,}5 - 2{,}6 = 2{,}9, \quad \mathbf{M}r_{12} = 1{,}5 \quad \text{и} \quad \mathbf{M}r_{13} = 0{,}7.$$

Полученные таким образом значения проставляем в графе 5. Данные для графы 6 мы получаем умножением на 2 данных предыдущей графы.

Аналогично мы вычисляем данные для граф 5, 6, 7 для валиков.

Применим к полученным данным сначала *критерий длины серий*. Из сравнения полученных нами в примере таблиц распределений серий колец и валиков с таблицей 6.5.2 заключаем, что с уровнем значимости 0,05 последовательность колец не противоречит гипотезе «случайности», так как здесь встречаются серии длины, не большей 3, а уже при числе наблюдений $n > 10$ можно обнаружить с вероятностью, *большей* 0,05, серию одного из элементов *длины* 5 *и большей*.

Последовательность валиков, наоборот, с большой значимостью не согласуется с гипотезой «случайности», так как здесь встречаются при $n = 200$ серии длины 33 и даже 48, в то время как согласно таблице 6.5.2 при числе наблюдений n, равном 230 и меньшем, вероятность встретить хотя бы одну серию длины 12 и большей меньше 0,05.

Этот же критерий можно применить еще, используя закон распределения Пуассона для R_{1k}.

В самом деле, по формуле (6.5.18) мы определяем вероятность встретить в n наблюдениях хотя бы одну серию из элементов a наибольшей наблюденной длины k для колец

$$\mathbf{P}(R_{13} \geqslant 1) = 1 - e^{-\frac{20}{2^3+1}} = 0{,}7135 \quad .$$

и для валиков

$$\mathbf{P}(R_{1,33} \geqslant 1) = 1 - e^{-\frac{200}{2^{33}+1}} \approx 0.$$

Таким образом, для последовательности колец гипотеза «случайности» не противоречит данным наблюдения даже в том случае, если уровень значимости выбрать очень большим, например близким к 0,5; но для валиков эта гипотеза опровергается, если даже выбрать уровень значимости чрезвычайно малым, например 0,001.

Можно было бы еще иначе применить этот же критерий длины серий, а именно, воспользоваться вытекающим непосредственно из формулы (6.5.18) равенством

$$k = \frac{\lg_{10}\left(-\frac{n}{\ln \alpha}\right)}{\lg_{10} 2} - 1, \tag{6.5.23}$$

где α представляет дополнение до единицы вероятности, с которой при n наблюдениях в последовательности элементов a и b можно встретить хотя бы одну серию элементов a длины k и большей. Возьмем, например, уровень значимости 0,05 и, следовательно, $\alpha = 0{,}95$.

Тогда получим для колец

$$k = \frac{\lg_{10}\left(\frac{-20}{\ln 0{,}95}\right)}{\lg_{10} 2} - 1 = 7{,}6$$

и для валиков

$$k = \frac{\lg_{10}\left(\frac{-200}{\ln 0{,}95}\right)}{\lg_{10} 2} - 1 = 11{,}0.$$

Таким образом, критические области определятся неравенствами для колец

$$k > 8$$

и для валиков

$$k > 11.$$

Для колец наиболее длинная серия имеет длину 3 и, следовательно, лежит в области допустимых значений, тогда как для валиков соответствующая серия имеет длину 33, т. е. попадает в критическую область.

Отсюда следуют те же заключения, что и прежде.

Теперь мы применим к тем же данным *критерий числа серий*, используя нормальный закон распределения для общего числа серий R. Беря тот же 5%-ный уровень значимости и применяя формулы (6.5.12) и (6.5.13), мы будем иметь для нижнего предела числа серий $u_p = -1{,}65$, откуда для колец

$$Z_p(R) = \frac{1}{2}(20 + 1 - 1{,}65\sqrt{19}) = 6{,}9$$

и для валиков

$$Z_p(R) = \frac{1}{2}(200 + 1 - 1{,}65\sqrt{199}) = 88{,}9.$$

Таким образом, критические области будут определяться неравенствами: для колец

$$R < 6,$$

для валиков

$$R < 88.$$

Эти же значения для критических пределов мы можем взять непосредственно из табл. 6.5.3.

Из таблиц распределений числа серий мы видим, что по нашим наблюдениям для колец $R = 12$ и для валиков $R = 53$. Число серий для колец и тут лежит в области допустимых значений, а для валиков — в критической области; следовательно, мы приходим к тому же заключению, что и прежде.

Заметим, что проверки, применяющие оба эти критерия к одному и тому же материалу, конечно, не являются независимыми друг от друга.

6.5.5. Способ последовательных разностей. Из рассматриваемой последовательности n наблюдений

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

образуем $n-1$ разность между соседними членами

$$d_1 = x_2 - x_1, \quad d_2 = x_3 - x_2, \ldots, \quad d_{n-1} = x_n - x_{n-1}.$$

Если x_i образуют выборку из генеральной совокупности величины X и $\mathbf{M}X = a$, $\mathbf{D}X = \sigma^2$, то, как явствует из теоремы (3.3.16), ввиду независимости последовательных наблюдений

$$\mathbf{M}d_i^2 = \mathbf{M}(X_{i+1} - X_i)^2 = 2\mathbf{D}X = 2\sigma^2. \tag{6.5.24}$$

Поэтому, взяв среднюю арифметическую из величин d_i^2 и разделив ее на два, мы получим несмещенную оценку параметра σ^2 по данным выборки

$$q^2 = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} d_i^2. \tag{6.5.25}$$

При тех же условиях можно подсчитать и дисперсию величины q^2. Мы в дальнейшем будем предполагать еще нормальность распределения величины X. Тогда, поль-

зуясь (4.3.27) и применяя приемы, использованные для вывода (5.3.66), из (6.5.25) получим

$$\mathbf{D}q^2 = \frac{3n-4}{(n-1)^2}\sigma^4. \tag{6.5.26}$$

Но из (5.3.74) и (5.3.61) следует, что для обычной несмещенной оценки

$$\overline{s}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2,$$

представляющей при нормальном законе распределения эффективную оценку σ^2, мы имеем:

$$\mathbf{D}\overline{s}^2 = \frac{2}{n-1}\sigma^4. \tag{6.5.27}$$

Поэтому относительная эффективность оценки q^2 равна:

$$\frac{\mathbf{D}\overline{s}^2}{\mathbf{D}q^2} = \frac{2(n-1)}{3n-4} \approx \frac{2}{3}. \tag{6.5.28}$$

Таким образом, q^2 в обычных условиях выборки значительно уступает $\overline{s}^2$ в степени использования информации, содержащейся в данных наблюдениях. Однако величина q^2 может быть иногда полезна в несколько иных условиях. Предположим, например, что в течение наблюдения центр распределения величины X постепенно меняется, но дисперсия остается постоянной. В этом случае оценка σ^2 с помощью $\overline{s}^2$ даст заметное преувеличение, так как вариация самой средней входит как составная часть в $\overline{s}^2$. С другой стороны, если изменения средней происходят достаточно плавно и медленно, так что за промежуток между двумя последовательными наблюдениями ее прирост мал по сравнению с σ, то это изменение мало скажется на последовательных разностях, а следовательно, и на величине q^2. Другими словами, $\overline{s}^2$ оказывается более чувствительной к постепенному смещению центра рассеивания, которое наблюдается, например, при монотонном его росте или уменьшении (как это бывает при износе инструмента и при нагреве станка в процессе работы), при циклических колебаниях среднего (под влиянием, например, циклических погрешностей в многопозиционном станке) и т. д.

Таким образом, если нужно проверить гипотезу «случайности» выборки или наличия статистически контролируемого состояния при допущении в качестве альтернативных гипотез возможности постепенного смещения центра рассеивания (при неизменном σ): то целесообразно использовать критерий

$$\delta = \frac{q^2}{\overline{s}^2}. \tag{6.5.29}$$

При этом малые значения δ следует считать указывающими на существенное расхождение с выводами из проверяемой гипотезы «случайности». В самом деле, можно показать, что при гипотезе случайной выборки из нормальной совокупности

$$\mathbf{M}\delta = 1 \quad \text{и} \quad \mathbf{D}\delta = \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n-1}\right) \tag{6.5.30}$$

и что критерий будет приблизительно нормально распределен при $n > 20$. Таким образом, критическая область для δ, отвечающая $q\%$-ному уровню значимости при $n > 20$, будет определяться неравенством

$$\left.\begin{gathered}\delta < \overline{\delta}_q, \\ \text{где} \\ \overline{\delta}_q \approx 1 - \frac{u_q}{\sqrt{n+1}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{u_q}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 0{,}5 - \Phi(u_q) = \frac{q}{100}.\end{gathered}\right\} \tag{6.5.31}$$

Для $n < 20$ можно использовать следующую таблицу допустимых нижних пределов $\overline{\delta}_q$ для уровней значимости 0,1%, 1% и 5% (табл. 6.5.6).

Таблица 6.5.6

Число наблюдений n	Допустимые нижние пределы δ_q для уровней значимости		
	0,1%	1%	5%
4	0,295	0,313	0,390
5	0,208	0,269	0,410
6	0,182	0,281	0,445
7	0,185	0,307	0,468
8	0,202	0,331	0,491
9	0,221	0,354	0,512
10	0,241	0,376	0,531
11	0,260	0,396	0,548
12	0,278	0,414	0,564
13	0,295	0,431	0,578
14	0,311	0,447	0,591
15	0,327	0,461	0,603
16	0,341	0,475	0,614
17	0,355	0,487	0,624
18	0,368	0,499	0,633
19	0,381	0,510	0,642
20	0,393	0,520	0,650

Пример 6.5.1. Пусть требуется проверить гипотезу «случайности» выборки, приведенной в примере 5.2.1, с помощью последовательных разностей. Используя подсчеты, проделанные в примере 5.4.2, получим:

$$\bar{s}^2 = \frac{ns^2}{n-1} = \frac{2{,}5282}{20-1} = 0{,}1331 \ мм^2.$$

Находим несмещенную оценку q^2 по формуле (6.5.26)

$$q^2 = \frac{1}{2(20-1)}[0{,}44^2 + 0{,}07^2 + (-0{,}39)^2 + \ldots + (-0{,}29)^2] = \frac{4{,}8170}{38} = 0{,}1268 \ мм^2.$$

Вычисляем критерий δ по формуле (6.5.29)

$$\delta = \frac{0{,}1268}{0{,}1331} = 0{,}953.$$

Просматривая таблицу 6.5.6, замечаем, что при $n = 20$ нижняя граница для критерия δ даже при 5%-ном уровне значимости равна $\bar{\delta}_5 = 0{,}650$. Таким образом, полученное нами из наблюдений значение $\delta = 0{,}953$ лежит в зоне допустимых значений, и следовательно, гипотеза «случайности», как и в предыдущих проверках, хорошо согласуется с данными наблюдений.

§ 6. Проверка гипотезы нормальности

6.6.1. Способ выпрямленных диаграмм. В **6.4.1** было показано, что, применяя критерий χ^2, мы можем проверить, насколько хорошо соответствует гипотетически допускаемый закон распределения наблюденной в выборке картине распределения. В случае нормального закона распределения такая проверка требует предварительной оценки параметров a и σ по выборочным значениям $\bar{x}$ с $\bar{s}$ и неизвестных вероятностей попадания в последовательные интервалы с помощью приближенной кривой плотности

$$n(x;\ \bar{x},\ \bar{s}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\bar{s}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\bar{s}^2}}.$$

Истолкование результатов проверки с помощью критерия χ^2 не свободно от некоторой условности (ввиду произвольности группировки и малой нагляд-

ности самого показателя. Во многих случаях проверку нормальности распределения можно провести более наглядным и простым по идее способом.

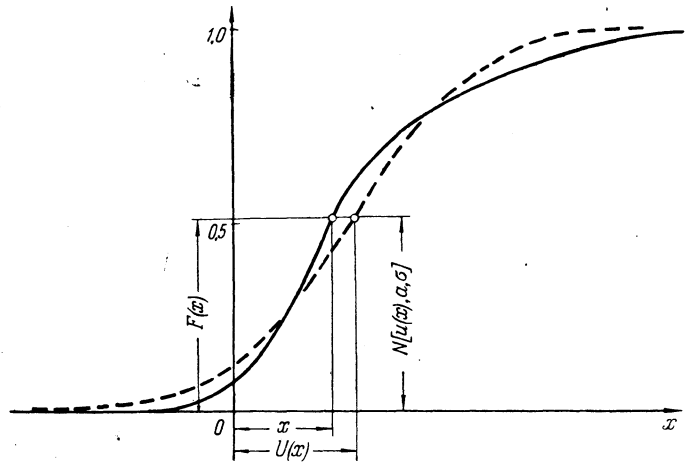
Заметим прежде всего, что всякую непрерывную функцию распределения $F(x)$ можно представить, используя нормальную функцию

$$N(x) = N(x;\ 0,\ 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

в виде сложной функции

$$F(x) = N[u(x);\ 0,\ 1] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u(x)} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx, \quad = N(u(x)),$$

где функция $u(x)$ будет некоторой монотонной возрастающей функцией от x. Возможность такого представления следует с очевидностью из черт. 88, на кото-



Черт. 88. Геометрическая интерпретация функции $u(x)$, связывающей абсциссу точки кривой рассматриваемой функции распределения с абсциссой такой точки нормальной кривой, которая имеет такую же ординату.

ром изображены примерный график функции $F(x)$ и график нормального закона $N(x;\ 0,\ 1)$. Здесь $u(x)$ представляет абсциссу такой точки нормальной интегральной кривой, ордината которой равна ординате рассматриваемой интегральной кривой $F(x)$. Ясно, что рассматриваемая таким образом абсцисса $u(x)$ есть функция от x. Таким образом, если мы поставим в соответствие каждому x значение абсциссы $u(x)$, для которого ордината кривой $N(x;\ 0,\ 1)$ равна ординате $F(x)$, то мы и получим вполне определенную функцию $u(x)$. При этом мы будем полагать $u(x) = -\infty$ на всем интервале, где $F(x) = 0$ и $u(x) = +\infty$ в таких точках x, где $F(x) = 1$.

Если распределение нормально, то

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = N\left(\frac{x-a}{\sigma};\ 0,\ 1\right).$$

Следовательно, в этом и только в этом случае функция $u(x)$ линейна:

$$u = \frac{x-a}{\sigma}.$$

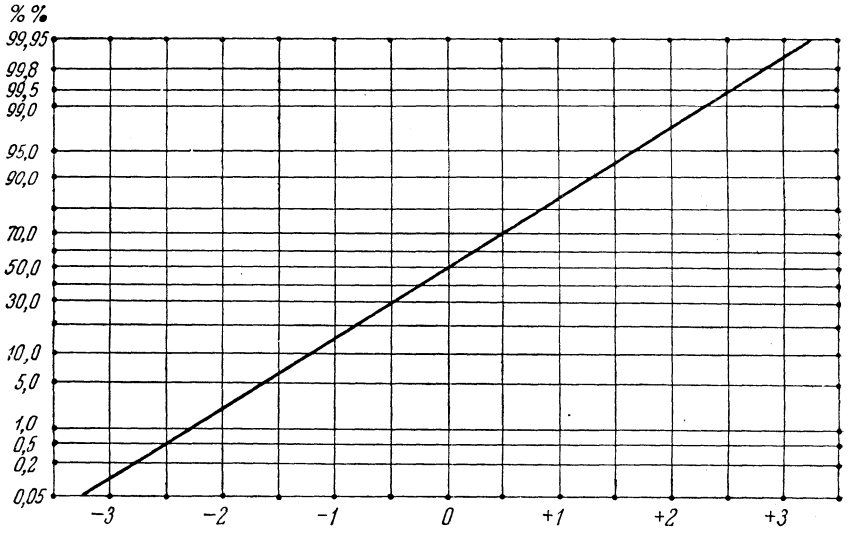
На плоскости (x, u) функция $u(x)$ изобразится в этом случае прямой, проходящей через точку $(a; 0)$ и имеющей угловой коэффициент $\frac{1}{\sigma}$.

Предположим теперь, что мы имеем в распоряжении s точек $(x_1; F_1)$, $(x_2; F_2)$, ..., $(x_s; F_s)$, где $F_1, F_2, \ldots, F_s$ — значения неизвестной функции распределения $F(x)$ в точках $x_1, x_2, \ldots, x_s$. Для того чтобы проверить, принадлежит ли $F(x)$ к нормальному типу, мы можем для каждого F_i определить соответствующее значение функции $u(x_i) = u_i$, пользуясь уравнением

$$F_i = N[u(x_i)],$$

и затем построить точки $(x_i; u_i)$ плоскости $(x; u)$. Если эти точки окажутся лежащими на некоторой прямой, то гипотеза нормальности подтвердится.

Для упрощения процедуры вместо того, чтобы наносить точки $(x_i; u_i)$, иногда строят чертеж непосредственно, нанося точки $(x_i; F_i)$, но используя



Черт. 89. График нормальной функции распределения на «вероятностной бумаге».

при этом специальную сетку с функциональной шкалой, выбранной таким образом, что график нормального закона изображается в этой сети прямой линией (черт. 89) [1].

Заметим еще, что если мы знаем две пары значений $(x_1; u_1)$ и $(x_2; u_2)$, то a и σ могут быть найдены из уравнений

$$a + u_1\sigma = x_1,$$

$$a + u_2\sigma = x_2,$$

откуда

$$a = x_1 - u_1\sigma = x_2 - u_2\sigma \quad \text{и} \quad \sigma = \frac{x_1 - x_2}{u_1 - u_2}.$$

В случае, когда в нашем распоряжении имеются только выборочные данные, для проверки гипотезы мы используем вместо функции $F(x)$ ее эмпирическое приближение $\overline{F}(x)$. Эта последняя функция, как известно, представляет

[1] Здесь использован один из обычных приемов номографии (см., например, Д. Л. Гавр, Основы номографии с примерами из машиностроения, М.—Л., 1949).

лестничную (ступенчатую) кривую, которая в каждой точке $x = x_i$, представляющей один из членов вариационного ряда

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n,$$

скачком переходит от значения $\frac{i-1}{n}$ к значению $\frac{i}{n}$. Условно мы будем считать, что ее значение в данной точке равно:

$$\bar{F}(x_i) = \frac{i - \frac{1}{2}}{n} = \tilde{F}_i, \tag{6.6.1}$$

Определим теперь значение $\tilde{u}_i$ из уравнения $N(\tilde{u}_i) = \tilde{F}_i$ и рассмотрим множество точек $(x_i; \tilde{u}_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ плоскости $(x; u)$. Для большого n мы имеем право считать $\tilde{F}_i$ некоторой оценкой вероятности $F(x_i)$, и потому точки $(x_i; \tilde{u}_i)$ должны быть близки к соответствующим точкам $(x_i; u_i)$. Если последние точки лежат на одной прямой $u = \frac{x-a}{\sigma}$, то точки $(x_i; \tilde{u}_i)$ уклоняются от этой прямой только под действием случая.

Таким образом, приближенную прямолинейность в расположении точек $(x_i; \tilde{u}_i)$ и в этом случае можно считать признаком нормальности распределения генеральной совокупности. В качестве прямой, которая отвечает теоретическому нормальному закону, можно взять прямую

$$u = \frac{x - \bar{x}}{\bar{s}},$$

получаемую заменой параметров a и σ их оценками по выборке $\bar{x}$ и $\bar{s}$.

В качестве меры уклонения нормально распределенной $n(\tilde{u}_i; u_i, \sigma_{\tilde{u}_i})$ эмпирически наблюденной ординаты $\tilde{u}_i$ от теоретически рассчитываемой (в предположении нормального закона) величины

$$u_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\bar{s}} \tag{6.6.2}$$

можно использовать среднюю квадратическую:

$$\sigma_{\tilde{u}_i} \approx \frac{1}{g(u_i)} \sqrt{\frac{N(u_i)\,N(-u_i)}{n}} = \frac{1}{g(u_i)} \sqrt{\frac{[0{,}5 + \Phi(u_i)]\,[0{,}5 - \Phi(u_i)]}{n}}, \tag{6.6.3}$$

где $\Phi(u_i)$ — функция Лапласа, берущаяся по табл. IV приложений, и $g(u_i)$ — приближенное значение нормальной плотности, берущейся по табл. III приложений.

Эта формула обнаруживает, что точность приближения сильно уменьшается от центра распределения к концам его, что связано с быстрым приближением к нулю функции $g(u)$ при возрастании $|u|$. Следовательно, на краях распределения следует ожидать значительно худшего согласия между эмпирическими данными и вычисленными на основании гипотезы нормальности значениями функции u_i.

Оценка гипотезы нормальности производится с помощью сопоставления нормированных уклонений $\frac{\tilde{u}_i - u_i}{\sigma_{\tilde{u}_i}}$ с уклонениями, отвечающими при нормальном законе надлежащим образом выбранному уровню значимости (см. табл. VII приложений). Следует отметить, что этот прием в теоретическом отношении нуждается в ряде уточнений.

При проведении сравнения по описанному методу наибольшие затруднения представляет вычисление значений величины $\tilde{u}_i$. Для облегчения этой операции составлены специальные таблицы, в которых приводятся для данных значений p или $100p$ корни уравнения $p = N(u_p)$, т. е. квантили нормального распределения.

В табл. XXII приложений для аргумента $100p$ (от 0 до 99,99) табулированы значения $Z_p = u_p + 5$. Прибавление 5 дает возможность помещать в таблице только положительные значения Z_p,

При отсутствии таблиц квантилей нормального распределения значения $\tilde{u}_i$ можно найти по табл. IV функций Лапласа из уравнения

$$\Phi(\tilde{u}_i) = \tilde{F}_i - 0{,}5, \qquad (6.6.4)$$

где $\Phi(\tilde{u}_i)$ — функция Лапласа. Рассмотрим пример.

Пример 6.6.1. Пусть требуется произвести проверку гипотезы нормальности распределения обрабатываемых на токарном автомате валиков по выборке объема $n = 50$ (выборочные данные приводятся в графе 2 табл. 6.6.1), если $\bar{x} = 4{,}16$ *мк* и $\bar{s} = 9{,}81$ *мк*.

Производим сначала вычисления $\tilde{F}_i$, $\tilde{u}_i + 5$ и $u_i = \frac{x - \bar{x}}{\bar{s}}$ и сведем результаты их в табл. 6.6.1.

В этой таблице в графы 1 и 2 занесены исходные данные, расположенные в порядке возрастания x_i, т. е. вариационный ряд. В графе 3 проставляем квадраты значений x_i, необходимые для подсчета оценки $\bar{s} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\, s$ среднего квадратического отклонения. Данные для графы 4 — значения эмпирической функции распределения — подсчитываем по формуле (6.6.1), умножая результат на 100. Так, в частности,

$$\tilde{F}_1 = 100 \cdot \frac{1 - \frac{1}{2}}{50} = 1, \quad \tilde{F}_2 = 100 \cdot \frac{2 - \frac{1}{2}}{50} = 3 \text{ и т. д.}$$

В графе 5 проставляем данные из табл. XXII приложений, а в графе 6 — те же значения за вычетом 5. При отсутствии табл. XXII квантилей нормального распределения мы заполняем непосредственно графу 6, пользуясь табл. IV приложений и формулой (6.6.4).

Так, например, $\Phi(\tilde{u}_1) = 0{,}01 - 0{,}5 = -0{,}49$; по табл. IV приложений для значения $\Phi(0{,}49)$ находим $\tilde{u}_1 = -2{,}33$; $\Phi(\tilde{u}_{45}) = +0{,}89 - 0{,}5 = 0{,}39$, откуда по табл. IV $\tilde{u}_{45} = 1{,}23$.

Данные для графы 7 подсчитываем по формуле (6.6.2). Так, например,

$$u_1 = \frac{-20 - 4{,}16}{9{,}81} = -2{,}46, \quad u_{45} = \frac{17 - 4{,}16}{9{,}81} = 1{,}31$$

и т. д. В графе 8 проставляем абсолютную величину разности $|\tilde{u}_i - u_i|$. Так, например,

$$|\tilde{u}_1 - u_1| = |-2{,}33 - (-2{,}46)| = 0{,}13,$$

$$|\tilde{u}_{45} - u_{45}| = |1{,}23 - 1{,}31| = 0{,}08$$

и т. д.

Учитывая формулу (6.6.3), мы, просматривая графу 8, отмечаем такие отклонения $|\tilde{u}_i - u_i|$, относительные значения которых (в долях $\sigma_{\tilde{u}_i}$) являются наибольшими.

Такими отклонениями оказались отклонения $\tilde{u}_{15}$, $\tilde{u}_{23}$ и $\tilde{u}_{50}$. Для этих значений мы по формуле (6.6.3) подсчитываем оценки средних квадратических

Таблица 6.6.1

№ по пор. i	x_i	x_i^2	$100\frac{i-\frac{1}{2}}{n}=\overline{F}_i\cdot 100$	$\widetilde{u}_i+5$	$\widetilde{u}_i$	$u_i=\frac{x_i-\overline{x}}{s}$	$\lvert\widetilde{u}_i-u_i\rvert$	$\frac{\lvert\widetilde{u}_i-u_i\rvert}{\sigma_{\widetilde{u}_i}}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	—20,0	400	1	2,67	—2,33	—2,46	0,13	
2	—17,0	289	3	3,12	—1,88	—2,16	0,28	
3	—14,0	196	5	3,36	—1,64	—1,89	0,25	
4	—11,5	132,25	7	3,52	—1,48	—1,60	0,12	0,41
5	—10,5	110,25	9	3,66	—1,34	—1,49	0,15	
6	— 9,0	81	11	3,77	—1,23	—1,37	0,14	
7	—8,0	64	13	3,87	—1,13	—1,24	0,11	
8	—6,5	42,25	15	3,96	—1,04	—1,09	0,05	
9	—5,5	30,25	17	4,05	—0,95	—0,98	0,03	
10	—4,0	16	19	4,12	—0,88	—0,83	0,05	
11	—3,0	9	21	4,19	—0,81	—0,73	0,08	
12	—1,5	2,25	23	4,26	—0,74	—0,58	0,16	
13	—1,0	1	25	4,33	—0,67	—0,53	0,14	
14	0,0	0,0	27	4,39	—0,61	—0,42	0,19	
15	0,5	0,25	29	4,45	—0,55	—0,37	0,18	0,99
16	0,5	0,25	31	4,50	—0,50	—0,37	0,13	
17	1,0	1	33	4,56	—0,44	—0,32	0,12	
18	1,5	2,25	35	4,62	—0,38	—0,27	0,11	
19	2,0	4	37	4,67	—0,33	—0,22	0,11	
20	2,0	4	39	4,72	—0,28	—0,22	0,06	
21	2,5	6,25	41	4,77	—0,23	—0,17	0,06	
22	3,5	12,25	43	4,82	—0,18	—0,07	0,11	
23	4,0	16	45	4,87	—0,13	—0,016	0,11	0,62
24	4,0	16	47	4,92	—0,08	—0,016	0,06	
25	4,5	20,25	49	4,98	—0,02	0,035	0,05	
26	5,0	25	51	5,02	0,02	0,09	0,07	
27	5,0	25	53	5,08	0,08	0,09	0,01	
28	6,0	36	55	5,13	0,13	0,19	0,06	
29	6,5	42,25	57	5,18	0,18	0,24	0,06	
30	7,0	49	59	5,23	0,23	0,29	0,06	
31	7,0	49	61	5,28	0,28	0,29	0,01	
32	7,5	56,25	63	5,33	0,33	0,34	0,01	
33	7,5	56,25	65	5,38	0,38	0,34	0,04	
34	8,5	72,25	67	5,44	0,44	0,44	0,00	
35	8,5	72,25	69	5,50	0,50	0,44	0,06	
36	9,5	90,25	71	5,55	0,55	0,54	0,01	
37	10,0	100	73	5,61	0,61	0,60	0,01	
38	10,5	110,25	75	5,67	0,67	0,65	0,02	
39	11,0	121	77	5,74	0,74	0,70	0,04	
40	12,0	144	79	5,81	0,81	0,80	0,01	
41	12,5	156,25	81	5,88	0,88	0,85	0,03	
42	13,0	169	83	5,95	0,95	0,90	0,05	
43	14,0	196	85	6,04	1,04	1,00	0,04	
44	14,5	210,25	87	6,13	1,13	1,05	0,08	
45	17,0	289	89	6,23	1,23	1,31	0,08	
46	18,0	324	91	6,34	1,34	1,41	0,07	
47	19,0	361	93	6,48	1,48	1,51	0,03	
48	19,5	380,25	95	6,64	1,64	1,56	0,08	
49	21,0	441	97	6,88	1,88	1,72	0,16	
50	23,5	552,25	99	7,33	2,33	1,97	0,36	0,95
Сумма	208,0	5583,5						

отклонений и в графе 9 проставляем относительные значения полученных нами отклонений. Так, например,

$$\sigma_{\widetilde{u}_{50}}\approx\frac{1}{0{,}0573}\sqrt{\frac{(0{,}5+0{,}4756)\cdot(0{,}5-0{,}4756)}{50}}=0{,}381;$$

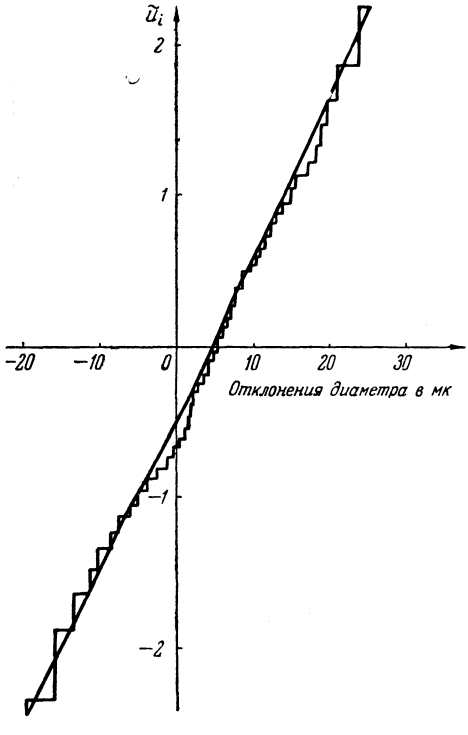
здесь 0,0573 представляет значение (взятое по табл. III приложений) нормальной плотности, отвечающее $u_{50} = 1{,}97$, а 0,4756 есть значение функции Лапласа (взятое по табл. IV приложений), отвечающее тому же значению $u_{\cdot} = +1{,}97$;

$$\sigma_{\tilde{u}_{23}} = \frac{1}{0{,}3989}\sqrt{\frac{(0{,}5-0{,}0064)\cdot(0{,}5+0{,}0064)}{50}} = 0{,}177;$$

отсюда относительные отклонения будут равны:

$$\frac{|\tilde{u}_{50}-u_{50}|}{\sigma_{\tilde{u}_4}} = \frac{0{,}36}{0{,}381} = 0{,}95, \quad \frac{|\tilde{u}_{23}-u_{23}|}{\sigma_{\tilde{u}_{23}}} = \frac{0{,}11}{0{,}177} = 0{,}62.$$

Для наглядности построим выпрямленную диаграмму для нашего случая, совмещенную с теоретической наклонной прямой (черт. 90). Здесь ординаты ступенчатой кривой представляют значения $\tilde{u}_i$, приведенные в графе 6 вышеупомянутой таблицы. Абсциссами являются отклонения диаметра в микронах. Теоретическая прямая проведена через точку (4,16; —0) с угловым коэффициентом $\frac{1}{9{,}81} = 0{,}102$.



Черт. 90. Выпрямленная диаграмма распределения 50 валиков по наружным диаметрам.

Напомним, что $\bar{x} = 4{,}16$ и $\bar{s} = 9{,}81$.

Мы видим, что самое большое относительное отклонение, проставленное в графе 8, не превышает 0,99, а это значит (см. табл. VIII приложений), что при уровне значимости 0,05, 0,10 и даже 0,15 полученные нами отклонения могут вполне оказаться случайными. Таким образом, мы приходим к заключению, что гипотеза нормальности в нашем примере не противоречит выборочным данным.

Мы рассматривали до сих пор случай, когда сравнению с теоретической прямой подвергаются несгруппированные по интервалам данные. Когда же мы располагаем данными, сведенными в интервалы (разряды), или же сами прибегаем к группировке в силу большого числа наблюдений, то операцию проверки гипотезы нормальности проводим в следующем порядке.

Отмечаем правые границы интервалов $t_i + \frac{\Delta t}{2}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ и подсчитываем накопленные частости H_i по последовательным интервалам. Каждой точке $t_i + \frac{\Delta t}{2}$ ставим в соответствие надлежащие частости

$$H_i = \sum_{j \leqslant i} \frac{h_j}{n}, \tag{6.6.5}$$

а затем для каждой частости H_i определяем соответствующий $\tilde{u}_i$ (или $\tilde{u}_i + 5$), определяя их из уравнения

$$\Phi(\tilde{u}_i) = H_i - 0{,}5, \tag{6.6.6}$$

аналогично уравнению (6.6.4).

В остальной части процедура проверки гипотезы остается прежней.

Рассмотрим еще один пример.

Пример 6.6.2. Пусть требуется проверить гипотезу нормальности по сгруппированным в интервалы данным примера 5.2.2, если известно, что $\bar{x} = 4{,}3$ *мк* и $\bar{s} = 9{,}73$ *мк*.

Пользуясь уже полученными в примерах 5.2.2, 5.2.6 и 6.4.2 результатами, составляем нижеследующую таблицу (табл. 6.6.2):

Таблица 6.6.2

№ интервалов по порядку	Границы интервалов	Частоты в интервалах ν_i	Накопления частости H_i	$\tilde{u}_i$	$u_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\bar{s}}$	$\lvert \tilde{u}_i - u_i \rvert$	$\frac{\lvert \tilde{u}_i - u_i \rvert}{\sigma_{\tilde{u}_i}}$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	$-\infty \div -15$	7	0,035	$-1{,}81$	$-1{,}98$	0,17	0,89
2	$-15 \div -10$	11	0,090	$-1{,}34$	$-1{,}47$	0,10	
3	$-10 \div -5$	15	0,165	$-0{,}97$	$-0{,}96$	0,01	
4	$-5 \div 0$	24	0,285	$-0{,}57$	$-0{,}44$	0,13	1,41
5	$0 \div 5$	49	0,530	0,08	0,07	0,01	
6	$5 \div 10$	41	0,735	0,63	0,59	0,04	
7	$10 \div 15$	26	0,865	1,10	1,10	0,00	
8	$15 \div 20$	17	0,950	1,64	1,61	0,03	
9	$20 \div 25$	7	0,985	2,17	2,13	0,04	
10	$25 \div \infty$	3	1,000	$+\infty$	2,64		
Σ		200					

В этой таблице в графах 1, 2 и 3 проставлены данные, взятые из таблицы примера 6.4.2. В графу 4 заносим накопленные частости, подсчитанные по формуле (6.6.5). Так, например,

$$H_3 = \frac{7 + 11 + 15}{200} = 0{,}165.$$

В графу 5 заносим нормальные уклонения $\tilde{u}_i$, отвечающие накопленным частостям H_i и подсчитываемые по формуле (6.6.6). Так, например,

$$\Phi(\tilde{u}_3) = 0{,}165 - 0{,}5 = -0{,}335,$$

откуда по табл. IV приложений находим, что $\tilde{u}_3 = -0{,}97$. В графу 6 заносим нормальные уклонения u_i, отвечающие концам интервалов, вычисляемые по формуле (6.6.2). Так, например,

$$u_3 = \frac{-5 - 4{,}3}{9{,}73} = -0{,}96.$$

В графу 7 заносим абсолютные значения уклонений $\lvert \tilde{u}_i - u_i \rvert$. Просматривая графу 7 и учитывая формулу (6.6.3), замечаем, что наибольшие относительные значения абсолютных уклонений отвечают интервалам 1 и 4. Вычисляем для этих интервалов $\sigma_{\tilde{u}_i}$ по формуле (6.6.3):

$$\sigma_{\tilde{u}_1} = \frac{1}{0{,}0562}\sqrt{\frac{(0{,}5 - 0{,}4761)\cdot(0{,}5 + 0{,}4761)}{200}} = 0{,}19,$$

$$\sigma_{\tilde{u}_4} = \frac{1}{0{,}3621}\sqrt{\frac{(0{,}5 - 0{,}17)\cdot(0{,}5 + 0{,}17)}{200}} = 0{,}092.$$

Определяем теперь относительные величины полученных нами уклонений:

$$\frac{|\tilde{u}_1 - u_1|}{\sigma_{\tilde{u}_1}} = \frac{0{,}17}{0{,}19} = 0{,}89,$$

$$\frac{|\tilde{u}_4 - u_4|}{\sigma_{\tilde{u}_4}} = \frac{0{,}13}{0{,}092} = 1{,}41.$$

Пользуясь табл. VII приложений, легко установить, что наибольшее из этих уклонений отвечает вероятности $p = 0{,}8214$. Таким образом, с уровнем значимости, бо́льшим 0,05 и даже бо́льшим 0,075, мы заключаем, что гипотеза нормальности распределения в нашем примере не противоречит данным наблюдения.

6.6.2. Проверка гипотезы нормальности по совокупности малых выборок. Мы рассматривали вопрос о соответствии данных выборки нормальному распределению, предполагая его полностью определенным, т. е. с определенными значениями параметров. В некоторых случаях на практике вопрос о принадлежности данной совокупности к нормальному типу ставится в другой форме.

Допустим, что мы имеем достаточно большое число выборок, независимых между собой и одного и того же объема. Мы хотим проверить гипотезу нормальности генеральных совокупностей, из которых взяты эти выборки, не предполагая, что параметры этих совокупностей имеют тождественное значение во всех выборках без исключения. Другими словами, мы предполагаем устойчивой лишь форму распределения, а именно предполагаем ее нормальной, не делая никаких допущений относительно центров и дисперсий генеральных совокупностей. В данном случае проверка нашей гипотезы может быть основана на следующем интересном факте.

Рассмотрим уклонение

$$\tau = \frac{x_i^{(j)} - \overline{x}^{(j)}}{\overline{s}^{(j)}} \tag{6.6.7}$$

какого-либо наудачу взятого наблюдения $x_i^{(j)}$ j-й выборки от соответствующей средней арифметической $\overline{x}^{(j)}$, нормированного оценкой $\overline{s}^{(j)}$ среднего квадратического отклонения по той же выборке. Оказывается, что распределение величины τ не зависит совсем от параметров нормальной совокупности, а только от объема n выборки.

Плотность величины τ [1]) равна:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_\tau(x) &= \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{(n-1)\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\left(1 - \frac{x^2}{n-1}\right)^{\frac{n-4}{2}} && \text{при } |x| < \sqrt{n-1}, \\ \varphi_\tau(x) &= 0 && \text{при } |x| \geqslant \sqrt{n-1}. \end{aligned}\right\} \tag{6.6.8}$$

Отсюда следует, например, при $n = 4$, что распределение эмпирических уклонений в выборках по 4 единицы имеет равномерное распределение, если исходные совокупности нормальны, хотя, быть может, имеют разные центры и дисперсии. Этим обстоятельством можно воспользоваться для проверки нашей гипотезы, когда число выборок достаточно велико.

При $n \neq 4$ плотность величины τ не будет удобной для пользования при проверке гипотезы нормальности ввиду отсутствия надлежащих таблиц. Поэтому в этих случаях приходится переходить от нее к величине

$$\eta = \frac{\tau\sqrt{n-2}}{\sqrt{n-1-\tau^2}}. \tag{6.6.9}$$

Можно доказать, что величина η при нормальных исходных распределениях следует закону (5.4.33) Стьюдента с $n-2$ степенями свободы, различные данные для которого приводятся в табл. XVI, XVII и XVIII приложений.

Пользование величиной (6.6.9) делает процедуру проверки значительно более громоздкой, в силу чего следовало бы табулировать значения F_i по формуле (6.6.8) при различных значениях n.

После перехода к величинам τ или η задача проверки гипотезы нормальности приобретает непараметрический характер, ввиду чего для ее решения естественно воспользоваться законом распределения Колмогорова. Следует, однако, иметь в виду, что при нахождении значений λ в этом случае можно пользоваться краткой табличкой, приведен-

[1]) См. Г. Крамер, Математические методы статистики, стр. 426.

ной в 5.4.9 только при числе выборок $m \geqslant 40$; при меньшем же числе выборок следует применять более подробную табл. XXIII приложений.

Процедура проверки гипотезы по большому числу малых выборок сводится к следующему.

Из каждой выборки берем наудачу по одному значению. Если выборки представляют, например, временные «пробы», взятые из текущей продукции станка, то можно из каждой пробы взять по одному, первому (или последнему) по времени порядковому наблюдению. Порядок отбора здесь не играет существенной роли; важно лишь то, чтобы отбор одного наблюдения из данной пробы производился без какого бы то ни было учета значения $x_i^{(j)}$ данного i-го наблюдения j-й пробы. Если в каждой выборке число наблюдений (оно должно быть одинаковым для всех данных выборок) велико, например более 10, то может быть сделана не одна, а две или даже три (при больших n_j) самостоятельных проверки гипотезы, например, по первым и по последним экземплярам каждой пробы.

Далее, если $n = 4$, для каждого отобранного значения вычисляется по формуле (6.6.7) показатель τ; если же $n \neq 4$, то вычисляется по формуле (6.6.9) показатель η. Потом полученные значения τ или η располагаются в вариационный ряд и для каждого значения подсчитывается эмпирическая функция $\bar{F}_j$ распределения по формуле (6.6.1). Для каждой из этих точек вычисляется, кроме того, теоретическая функция распределения F_j, причем при $n = 4$ для этого используется закон (3.1.15) равной вероятности, а при $n \neq 4$ — таблицы закона (5.4.33) распределения Стьюдента.

Сравнивая $\bar{F}_j$ с F_j, мы находим величину наибольшей разности

$$D_m = \max |\bar{F}_j - F_j|.$$

Теперь для уровня значимости $q = 1 - \alpha$ критическая область для проверки нашей гипотезы определится неравенством

$$D_m > \frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{m}}, \qquad (6.6.10)$$

где m — число выборок.

Попадание наблюденного значения D_m в критическую область следует рассматривать как несогласие проверяемой гипотезы с данными опыта, и гипотезу в этом случае полагается **браковать**.

Пример 6.6.3. Пусть мы имеем 40 «проб» по 4 штамповки в каждой из текущей продукции горизонтально-ковочной машины, причем мы не можем быть уверенными, что центр рассеивания и дисперсия за период отбора всех 40 «проб» оставались постоянными. Требуется проверить гипотезу о том, что распределение штамповок по высоте *по своей форме* является нормальным. Берем из каждой пробы по одной штамповке (первую по времени изготовления) и вычисляем для каждого из 40 значений показатель τ. Результаты вычислений сводим в табл. 6.6.3.

Таблица 6.6.3

№ проб в порядке отбора	Наблюденные значения в порядке произведенных наблюдений				$\bar{x}$	$\bar{s}$	$x_1 - \bar{x}$	$\tau = \frac{x_1 - \bar{x}}{\bar{s}}$
	x_1	x_2	x_3	x_4				
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0,55	0,13	0,21	—0,20	0,172	0,308	0,378	1,23
2	0,98	0,52	0,10	0,42	0,505	0,364	0,475	1,30
3	0,68	—0,13	0,42	0,29	0,315	0,338	0,365	1,08
4	0,18	0,72	0,32	0,27	0,372	0,240	—0,192	—0,800
5	0,24	0,08	—0,68	0,21	—0,038	0,433	0,278	0,642
6	0,43	0,26	0,86	0,78	0,582	0,286	—0,152	—0,531
7	0,19	0,97	0,73	0,63	0,630	0,326	—0,440	—1,35
8	—0,21	0,07	0,82	1,03	0,428	0,591	—0,638	—1,08
9	0,02	—0,91	1,17	0,59	0,218	0,886	—0,198	—0,223
10	0,00	—0,30	0,56	0,51	0,192	0,415	—0,192	—0,463
11	0,23	0,04	—0,14	0,29	0,105	0,195	0,125	0,641
12	0,03	0,32	0,49	0,04	0,220	0,225	—0,190	—0,844
13	0,69	—0,99	0,27	0,23	0,050	0,726	0,640	0,882
14	0,04	0,41	0,01	—0,18	0,070	0,247	—0,030	—0,121
15	0,64	0,06	0,35	—0,11	0,235	0,330	0,405	1,23
16	0,57	0,31	0,26	0,20	0,335	0,163	0,235	1,44

Продолжение

№ проб в порядке отбора	Наблюденные значения в порядке произведенных наблюдений				$\bar{x}$	$\bar{s}$	$x_1 - \bar{x}$	$\tau = \frac{x_1 - \bar{x}}{\bar{s}}$
	x_1	x_2	x_3	x_4				
1	2	3	4	5	6	7	8	9
17	— 0,19	0,38	0,58	0,18	0,238	0,328	— 0,428	— 1,30
18	0,35	0,27	0,24	0,18	0,260	0,071	0,090	1,27
19	0,11	0,54	0,01	0,23	0,222	0,231	— 0,112	— 0,485
20	0,43	0,77	0,28	0,39	0,468	0,210	— 0,038	— 0,181
21	0,11	0,01	— 0,12	0,10	0,025	0,107	0,085	0,794
22	0,54	0,31	— 0,18	— 0,36	0,078	0,418	0,462	1,11
23	0,36	— 1,31	— 1,31	— 0,21	— 0,618	0,832	0,978	1,18
24	0,16	— 0,38	0,68	— 0,07	0,098	0,447	0,062	0,139
25	0,90	1,58	0,65	1,36	1,122	0,436	— 0,222	— 0,509
26	1,57	0,82	1,65	1,63	1,418	0,397	0,152	0,383
27	1,35	1,81	1,13	1,41	1,425	0,283	— 0,075	— 0,265
28	1,19	1,13	1,08	1,35	1,188	0,110	0,002	0,018
29	0,87	1,46	1,18	1,54	1,262	0,306	— 0,392	— 1,28
30	0,92	1,42	1,14	1,49	1,242	0,266	— 0,322	— 1,21
31	0,92	1,36	1,43	1,04	1,188	0,243	— 0,268	— 1,10
32	0,02	0,64	0,08	— 0,40	0,085	0,427	— 0,065	— 0,152
33	0,66	— 0,26	0,63	— 0,09	0,235	0,479	0,425	0,887
34	— 0,12	0,40	0,40	0,75	0,358	0,358	— 0,478	— 1,33
35	0,05	— 0,05	0,20	0,40	0,150	0,196	— 0,100	— 0,510
36	0,90	— 0,18	— 0,22	0,36	0,215	0,528	0,685	1,30
37	— 0,35	0,43	0,42	0,05	0,138	0,370	— 0,488	— 1,32
38	0,64	0,95	0,25	0,71	0,638	0,289	0,002	0,007
39	0,32	0,79	0,40	0,66	0,542	0,219	— 0,222	— 1,01
40	1,40	0,30	0,27	0,60	0,642	0,527	0,758	1,44

В графы 1, 2, 3, 4 и 5 этой таблицы внесены данные о 40 «пробах» по 4 штамповки каждая, причем в графах 2—5 записаны отклонения в миллиметрах высоты штамповок (расположенных в каждой из проб в порядке изготовления) от среднего допускаемого размера. В графах 6 и 7 записаны средние арифметические $\bar{x}$ и оценки $\bar{s}$ средних квадратических отклонений по пробам, вычисленные согласно (5.3.61). В графе 9 указаны значения показателя τ, вычисленные по первому из наблюденных значений каждой пробы по формуле (6.6.7).

Так, например, для первой пробы получим:

$$\tau_1 = \frac{0{,}55 - 0{,}172}{0{,}308} = 1{,}23.$$

Далее, полученные значения τ располагаем в вариационный ряд и вычисляем для каждой точки значение эмпирической функции распределения $\bar{F}_j$ и теоретической функции F_j, с целью нахождения наибольшей по абсолютной величине разности между последними.

Наши вычисления сводим в табл. 6.6.4.

Таблица 6.6.4

№ в порядке возрастания	τ_j	$\bar{F}_j$	F_j	$\lvert \bar{F}_j - F_j \rvert$	№ в порядке возрастания	τ_j	$\bar{F}_j$	F_j	$\lvert \bar{F}_j - F_j \rvert$
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1	— 1,35	0,012	0,110	0,098	6	— 1,21	0,138	0,115	0,023
2	— 1,33	0,038	0,116	0,078	7	— 1,10	0,162	0,182	0,020
3	— 1,32	0,062	0,119	0,057	8	— 1,08	0,188	0,188	0,000
4	— 1,30	0,088	0,124	0,036	9	— 1,01	0,212	0,208	0,004
5	— 1,28	0,112	0,130	0,018	10	— 0,844	0,238	0,256	0,018

Продолжение

№ в порядке возрастания	τ_j	$\bar{F}_j$	F_j	$\lvert\bar{F}_j - F_j\rvert$	№ в порядке возрастания	τ_j	$\bar{F}_j$	F_j	$\lvert\bar{F}_j - F_j\rvert$
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
11	— 0,800	0,262	0,269	0,007	26	0,641	0,638	0,685	0,047
12	— 0,531	0,288	0,347	0,059	27	0,642	0,662	0,686	0,024
13	— 0,510	0,312	0,353	0,041	28	0,794	0,688	0,729	0,041
14	— 0,509	0,338	0,353	0,015	29	0,882	0,712	0,755	0,043
15	— 0,485	0,362	0,360	0,002	30	0,887	0,738	0,756	0,018
16	— 0,463	0,388	0,366	0,022	31	1,08	0,762	0,812	0,050
17	— 0,265	0,412	0,423	0,011	32	1,11	0,788	0,821	0,033
18	— 0,223	0,438	0,436	0,002	33	1,18	0,812	0,841	0,029
19	— 0,181	0,462	0,448	0,014	34	1,23	0,838	0,855	0,017
20	— 0,152	0,488	0,456	0,032	35	1,23	0,862	0,855	0,007
21	— 0,121	0,512	0,465	0,047	36	1,27	0,888	0,867	0,021
22	+ 0,007	0,538	0,502	0,036	37	1,30	0,912	0,876	0,036
23	0,018	0,562	0,505	0,057	38	1,30	0,938	0,876	0,062
24	0,139	0,588	0,540	0,048	39	1,44	0,962	0,916	0,046
25	0,383	0,612	0,611	0,001	40	1,44	0,988	0,916	0,072

В графе 2 этой таблицы мы расположили вычисленные с помощью предыдущей таблицы показатели τ для каждой пробы в порядке возрастания их значений так, что если для первой пробы $\tau_1 = 1{,}23$, то теперь это значение оказалось на тридцать четвертом месте, а на первое место мы поместили $\tau_7 = -1{,}350$, получившееся в седьмой по порядку отбора пробе. В графе 3 мы поместили значения эмпирической функции распределения, полученные по формуле (6.6.1). Так, например, для 34-го по порядку значения мы имеем:

$$\bar{F}_{34} = \frac{34 - \frac{1}{2}}{40} = 0{,}838.$$

В графу 4 мы внесли теоретические значения функции распределения F_j для соответствующих значений величины τ, распределенной, как мы уже говорили, по закону равной вероятности. Из формулы (6.6.8) следует, что при $n = 4$

$$\varphi_\tau(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{3\pi}\,\Gamma(1)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \approx 0{,}289$$

при $|x| < \sqrt{3}$.

К такому же результату мы пришли бы, если бы воспользовались формулами (3.4.10) и (3.1.15). Так как

$$F_i = \int_{-\sqrt{3}}^{\tau_i} \varphi_\tau(x)\,dx = [\tau - (-\sqrt{3})] \cdot 0{,}289,$$

то при $\tau = -1{,}35$ мы имеем:

$$F_1 = [-1{,}35 - (-\sqrt{3})] \cdot 0{,}289 = 0{,}38 \cdot 0{,}289 = 0{,}110,$$

а для $\tau = 1{,}23$:

$$F_{34} = (1{,}23 + \sqrt{3}) \cdot 0{,}289 = 2{,}96 \cdot 0{,}289 = 0{,}855.$$

В графу 5 мы занесли абсолютную величину разности между $\bar{F}_j$ и F_j.

Просматривая графу 5 последней таблицы, мы обнаруживаем, что максимальное абсолютное значение разности отвечает 1-му по порядку значению $\tau_1 = -1{,}35$.

Выбирая 5%-ный уровень значимости, мы строим критическую область, пользуясь краткой табл. 5.4.4, приведенной в **5.4.9.** Критическая область будет в нашем случае определяться неравенством $D_{40} > \frac{\lambda_5}{40} = \frac{1{,}358}{6{,}325} = 0{,}215$.

Полученное нами в наблюдениях значение $D_{40} = 0{,}098$ располагается в области допустимых значений, причем значительно левее критического предела.

Отсюда следует, что гипотеза нормальности распределения штамповок по высоте не противоречит данным наблюдения.

Пример 6.6.4. Пусть теперь мы располагаем данными об отклонениях высоты штамповок от среднего допускаемого размера по 40 «пробам» *численностью в 20 штук каждая*, отобранным из текущей продукции горизонтально-ковочной машины. Требуется проверить гипотезу нормальности распределения штамповок, получаемых на данной машине, по высоте. В этом случае мы благодаря значительному объему проб можем сделать по крайней мере три более или менее независимые самостоятельные проверки, например, по первому, десятому и двадцатому экземплярам каждой пробы. Здесь мы ограничимся одной из трех взаимоконтролирующихся проверок, и именно проверкой по десятым экземплярам каждой пробы, но заметим, что трехкратная проверка дает нам весьма высокую, практически 100%-ную, уверенность в результатах проверки в случае их совпадения по сравнению с надежностью однократной проверки, определяющейся, вообще говоря, величиной уровня значимости. Мы ведем наши вычисления совершенно так же, как и в примере 6.6.3, т. е. строим сначала таблицу для подсчета величин τ, но ее мы дополняем еще графами, нужными для подсчета показателя η (табл. 6.6.5).

Таблица 6.6.5

№ проб по порядку отбора	x_{10}	$\bar{x}$	$\bar{s}$	$x_{10}-\bar{x}$	$\tau=\frac{x_{10}-\bar{x}}{\bar{s}}$	$\tau\sqrt{n-2}$	τ^2	$n-1-\tau^2$	$\sqrt{n-1-\tau^2}$	$\eta=\frac{\tau\sqrt{n-2}}{\sqrt{n-1-\tau^2}}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	48	32	24	16	0,667	2,83	0,44	18,56	4,31	0,657
2	82	52	38	30	0,789	3,35	0,62	18,38	4,29	0,781
3	95	45	40	50	1,250	5,30	1,56	17,44	4,18	1,268
4	— 19	34	32	—53	— 1,656	— 7,02	2,74	16,26	4,03	— 1,742
5	49	24	37	25	0,676	2,87	0,46	18,54	4,31	0,666
6	43	44	31	—1	— 0,032	— 0,14	0,00	19,00	4,36	— 0,032
7	33	42	31	—9	— 0,290	— 1,23	0,08	18,92	4,35	— 0,283
8	32	43	34	—11	— 0,324	— 1,37	0,10	18,90	4,35	— 0,315
9	11	9	42	2	0,048	0,20	0,00	19,00	4,36	0,046
10	56	21	30	35	1,167	4,95	1,36	17,64	4,20	1,179
11	3	—7	35	10	0,286	1,21	0,08	18,92	4,35	0,278
12	— 39	18	45	—57	— 1,267	— 5,37	1,61	17,39	4,17	— 1,288
13	49	16	38	33	0,868	3,68	0,75	18,25	4,27	0,862
14	109	23	40	86	2,150	9,12	4,62	14,38	3,79	2,406
15	24	6	39	18	0,462	1,96	0,21	18,79	4,33	0,453
16	—118	11	46	—129	— 2,804	— 11,89	7,86	11,14	3,34	— 3,560
17	47	2	32	45	1,406	5,96	1,98	17,02	4,13	1,443
18	45	24	31	21	0,677	2,87	0,46	18,54	4,31	0,666
19	28	25	34	3	0,088	0,37	0,01	18,99	4,36	0,085
20	— 2	19	32	—21	— 0,656	— 2,78	0,43	18,57	4,31	— 0,645
21	14	12	39	2	0,051	0,22	0,00	19,00	4,36	0,050
22	12	8	32	4	0,125	0,53	0,02	18,98	4,36	0,122
23	— 51	—3	52	—48	— 0,923	— 3,91	0,85	18,15	4,26	— 0,918
24	16	6	36	10	0,278	1,18	0,08	18,92	4,35	0,271
25	138	124	26	14	0,538	2,28	0,29	18,71	4,33	0,527
26	120	149	37	—29	— 0,784	— 3,32	0,61	18,39	4,29	— 0,774
27	120	129	41	— 9	— 0,220	— 0,93	0,05	18,95	4,35	— 0,214
28	104	120	26	—16	— 0,615	— 2,61	0,38	18,62	4,32	— 0,604
29	121	105	26	16	0,615	2,61	0,38	18,62	4,32	0,604
30	99	110	32	—11	— 0,344	— 1,46	0,12	18,88	4,35	— 0,336
31	123	105	37	18	0,486	2,06	0,24	18,76	4,33	0,476
32	9	23	24	—14	— 0,583	— 2,47	0,34	18,66	4,32	— 0,572
33	0	16	32	—16	— 0,500	— 2,12	0,25	18,75	4,33	— 0,490
34	15	23	29	—8	— 0,276	— 1,17	0,08	18,92	4,35	— 0,269
35	8	9	27	—1	— 0,037	— 0,16	0,00	19,00	4,36	— 0,037
36	25	38	35	—13	— 0,371	— 1,57	0,14	18,86	4,34	— 0,362
37	70	26	33	44	1,333	5,65	1,78	17,22	4,15	1,361
38	32	32	33	0	0	0	0	19,00	4,36	0
39	14	31	28	—17	— 0,607	— 2,57	0,37	18,63	4,32	— 0,595
40	55	15	37	40	1,081	4,58	1,17	17,83	4,22	1,085

В этой таблице графы 1—6 полностью совпадают с графами аналогичной таблицы примера 6.6.3. Графы же 7—11 предназначены исключительно для последовательного вычисления показателя η по формуле (6.6.9). Так, например, для первой по порядку пробы мы подсчитаем:

$$\eta_{11} = \frac{0{,}667\sqrt{20-2}}{\sqrt{20-1-0{,}667^2}} = \frac{2{,}83}{\sqrt{19-0{,}44}} = \frac{2{,}83}{\sqrt{18{,}56}} = \frac{2{,}83}{4{,}31} = 0{,}657.$$

Полученные теперь значения показателя η необходимо расположить в вариационный ряд, т. е. записать в порядке их возрастания. Затем нужно для каждой такой точки вычислить $\overline{F}_j$ и F_j и сравнить последние между собой.

Эти вычисления мы опять сводим в табл. 6.6.6.

Таблица 6.6.6

№ в порядке возрастания	η_j	$\overline{F}_j$	F_j	$\lvert\overline{F}_j - F_j\rvert$	№ в порядке возрастания	η_j	$\overline{F}_j$	F_j	$\lvert\overline{F}_j - F_j\rvert$
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1	—3,560	0,012	0,001	0,011	21	0,050	0,512	0,520	0,008
2	—1,742	0,038	0,050	0,012	22	0,085	0,538	0,533	0,005
3	—1,288	0,062	0,107	0,045	23	0,122	0,562	0,548	0,014
4	—0,918	0,088	0,186	0,098	24	0,271	0,588	0,605	0,017
5	—0,774	0,112	0,225	0,113	25	0,278	0,612	0,608	0,004
6	—0,645	0,138	0,264	0,126	26	0,453	0,638	0,672	0,034
7	—0,604	0,162	0,277	0,115	27	0,476	0,662	0,680	0,018
8	—0,595	0,188	0,280	0,092	28	0,527	0,688	0,697	0,009
9	—0,572	0,212	0,287	0,075	29	0,604	0,712	0,723	0,011
10	—0,490	0,238	0,315	0,077	30	0,657	0,738	0,740	0,002
11	—0,362	0,262	0,361	0,099	31	0,666	0,762	0,743	0,019
12	—0,336	0,288	0,371	0,083	32	0,666	0,788	0,743	0,045
13	—0,315	0,312	0,378	0,060	33	0,781	0,812	0,777	0,035
14	—0,283	0,338	0,390	0,052	34	0,862	0,838	0,800	0,038
15	—0,269	0,362	0,396	0,034	35	1,085	0,862	0,854	0,008
16	—0,214	0,388	0,417	0,029	36	1,179	0,888	0,873	0,015
17	—0,037	0,412	0,486	0,074	37	1,268	0,912	0,889	0,023
18	—0,032	0,438	0,488	0,050	38	1,361	0,938	0,905	0,033
19	0,000	0,462	0,500	0,038	39	1,443	0,962	0,917	0,045
20	0,046	0,488	0,518	0,030	40	2,406	0,988	0,986	0,002

В этой таблице графы 1—3 заполнены совершенно так же, как в аналогичной таблице примера 6.6.3. В графу 4 внесены значения функции распределения $S_k(t)$ Стьюдента, подсчитанные для соответствующих точек величины η при числе степеней свободы $k = 20 - 2 = 18$ с помощью табл. XVI приложений. Так, например, для $\eta_2 = -1{,}742$ мы находим значение функции F_j следующим образом. Из табл. XVI приложений при $k = 18$ для $t = 1{,}742$, интерполируя, получаем:

$$S_{18}(1{,}742) = 0{,}947 + \frac{0{,}956 - 0{,}947}{0{,}10} \cdot 0{,}042 = 0{,}950,$$

откуда

$$S_{18}(-1{,}742) = 1 - 0{,}950 = 0{,}050.$$

Для $\eta_{35} = 1{,}085$ из табл. XVI приложений получаем:

$$S_{18}(1{,}085) = 0{,}857 - \frac{0{,}857 - 0{,}835}{0{,}10} \cdot 0{,}015 = 0{,}854.$$

Вычисления были бы удобнее при наличии более подробной таблицы значений функции $S_k(t)$.

Просматривая графу 5 составленной нами таблицы, замечаем, что максимальная абсолютная величина разности $\lvert\overline{F}_j - F_j\rvert$ в данном случае равна $D_m = 0{,}126$ при значении $\eta_6 = -0{,}645$.

Критический предел для проверки гипотезы нормальности в данном случае при 5%-ном уровне значимости будет тот же, что и в примере 6.6.3, а именно:

$$\frac{\lambda_5}{\sqrt{40}} = 0{,}215.$$

Полученное нами значение $D_{40} = 0{,}126$ и в этом случае лежит левее критического предела, что указывает на соответствие произведенным наблюдениям гипотезы нормальности распределения штамповок по высоте.

6.6.3. Приближенная проверка гипотезы нормальности с помощью асимметрии и эксцесса. Для приближенной проверки гипотезы нормальности могут быть использованы эмпирические асимметрия $\overline{S}_k$ (5.2.26) и эксцесс $\overline{E}_k$ (5.2.27). Хотя по ним не представляется возможным сколько-нибудь просто построить доверительные интервалы для теоретических асимметрии S_k (4.3.72) и эксцесса E_k (4.3.73), но степень их точности может быть приближенно оценена по их средним квадратическим отклонениям:

$$\sigma_{\overline{S}_k} = \sqrt{\frac{6(n-1)}{(n+1)(n+3)}}, \quad \sigma_{\overline{E}_k} = \sqrt{\frac{24 \cdot n(n-2)(n-3)}{(n-1)^2(n+3)(n+5)}}, \qquad (6.6.11)$$

где n — объем выборки.

Большие по сравнению с $\sigma_{\overline{S}_k}$ и $\sigma_{\overline{E}_k}$ значения $\overline{S}_k$ и $\overline{E}_k$, полученные из наблюдений, могут служить основаниями для браковки гипотезы нормальности исследуемого распределения.

Пусть, например, требуется проверить гипотезу нормальности по данным примера 5.2.6. Имеем $\overline{S}_k = -0{,}12$, $\overline{E}_k = -0{,}15$ и по (6.6.11)

$$\sigma_{\overline{S}_k} = \sqrt{\frac{6(200-1)}{(200+1)(200+3)}} \approx 0{,}17, \quad \sigma_{\overline{E}_k} = \sqrt{\frac{24 \cdot 200(200-2)(200-3)}{(200-1)^2(200+3)(200+5)}} \approx 0{,}4.$$

Мы видим, что $\overline{S}_k$ и $\overline{E}_k$ невелики по сравнению с $\sigma_{\overline{S}_k}$ и $\sigma_{\overline{E}_k}$. Поэтому гипотезу нормальности нельзя считать противоречащей данным наблюдения.

§ 7. Понятие о мощности критерия проверки гипотезы

В начале этой главы мы изложили простейшие понятия, относящиеся к вопросу о проверке статистических гипотез: понятия критической области и уровня значимости в условиях данного приема испытания. В последующих параграфах мы рассмотрели ряд приемов проверки различных статистических гипотез, основанных на применении специально выбранных критериев, которым отвечали определенные критические области с заданным уровнем значимости. Мы строили эти критерии, исходя из соображений наглядности, но не приводя каких-либо общих теоретических соображений в пользу выбора одного из неограниченного числа возможных критериев. Заметим, что даже в том случае, когда выбрана и указана статистическая характеристика, с помощью которой строится данный критерий, оставался еще довольно значительный произвол в выборе критической области данного уровня значимости. Мы до сих пор не приводили основательных аргументов в пользу выбора той или иной области при проверке данной гипотезы. Мы попытаемся теперь хотя бы отчасти восполнить этот недостаток, вводя ряд новых важных понятий современной статистической теории и поставив самую задачу выбора доверительной области более определенно. Остановимся еще раз на рассмотренном нами в **6.1.1** и **6.2.1** приеме проверки по данным выборки гипотезы H_0 о том, что центр некоторой нормальной совокупности с известной дисперсией σ^2 совпадает с определенной точкой $a = a_0$. Выбрав уровень значимости $q = 5\%$, мы определяем допустимую область неравенством $\left|\frac{\bar{x}-a_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| < 1{,}96$ или $a_0 - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} < a_0 + 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ и соответственно этому

критическую область двумя неравенствами

$$\bar{x} > a_0 + 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{x} < a_0 - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \tag{6.7.1}$$

Если гипотеза H_0 верна и $\mathbf{M}X = a = a_0$, то попадание в критическую область (6.7.1) будет наблюдаться в среднем в 5% случаев повторения выборок, производимых в тех же основных условиях. В этом относительно малом проценте случаев мы сделаем ошибочное заключение о гипотезе или, как принято выражаться, допустим *ошибку «первого рода»* — забракуем правильную гипотезу $\mathbf{M}X = a_0$. Очевидно, контроль над ошибками этого рода находится в нашей власти: мы можем свести их к ничтожной доле, назначив надлежаще малый уровень значимости. Ясно, что таким же образом мы можем поступать в каждом случае проверки статистической гипотезы.

Но, проверяя гипотезу, мы можем сделать неправильное заключение и другого рода: в случае, когда a имеет на самом деле значение, отличное от a_0 ($a \neq a_0$), мы, проверяя гипотезу H_0, можем принять ее как справедливую потому, что характеристика, которую мы используем для критерия, случайно окажется в области допустимых значений. Эти ошибки, называемые *ошибками «второго рода»*, будут наблюдаться часто, если вероятность попадания рассматриваемой характеристики в критическую область будет невелика при $a \neq a_0$. Гипотеза $a \neq a_0$ называется *гипотезой, альтернативной к* H_0. В каждом данном случае множество возможных альтернативных гипотез, т. е. допущений, противоречащих проверяемой гипотезе H_0, определяется самой постановкой вопроса. Так, в случае сравнения продолжительности работы электрических лампочек в партии, изготовленной новым способом, со старой продолжительностью работы естественно предположить в качестве альтернативной гипотезы $a > a_0$, если есть основания считать, что новая технология во всяком случае не может ухудшить качества изделия. Разумный выбор критической области должен контролировать также и ошибки второго рода; очевидно, из двух критических областей (построенных с помощью одной и той же или разных характеристик — в нашем случае, например, при использовании вместо средней арифметической выборочной медианы и т. п.), отвечающих одному и тому же уровню значимости, та будет лучше, при которой вероятность ошибок второго рода будет меньше, т. е. которая лучше обеспечивает правильную браковку гипотезы H_0, когда на самом деле верна одна из альтернативных гипотез $a \neq a_0$. Назовем *мощностью критерия с данным уровнем значимости в отношении альтернативной гипотезы* $\mathbf{M}X = a$ величину вероятности $p(a)$ попадания используемого критерия в критическую область при этой гипотезе.

В рассмотренном случае мы имеем:

$$\frac{\bar{x} - a_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{x} - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + d, \quad \text{где} \quad d = \frac{a - a_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}.$$

Поэтому условная вероятность в предположении $\mathbf{M}X = a$ будет:

$$p(a) = \mathbf{P}_a\left(\left|\frac{\bar{x} - a_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| > 1{,}96\right) = \mathbf{P}_a\left(\left|\frac{\bar{x} - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + d\right| > 1{,}96\right) =$$

$$= \mathbf{P}_a\left(\frac{\bar{x} - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > 1{,}96 - d\right) + \mathbf{P}_a\left(\frac{\bar{x} - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < -1{,}96 - d\right) =$$

$$= 1 - \Phi(1{,}96 - d) + \Phi(-1{,}96 - d) = 1 - \Phi(1{,}96 - d) - \Phi(1{,}96 + d). \tag{6.7.2}$$

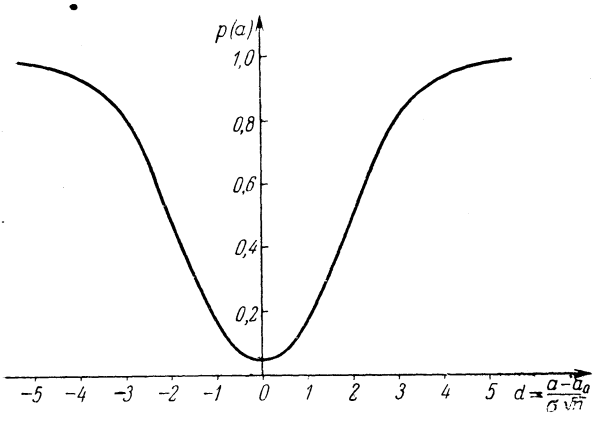
Эта вероятность существенно зависит от того, насколько отличается значение a от a_0, отвечающего гипотезе H_0. С увеличением $|d|$ она будет довольно быстро возрастать. Значение $d=0$ отвечает $p(a_0)=0{,}05$, характеризующее взятый уровень значимости. Кривая мощности нашего критерия изображена на черт. 91. По оси абсцисс здесь отложены значения d, т. е. значения нормированной разности между центром рассеивания и гипотетической точкой a_0; по оси ординат отложены вероятности $p(a)$ попадания критерия в критическую область при $\mathbf{M}X=a$, т. е. мощность данного критерия, вычисленная по формуле (6.7.2). Так, например, при $d=1{,}0$ мы получим:

$$p(d)=1-\Phi(1{,}96-1)-\Phi(1{,}96+1)=1-\Phi(0{,}96)-\Phi(2{,}96).$$

Беря по табл. IV приложений значения функции Лапласа в точках $Z_1=0{,}96$ и $Z_2=2{,}96$, получаем:

$$p(a)=1-0{,}3315-0{,}4985=0{,}17.$$

Очевидно, построив кривую мощности, мы получаем уже достаточно детальную оперативную характеристику, оценивающую доброкачественность нашего критерия. Ясно, что чем круче поднимается кривая мощности в обе стороны от точки максимума (если при альтернативных допущениях возможны отклонения как в ту, так и в другую стороны), тем лучше будет действовать наш критерий, так как тем самым понижается вероятность *ошибки второго рода, равная дополнению мощности до единицы*. Так, в нашем примере при $d=1{,}0$ вероятность P_{II} ошибки второго рода равна $P_{II}=1-0{,}17=0{,}83$.



Черт. 91. Кривая мощности критерия $\dfrac{\bar{x}-a_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ с уровнем значимости $q=5\%$ в отношении альтернативной гипотезы $\mathbf{M}X=a$.

В некоторых случаях мы можем получить такой критерий, который обладает тем свойством, что его кривая мощности будет заведомо выше в рассматриваемой области, чем кривая мощности любого другого критерия с тем же уровнем значимости. Такого рода критерии называются *равномерно наиболее мощными*. Ясно, что таким критериям следует отдать предпочтение перед другими. Впрочем, они существуют лишь в очень ограниченном классе задач. Одной из таких задач служит как раз рассмотренная нами задача проверки гипотезы $\mathbf{M}X=a_0$ при альтернативных допущениях $a>a_0$ (или соответственно $a<a_0$). В этом случае критической областью с уровнем значимости q служит область больших $\bar{x}$

$$\bar{x}>a_0+\lambda_q\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\qquad\left(\text{или }\bar{x}<a_0-\lambda_q\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

и мощность этого критерия выражается формулой

$$p(a)=0{,}5-\Phi(\lambda_q-d), \tag{6.7.3}$$

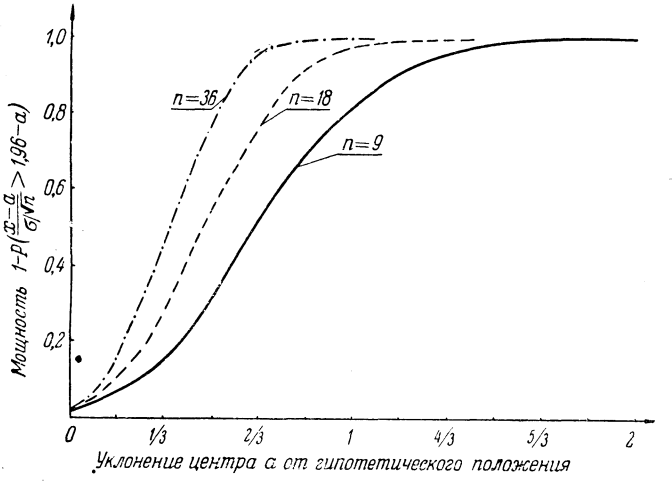
где

$$d=\frac{|a-a_0|}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

В случае множества альтернативных гипотез $a \neq a_0$ равномерно наиболее мощного критерия не существует. Мы, например, можем найти критерии с тем же уровнем значимости, кривые мощности которых будут выше, чем кривая мощности рассмотренного нами критерия с двухсторонней критической областью.

Существенно выбирать кривую мощности с таким расчетом, чтобы она гарантировала с достаточной надежностью браковку значений a, которые связаны с заметным понижением качества изделий, ущербом и т. п. Разумеется, значения a, очень близкие к a_0, практически часто следует считать равноправными с a_0 и вряд ли следует стремиться к тому, чтобы браковать H_0 при малых уклонениях a от a_0; этого, кроме того, и нельзя осуществить при малых объемах выборки.

Строя кривые мощности для различных значений объема выборки n, часто можно придать ей желательную форму, т. е. обеспечить браковку опасных значений параметра с надлежащей вероятностью.



Черт. 92. Кривые мощности одностороннего метода с 2,5%-ным уровнем значимости при числе наблюдений $n = 9$; 18; 36.

На черт. 92 приведены три кривые одностороннего критерия с 5%-ным уровнем значимости для трех увеличивающихся значений n. Мы наглядно видим, как увеличивается мощность этого критерия с ростом числа наблюдений.

ГЛАВА VII

ОСНОВЫ ТЕОРИИ КОРРЕЛЯЦИИ

§ 1. Общие понятия о корреляции и регрессии

7.1.1. Стохастическая связь. В естествознании и технике мы часто имеем дело с понятием *функциональной зависимости*, существо которой заключается в том, что какая-либо физическая величина определяется как однозначная функция одной или нескольких величин. Так, например, зависимость между давлением, с одной стороны, и объемом и температурой — с другой, определяется, как известно, уравнением

$$p = R\frac{T}{v},$$

где p — давление газа, T — температура его, v — его объем и R — постоянный коэффициент.

Таким образом, мы имеем дело с подобной зависимостью всякий раз, когда вообще существует функция

$$Y = f(x;\ z;\ \ldots;\ u),$$

т. е. когда величина Y определена вполне значениями x, z, ..., u.

Функциональная связь может существовать, в частности, как мы видели, между случайными величинами; некоторые из относящихся сюда вопросов были рассмотрены в § 5 главы III и в § 4 главы IV. Но между случайными величинами может существовать и связь другого рода, проявляющаяся в том, что *одна из них реагирует на изменение другой изменениями своего закона распределения*. Такую связь мы будем называть *стохастической* (*вероятностной*).

Стохастическая связь между двумя случайными величинами появляется обычно тогда, когда имеются общие случайные факторы, влияющие как на одну, так и на другую величину наряду с другими неодинаковыми для обеих величин случайными факторами. Так, например, если X представляет некоторую функцию от случайных величин $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m; V_1, V_2, \ldots, V_k$:

$$X = f(Z_1, Z_2, \ldots, Z_m; V_1, V_2, \ldots, V_k),$$

а Y представляет функцию от тех же случайных величин $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$ и некоторой совокупности других $U_1, U_2, \ldots, U_l$

$$Y = \varphi(Z_1, Z_2, \ldots, Z_m; U_1, U_2, \ldots, U_l),$$

то величины X и Y будут между собой стохастически связаны.

Иногда на практике встречаются такие случаи, когда имеются данные не о всех тех величинах, от которых зависит интересующая нас величина Y. Зная, что Y зависит от известных величин $X, Z, \ldots, U$, исследователь должен считаться еще с тем, что Y связана, кроме того, с рядом иных величин, ускользающих от наблюдения. Тогда возникает вопрос: можно ли в этих условиях что-либо высказать относительно связи между величинами? Применима ли в этом случае теория стохастических связей?

Ответить на этот вопрос далеко не просто. Следует с самого начала заметить, что если недостает знаний относительно некоторых величин, то еще нельзя сказать, что мы имеем дело со стохастической связью. Так, измеряя в приведенном выше примере взаимодействие между объемом и давлением, мы должны поддерживать более или менее постоянную температуру и только тогда мы обнаружим в порядке приближения закон обратной пропорциональности, связывающий объем и давление; отклонения от этого закона, вызываемые случайными колебаниями температуры, случайными погрешностями эксперимента, ошибками измерения и т. п., могут быть, как мы увидим далее, в известной степени ослаблены. Если же не ставить никаких условий относительно температуры, то видимый закон связи между объемом и давлением может принять форму прямой пропорциональности или другую какую-либо форму, если будет соответствующим образом подобрана изменяющаяся температура.

Пока мы не уверены, что колебания температуры подчинены вероятностным законам, мы ничего не можем сказать о зависимости давления от объема.

Рассмотрим еще один пример. Пусть требуется установить связь брака по завышенным фаскам штамповок колец подшипников с их браком по превышению наружного диаметра. Оставаясь в пределах одного типа колец, мы получим стохастическую зависимость. Если же в цехе, где мы собираем наш материал, имеется несколько типов колец, то задача все еще сохраняет смысл, если даны вероятности, с которыми мы можем натолкнуться на представителя того или иного типа. Если же нет сведений о вероятностях различных типов, то вопрос перестает быть определенным и даже осмысленным.

Данное положение можно сформулировать так:

если существует закон распределения вероятности совокупности данных величин, т. е. «стохастическая сопряженность» их, то имеет смысл говорить и об их стохастической связи или независимости.

Для непрерывных случайных величин — X, Y, Z — этот закон распределения задается плотностью, определяющей элементарную вероятность

$$\varphi(x;\ y;\ z)\,dx\,dy\,dz = \mathbf{P}\begin{pmatrix} x < X < x+dx \\ y < Y < y+dy \\ z < Z < z+dz \end{pmatrix}. \qquad (7.1.1)$$

Таким образом, величины X, Y и Z находятся в *стохастической сопряженности*, если вероятность (7.1.1) существует для любой точки (x, y, z) пространства.

Для дискретных случайных величин в этом случае должна существовать вероятность

$$p(x;\ y;\ z) = \mathbf{P}(X = x;\ Y = y;\ Z = z). \qquad (7.1.2)$$

Прежде чем применять для решения той или иной практической задачи излагаемые в этой главе методы, мы сначала должны убедиться в том, что имеем дело с величинами стохастически сопряженными.

Задачи, связанные с изучением зависимостей между величинами, отличных от строго функциональных, весьма разнообразны. Они приобретают более определенный вид и могут быть поставлены в рамках математико-статистического исследования, если мы предположим, что зависимость носит стохастический характер, т. е. имеет смысл говорить о законе распределения рассматриваемых величин, о вероятности, с которой встречаются те или иные комбинации их значений и т. д. Применительно к этому случаю и развивается математическая *теория корреляции*. Основное применение, которое находит эта теория, относится к решению задачи обоснованного прогноза, т. е. указания пределов, в которых с наперед заданной надежностью будет содержаться интересующая нас величина, если другие, связанные с ней величины получают определенные значения.

Подобного рода задача обобщает весьма разнообразные вопросы, возникающие на практике. Так, например, нас может интересовать влияние на тот или иной признак качества, такой, как чистота поверхности, биение, огранка и т. п., тех или иных, иногда отдаленных производственных факторов (припуски и допуски на предыдущих операциях и т. п.), или связь признаков качества между собой, или, наконец, взаимная связь производственных факторов. Все эти и подобные им вопросы очень часто могут быть исследованы с помощью приемов теории корреляции.

7.1.2. Условные математические ожидания. Линии регрессии. Условные дисперсии. Дисперсия условных средних. В этом параграфе мы будем заниматься двумерными величинами с дискретными значениями. Пусть случайная величина X принимает значения $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ с вероятностями $p(x_1), p(x_2), p(x_3), \ldots, p(x_n)$ и случайная величина Y принимает значения $y_1, y_2, y_3, \ldots y_m$ с вероятностями $p(y_1), p(y_2), \ldots, p(y_m)$. При этом для пары x_i, y_j пусть существует вероятность $p(x_i, y_j)$. Тогда, как уже указывалось в **3.2.1**, мы получим двумерную таблицу распределения вида (табл. 7.1.1).

Таблица 7.1.1

Y \ X	x_1	x_2	x_3	. . .	x_i	. . .	x_n	
y_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_2, y_1)$	$p(x_3, y_1)$	. . .	$p(x_i, y_1)$	. . .	$p(x_n, y_1)$	$p(y_1)$
y_2	$p(x_1, y_2)$	$p(x_2, y_2)$	$p(x_3, y_2)$	. . .	$p(x_i, y_2)$	. . .	$p(x_n, y_2)$	$p(y_2)$
. . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . .	. . . .	. . .	. . . .	. . . .
y_j	$p(x_1, y_j)$	$p(x_2, y_j)$	$p(x_3, y_j)$	. . .	$p(x_i, y_j)$	. . .	$p(x_n, y_j)$	$p(y_j)$
. . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . .	. . . .	. . .	. . . .	. . . .
y_m	$p(x_1, y_m)$	$p(x_2, y_m)$	$p(x_3, y_m)$	. . .	$p(x_i, y_m)$	. . .	$p(x_n, y_m)$	$p(y_m)$
	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$p(x_3)$	. . .	$p(x_i)$	. . .	$p(x_n)$	

Здесь мы для простоты обозначения полагаем:

$$\mathbf{P}(X = x) = p_X(x) = p(x) \quad \text{и} \quad \mathbf{P}(Y = y) = p_Y(y) = p(y).$$

В случае непрерывных величин этой таблице соответствует двумерная плотность вероятности $\varphi(x, y)$.

По определению (3.2.6) имеем, что величины X и Y называются *стохастически независимыми*, если $p(x_i, y_j) = p(x_i)\, p(y_j)$.

Сумма вероятностей, стоящих в какой-либо строке табл. 7.1.1, дает вероятность соответствующего этой строке значения Y, сумма вероятностей, стоящих в каком-либо столбце, дает вероятность значения X, соответствующего этому столбцу. Эти соотношения, определяющие одномерные законы величин X и Y, могут быть записаны так:

$$\left.\begin{aligned} p(x) &= \sum_y p(x, y), \\ p(y) &= \sum_x p(x, y). \end{aligned}\right\} \tag{7.1.3}$$

В дальнейшем мы примем этот способ записи, избегая писать индексы i и j, а будем указывать лишь аргумент, по которому производится суммирование. Суммы (7.1.3) распространены на все возможные значения X и соответственно Y.

Как мы уже видели в **3.2.1**, условные вероятности $p(x\,|\,y)$ и $p(y\,|\,x)$ при независимости случайных величин X и Y равны соответственно полным вероятностям $p(x)$ и $p(y)$:

$$\left.\begin{aligned} p(x\,|\,y) &= \frac{p(x,y)}{p(y)} = p(x), \\ p(x\,|\,y) &= \frac{p(x,y)}{p(y)} = p(y). \end{aligned}\right\} \tag{7.1.4}$$

Исходя из этих определений, можно построить такой показатель связи, который принимает различные значения от 0 (при отсутствии связи) до 1 (при наличии функциональной зависимости). Но мы пойдем иным путем, имеющим преимущество большей наглядности.

На практике нас обычно в первую очередь интересует изменение средних математических ожиданий одной величины, отвечающее изменениям другой величины. Если предположить, что величина X приняла значение x и при этом искать математическое ожидание Y, то получим ее *условное математическое ожидание*

$$\mathbf{M}(Y\,|\,x) = \sum_y y p(y\,|\,x) = \bar{y}(x). \tag{7.1.5}$$

Аналогично условное математическое ожидание величины X при условии, что Y примет значение y, будет:

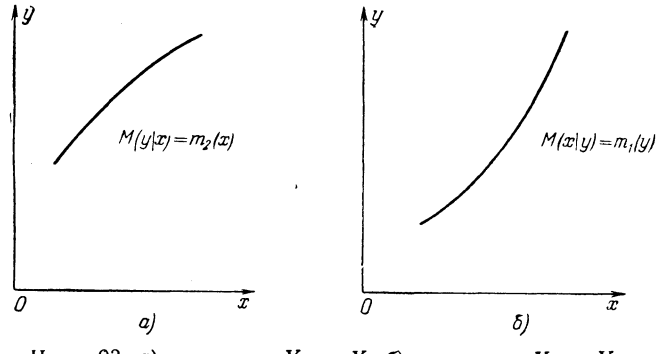
$$\mathbf{M}(X|y) = \sum_x x p(x\,|\,y) = \bar{x}(y).$$

$\bar{y}(x)$ и $\bar{x}(y)$ — две определенные функции x и y — возможных значений величин X и Y.

В случае независимости X и Y мы на основании (7.1.4) будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}(y) &= \sum_x x p(x) = \mathbf{M}X = a_X = \text{const}, \\ \bar{y}(x) &= \sum_y y p(y) = \mathbf{M}Y = a_Y = \text{const}. \end{aligned}\right\} \tag{7.1.6}$$

Геометрическое место точек, соответствующих значениям условного математического ожидания $\mathbf{M}(Y\,|\,x)$, т. е. график функции $\bar{y}(x)$, часто называют *линией регрессии* величины Y по X. Аналогичным образом функция $\bar{x}(y)$ опре-



Черт. 93. *а*) регрессия Y по X, *б*) регрессия X по Y.

деляет в плоскости (x, y) линию регрессии X по Y (черт. 93). Впрочем, понятие «линии» в обычном смысле этого слова относится к случаю непрерывного распределения; в дискретном случае мы будем иметь только множество изолированных точек на плоскости. Эти точки изображают центры условных распределений, соответствующих заданным значениям одной из переменных.

В случае независимости величин X и Y линии регрессии будут: одна параллельной оси y, а другая параллельной оси x. Будем рассматривать вероятности $p(x_i, y_j)$ как систему масс, расположенных в точках (x_i, y_j) плоскости. Массы, расположенные на прямой $x = x_i$, параллельной оси y, имеют центр тяжести в точке с той же абсциссой и ординатой, равной $\bar{y}(x_i)$. В самом деле, на основании (7.1.4) и (7.1.3)

$$\bar{y}(x_i) = \sum_y y p(y \mid x_i) = \sum_y y \frac{p(x_i, y)}{p(x_i)} = \frac{\sum_y y p(x_i, y)}{\sum_y p(x_i, y)}.$$

Последняя дробь и определяет ординату центра тяжести масс $p(x_i, y)$, лежащих на оси $x = x_i$. Линия регрессии $\bar{y}(x)$ есть, таким образом, геометрическое место центров тяжести масс, расположенных на вертикальных прямых $x = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, и аналогично $\bar{x}(y)$ есть геометрическое место центров тяжести масс, расположенных на прямых $y = y_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$.

Уравнения линий регрессии мы можем представить в несколько ином виде, которыми в дальнейшем и будем пользоваться:

$$\left.\begin{aligned} \bar{y}(x) &= \frac{\sum_y y p(x, y)}{\sum_y p(x, y)}, \\ \bar{x}(y) &= \frac{\sum_x x p(x, y)}{\sum_x p(x, y)}. \end{aligned}\right\} \tag{7.1.7}$$

Около условных средних, как около центров, рассеивание величины подчиняется каждый раз определенному (условному) закону распределения, зависящему опять-таки от взятого значения другой переменной. В этом и состоит существо стохастической связи рассматриваемого типа. При строгой функциональной зависимости переменная Y при данном значении величины $X = x_i$ может принять лишь одно определенное значение. Этот случай может рассматриваться как своего рода предельный к случаю стохастической зависимости, когда рассеивание вокруг условного среднего равно нулю — линия регрессии при этом и является изображением функциональной зависимости между величинами. При стохастической зависимости мы, вообще говоря, для данного значения $X = x$ будем наблюдать более или менее значительное рассеивание значений Y около центра $\bar{y}(x)$. Мерой этого рассеивания может служить *условная дисперсия* Y при данном x, т. е. дисперсия условного закона распределения $p(y \mid x)$; она определяется формулой

$$\sigma^2_{Y \mid x} = \mathbf{D}(Y \mid x) = \sum_y [y - \bar{y}(x)]^2 p(y \mid x). \tag{7.1.8}$$

Наряду с линией регрессии $\mathbf{M}(Y \mid x) = \bar{y}(x)$ мы имеем еще *линию условных дисперсий* $\sigma^2_{Y \mid x} = \mathbf{D}(Y \mid x)$ или так называемую «*скедастическую*» линию.

В теории корреляции в первую очередь рассматриваются именно эти две характеристики (средние и дисперсии) условных распределений $\mathbf{P}(Y \mid x)$ и две аналогичные характеристики для закона $\mathbf{P}(X \mid y)$ — условная средняя $\bar{x}(y)$ и условная дисперсия $\sigma^2_{X \mid y} = \mathbf{D}(X \mid y)$.

Будем рассматривать теперь $\bar{y}(x)$ и $\sigma^2_{Y \mid x}$ как возможные значения при $X = x$ функций $\bar{y}(x)$ и $\sigma^2_{Y \mid x}$ случайной переменной X. Среднее значение первой из них будет:

$$\sum_x \mathbf{P}(X = x) \bar{y}(x) = \sum_x p(x) \sum_y y p(y \mid x).$$

Поменяв порядок суммирования в правой части равенства, найдем:

$$\sum_x p(x)\bar{y}(x) = \sum_y y \sum_x p(x)\,p(y|x),$$

а так как согласно (7.1.3)

$$\sum_x p(x)\,p(y|x) = \sum_x p(x, y) = p(y),$$

то окончательно

$$\sum_x p(x)\bar{y}(x) = \mathbf{M}Y = a_Y. \tag{7.1.9}$$

Таким образом, условные средние $\mathbf{M}(Y|x) = \bar{y}(x)$ при различных значениях, принимаемых случайной величиной X, колеблются около того же среднего уровня, что и величина Y, т. е. около $\mathbf{M}Y = a_Y$. Для того чтобы охарактеризовать рассеивание случайной величины $\bar{y}(x)$ около центра $\mathbf{M}Y = a_Y$, мы введем *дисперсию условных средних*

$$\mathbf{D}[\bar{y}(x)] = \sigma^2_{\bar{y}(x)} = \sum_x p(x)[\bar{y}(x) - a_Y]^2. \tag{7.1.10}$$

Чем меньше дисперсия $\sigma^2_{\bar{y}(x)}$, тем меньше сказывается изменение величины X на изменении условных средних величины Y и тем слабее корреляционная связь между Y и X. Случай $\sigma^2_{\bar{y}(x)} = 0$ отвечает постоянству условных средних $\bar{y}(x) = a_Y$.

Принимая во внимание, что x есть одно из возможных значений величины X, мы можем рассматривать $\sigma^2_{Y|x}$ как возможное значение случайной величины $\sigma^2_{Y|X}$. Математическое ожидание этой величины мы обозначим через $\bar{\sigma}^2_{Y|X}$.

Таким образом,

$$\mathbf{M}[\sigma^2_{Y|X}] = \bar{\sigma}^2_{(Y|X)}, \tag{7.1.11}$$

и, учитывая вероятности возможных значений X, получим:

$$\bar{\sigma}^2_{Y|X} = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2_{Y|x_i}\,p(x_i).$$

Эту величину называют *средней условных дисперсий*. Она тем меньше, чем меньше в среднем условные дисперсии, т. е. чем более точна и определенна зависимость Y от X, чем ближе эта зависимость к функциональной. Значение $\bar{\sigma}^2_{Y|X}$ равно нулю, если $\sigma^2_{Y|x} = 0$ при каждом возможном значении x. В этом случае рассеивание около линии регрессии Y по X исчезает, и величина Y может быть выражена как однозначная функция x, а именно $Y = \bar{y}(x)$.

Выведем теперь важное тождество, связывающее три дисперсии σ^2_Y, $\sigma^2_{\bar{y}(x)}$ и $\bar{\sigma}^2_{Y|X}$; как мы покажем далее,

$$\sigma^2_Y = \bar{\sigma}^2_{Y|X} + \sigma^2_{\bar{y}(x)}, \tag{7.1.12}$$

т. е. общая дисперсия величины Y является суммой двух компонент: дисперсии Y около линии регрессии $\bar{y}(x)$, измеряемой величиной $\bar{\sigma}^2_{Y|X}$, и дисперсии $\sigma^2_{\bar{y}(x)}$ самих условных средних $\bar{y}(x)$ около их общего центра.

В самом деле, принимая во внимание соотношение

$$p(y) = \sum_x p(x, y) = \sum_x p(x)\,p(y|x),$$

найдем

$$\sigma^2_Y = \sum_y p(y)(y - a_Y)^2 = \sum_y (y - a_Y)^2 \sum_x p(x)\,p(y|x) \tag{7.1.13}$$

и, меняя порядок суммирования, получим:

$$\sigma_Y^2 = \sum_x p(x) \sum_y p(y \mid x)(y - a_Y)^2. \tag{7.1.14}$$

С другой стороны,

$$(y - a_Y)^2 = [y - \bar{y}(x) + \bar{y}(x) - a_Y]^2 =$$
$$= [y - \bar{y}(x)]^2 + 2[y - \bar{y}(x)][\bar{y}(x) - a_Y] + [\bar{y}(x) - a_Y]^2.$$

Поэтому

$$\sum_y p(y \mid x)(y - a_Y)^2 = \sum_y [y - \bar{y}(x)]^2 p(y \mid x) +$$
$$+ 2[\bar{y}(x) - a_Y] \sum_y p(y \mid x)[y - \bar{y}(x)] + [\bar{y}(x) - a_Y]^2 \sum_y p(y \mid x). \tag{7.1.15}$$

Но, принимая во внимание, что

$$\sum_y [y - \bar{y}(x)]^2 p(y \mid x) = \sigma^2_{Y|x},$$
$$\sum_y p(y \mid x)[y - \bar{y}(x)] = \bar{y}(x) - \bar{y}(x) = 0,$$
$$\sum_y p(y \mid x) = 1,$$

перепишем (7.1.15) в следующем виде:

$$\sum_y p(y \mid x)(y - a_Y)^2 = \sigma^2_{Y|x} + [\bar{y}(x) - a_Y]^2,$$

и согласно (7.1.14)

$$\sigma_Y^2 = \sum_x p(x)\, \sigma^2_{(Y|x)} + \sum_x p(x)[\bar{y}(x) - a_Y]^2 = \bar{\sigma}^2_{Y|X} + \sigma^2_{\bar{y}(x)},$$

что и доказывает (7.1.13).

Аналогичным образом дисперсию σ_X^2 величины X можно представить в виде суммы двух слагаемых

$$\sigma_X^2 = \bar{\sigma}^2_{X|Y} + \sigma^2_{\bar{x}(y)},$$

где $\bar{\sigma}^2_{X|Y}$ есть дисперсия X около регрессии $\bar{x}(y)$, а $\sigma^2_{\bar{x}(y)}$ выражает остаточную дисперсию, измеряющую степень колебания условных средних $\bar{x}(y)$ около их общей средней $\mathbf{M}X = a_X$.

7.1.3. Корреляционная зависимость. Корреляционное отношение и его свойства. Перейдем теперь к понятию *корреляционной зависимости*. Под этой последней понимается как раз такая связь между двумя случайными переменными, при которой *одна из них реагирует на изменения другой изменениями своего математического ожидания*. Таким образом, понятие корреляционной зависимости является более узким, чем понятие стохастической связи, рассмотренной в **7.1.1,** ибо математическое ожидание, как мы видели в главе IV, является обычно лишь одним из параметров того или иного распределения и вовсе не определяет закона распределения в целом. Корреляционная зависимость является лишь наиболее простым и практически важным случаем стохастической связи, допускающим числовую характеристику. В качестве характеристики степени корреляционной зависимости используются два показателя, называемых *корреляционными отношениями* величины Y к X и величины X к Y. Обозначаются они греческой буквой η: первое $\eta_{Y|X}$ и второе $\eta_{X|Y}$.

Корреляционное отношение $\eta_{Y|X}$ определяется равенством

$$\eta^2_{Y|X} = 1 - \frac{\overline{\sigma^2_{Y|X}}}{\sigma^2_Y}, \tag{7.1.16}$$

которое на основании соотношения (7.1.13) можно записать также в виде

$$\eta^2_{Y|X} = \frac{\sigma^2_{\overline{y}(x)}}{\sigma^2_Y}. \tag{7.1.17}$$

Из (7.1.13) и (7.1.16) видно, что корреляционное отношение заключено в пределах

$$0 \leqslant \eta \leqslant 1, \tag{7.1.18}$$

если условиться брать его всегда положительным или нулем.

Аналогичным образом определяется другое корреляционное отношение

$$\eta^2_{X|Y} = 1 - \frac{\overline{\sigma^2_{X|Y}}}{\sigma^2_X} = \frac{\sigma^2_{\overline{x}(y)}}{\sigma^2_X}.$$

Остановимся на важнейших свойствах корреляционного отношения.

Первое свойство корреляционного отношения $\eta_{Y|X}$ заключается в том, что при наличии однозначной связи между величинами X и Y оно *равно единице.* В самом деле, как мы уже говорили, в этом случае рассеивание около линии регрессии $\overline{y}(x)$ отсутствует, так как единственно возможное значение Y при данном x совпадает с $\overline{y}(x)$. Величина $\overline{\sigma^2_{Y|X}}$ равна в этом случае нулю.

Второе свойство корреляционного отношения состоит в утверждении, обратном тому, которое было сформулировано в первом случае, т. е. если $\eta_{Y|x} = 1$, то Y есть однозначная функция X. В самом деле, предположим, что $\eta_{Y|x} = 1$. Из этого будет следовать, что $\sigma^2_{X|Y} = 0$, и потому рассеивание около линии регрессии отсутствует. Мы можем этот случай трактовать как строгую функциональную зависимость между Y и X, когда каждому значению x отвечает одно определенное значение $Y = \overline{y}(x)$.

Третье свойство формулируется так: если величины Y и X не коррелированы, то корреляционное отношение $\eta_{Y|X}$ равно нулю. В самом деле, некоррелированность Y по отношению к X означает, что условные средние $\overline{y}(x)$ сохраняют постоянное значение, равное общему среднему

$$\overline{y}(x) = \mathbf{M}Y = a_Y.$$

Следовательно, в этом случае $\sigma^2_{\overline{y}(x)} = 0$ и потому $\eta^2_{Y|X} = 0$. В частности, $\eta^2_{Y|X} = 0$ если Y не зависит от X, так как в этом случае $\overline{y}(x) = a_Y$.

Четвертое свойство сводится к тому, что если $\eta_{Y|X} = 0$, то величина Y не коррелирована с X, т. е. $\overline{y}(x) = \mathbf{M}Y = \text{const}$ и не изменяется при изменении x. В самом деле, из равенства $\sigma^2_{\overline{y}(x)} = 0$ следует, что $\overline{y}(x) = a_y = \text{const}$. При $\eta_{Y|X} = 0$ линия регрессии параллельна оси x. *Не следует,* однако, *некоррелированность смешивать с независимостью.*

Заметим, что даже при $\eta_{Y|x} = \eta_{x|y} = 0$ все же возможно существование стохастической связи. В самом деле, зависимость между X и Y может, например, выражаться в том, что изменение одной из величин определенным образом влияет на дисперсию $\sigma^2_{Y|x}$ другой величины, оставляя без изменения ее центр

распределения. Очевидно, что величины X и Y в этом случае будут некоррелированы, но они несомненно являются зависимыми.

Показатель $\eta_{X|Y}$ обладает аналогичными свойствами.

Между $\eta_{Y|X}$ и $\eta_{X|Y}$ нет какой-либо простой зависимости. Некоррелированность Y с X не влечет за собой непосредственно некоррелированности X с Y. Могут встретиться случаи, когда один из этих показателей принимает нулевое значение, в то время как второй равен единице. Допустим, например, что Y есть однозначная функция X, скажем $Y=X^2$, и X принимает три значения: -1, 0 и $+1$ с вероятностью $\frac{1}{3}$ каждое. В этом случае $\eta_{Y|X}=1$, тогда как $\eta_{X|Y}=0$ в силу симметрии параболы относительно оси y и симметричности распределения X. Здесь $x(y)=0$ при любом значении y.

Если $\eta_{Y|X}=\eta_{X|Y}=1$, то функциональная зависимость обратима и Y представляет монотонную функцию от X.

7.1.4. Линейная регрессия. Уравнение регрессии. Коэффициенты регрессии и корреляции. Мы до сих пор не делаем никаких предположений относительно вида линии регрессий.

Сделаем теперь добавочное предположение, что зависимость между $\mathbf{M}(Y|x)=\bar{y}(x)$ и x *линейна*; иными словами, линия регрессии Y по X графически изображается прямой. Уравнение этой линейной зависимости мы запишем в следующем виде:

$$\mathbf{M}(Y|x)=\bar{y}(x)=a+bx. \tag{7.1.19}$$

Определим коэффициенты a и b, выразив их через характеристики закона распределения X и Y. Мы будем предполагать, что это распределение дискретно, хотя полученный результат будет справедлив и для непрерывных распределений. Умножая обе части уравнения (7.1.19) на $\mathbf{P}(X=x)=p(x)$ и суммируя по всем возможным значениям x, получим:

$$\sum_x p(x)\cdot\bar{y}(x)=a\sum_x p(x)+b\sum_x p(x)\,x. \tag{7.1.20}$$

Но согласно (7.1.9) левая часть равна $\mathbf{M}Y=a_Y$. Кроме того, $\sum_x p(x)=1$ и $\sum_x p(x)\,x=\mathbf{M}X=a_X$.

Поэтому (7.1.20) мы можем переписать так:

$$a_Y=a+b\mathbf{M}X=a+ba_X. \tag{7.1.21}$$

Условие (7.1.21) говорит, что прямая регрессии проходит через *центр распределения* точку a_X, a_Y).

Вычитая (7.1.21) из (7.1.19), найдем:

$$\bar{y}(x)-a_Y=b(x-a_X). \tag{7.1.22}$$

Используя теперь выражение (7.1.7) для $\bar{y}(x)$, мы можем (7.1.22) записать в следующем виде:

$$\frac{\sum_y yp(x,y)}{\sum_y p(x,y)}-a_Y=b(x-a_X).$$

Освобождаясь от знаменателя $\sum_y p(x,y)=p(x)$, получим:

$$\sum_y yp(x,y)-a_Y\sum_y p(x,y)=b(x-a_X)\,p(x)$$

и, наконец,

$$\sum_y (y - a_Y) p(x, y) = b (x - a_X) p(x). \tag{7.1.23}$$

Это равенство справедливо для каждого значения x. Помножая обе части (7.1.23) на $(x - a_X)$ и производя затем суммирование по x, найдем:

$$\sum_x \sum_y (x - a_X)(y - a_Y) p(x, y) = b \sum_x (x - a_X)^2 p_1(x)$$

или

$$\mu_{XY} = \operatorname{cov}(X, Y) = b\sigma_X^2.$$

Отсюда

$$b = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_X^2}. \tag{7.1.24}$$

Найденный нами угловой коэффициент прямой регрессии Y по X носит название *коэффициента регрессии* и обозначается символом $b_{Y|X}$. Если заметить, что μ_{XY} связана с коэффициентом корреляции $\rho_{XY} = \rho$ соотношением [1])

$$\mu_{XY} = \rho\sigma_X\sigma_Y,$$

то формула для коэффициента регрессии $b_{Y|X}$ запишется так:

$$b_{Y|X} = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_X^2} = \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}. \tag{7.1.25}$$

Поэтому уравнение (7.1.22) прямой регрессии Y по X можно записать в следующем виде:

$$\bar{y}(x) - a_Y = b_{Y|X}(x - a_X). \tag{7.1.26}$$

Рассмотрим теперь показатель $\eta_{Y|X}$ в предположении линейности регрессии Y по X. Из соотношений (7.1.22) и (7.1.24) следует:

$$\sigma^2_{\bar{y}(x)} = \sum_x p(x)[\bar{y}(x) - a_Y]^2 = b^2 \sum_x p(x)(x - a_X)^2 = b^2\sigma_X^2 = \rho^2\sigma_Y^2.$$

Отсюда

$$\eta^2_{Y|X} = \frac{\sigma^2_{\bar{y}(x)}}{\sigma_Y^2} = \rho^2, \tag{7.1.27}$$

т. е.

$$\eta_{Y|X} = |\rho|. \tag{7.1.28}$$

Если регрессия X по Y также линейна, мы для нее будем иметь уравнение

$$\bar{x}(y) - a_X = b_{X|Y}(y - a_Y),$$

где

$$b_{X|Y} = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_Y^2} = \rho \cdot \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}. \tag{7.1.29}$$

Уравнения прямых регрессии могут быть также записаны в следующем симметричном виде:

$$\frac{\bar{y}(x) - a_Y}{\sigma_Y} = \rho \cdot \frac{x - a_X}{\sigma_X} \tag{7.1.30}$$

---

[1]) См. также **3.4.4.**

и

$$\frac{\bar{x}(y)-a_X}{\sigma_X}=\rho\cdot\frac{y-a_Y}{\sigma_Y}. \tag{7.1.31}$$

В случае линейности регрессии

$$\eta_{Y|X}=\eta_{X|Y}=|\rho|. \tag{7.1.32}$$

Мы увидим в дальнейшем, что (7.1.32) является достаточным условием линейности.

Далее, принимая во внимание выражения для $b_{Y|X}$ и $b_{X|Y}$, найдем:

$$b_{X|Y}\cdot b_{Y|X}=\rho^2 \tag{7.1.33}$$

или

$$|\rho|=\sqrt{b_{X|Y}\cdot b_{Y|X}}. \tag{7.1.34}$$

Из (7.1.29) следует, что угловые коэффициенты $b_{Y|X}$ и $b_{X|Y}$ всегда имеют одинаковые знаки, совпадающие со знаком ρ. Если $\rho>0$, то обе прямые регрессии (Y по X и X по Y) проходят через центр распределения (a_X, a_Y), образуя острые углы с положительными направлениями осей x и y соответственно. В этом случае *корреляция* называется *положительной*, так как с возрастанием одной величины возрастают соответствующие условные средние другой. При $\rho=0$ прямая регрессии Y по X параллельна оси $x\,[\bar{y}(x)=a_Y=\text{const}]$, а прямая регрессии X по Y параллельна оси $y\,[\bar{x}(y)=a_X=\text{const}]$, следовательно, угол между этими прямыми равен 90°. С возрастанием ρ наклон каждой из прямых к соответствующей оси возрастает, а острый угол между прямыми убывает.

При $\rho=1$ обе прямые сливаются в одну

$$\frac{y-a_Y}{\sigma_Y}=\frac{x-a_X}{\sigma_X}; \tag{7.1.35}$$

в этом случае каждая из переменных является линейной функцией другой.

В случае $\rho<0$ при отрицательной корреляции прямые регрессии, проходя через точку (a_X, a_Y), образуют тупые углы с положительными направлениями осей x и y (соответственно); угол между ними острый и всегда убывает по мере приближения ρ к -1; в этом предельном случае ($\rho=-1$) обе прямые сливаются в одну. В предельных случаях $\rho=\pm1$ вся масса вероятности $p(xy)$ концентрируется на одной из прямых $\frac{y-a_y}{\sigma_y}=\pm\frac{x-a_x}{\sigma_x}$.

7.1.5. Прямые регрессии как приближение к нелинейной регрессии. Мы видели, что в случае линейной корреляции две прямые линии плоскости (x, y)

$$\left.\begin{aligned}\frac{Y-a_Y}{\sigma_Y}&=\rho\frac{X-a_X}{\sigma_X},\\ \frac{X-a_X}{\sigma_X}&=\rho\frac{Y-a_Y}{\sigma_Y}\end{aligned}\right\} \tag{7.1.36}$$

отвечают прямым регрессии так, что ординаты первой прямой $Y=\bar{y}(x)$ и абсциссы второй $X=\bar{x}(y)$.

Однако и в случае корреляции любой формы и тесноты эти прямые сохраняют некоторый определенный смысл.

Для того чтобы обнаружить это, мы рассмотрим следующую задачу. Пусть требуется приближенно выразить величину Y с помощью линейной функции величины X:

$$Y\approx\alpha+\beta X=\hat{y}(X).$$

Для того чтобы задача приобрела точный смысл, мы возьмем в качестве меры уклонения среднее значение квадрата уклонения

$$\Sigma_Y^2 = \mathbf{M}[Y-(\alpha+\beta X)]^2 = \mathbf{M}[Y-\hat{y}(x)]^2 \qquad (7.1.37)$$

и потребуем, чтобы коэффициенты α и β удовлетворяли требованию минимальности величины Σ_y^2.

Мы будем для простоты дальнейших выкладок предполагать, что величины X и Y *центрированы*, т. е.

$$a_X = \mathbf{M}X = 0, \quad a_Y = \mathbf{M}Y = 0. \qquad (7.1.38)$$

Это равносильно тому, что мы помещаем начало координат в точку $(\mathbf{M}X; \mathbf{M}Y)$ или заменяем X на $X-\mathbf{M}X=X'$ и Y на $Y-\mathbf{M}Y=Y'$. Ясно, что линейная зависимость между X' и Y' устанавливает такую же зависимость между X и Y. Поэтому мы с самого начала будем предполагать выполненным условие (7.1.38).

Далее

$$\Sigma_Y^2 = \mathbf{M}[(Y-\beta X)-\alpha]^2 = \mathbf{M}(Y-\beta X)^2 - 2\alpha\mathbf{M}(Y-\beta X)+\alpha^2 =$$
$$= \mathbf{M}(Y-\beta X)^2+\alpha^2, \qquad (7.1.39)$$

так как ввиду (7.1.38)

$$\mathbf{M}(Y-\beta X) = \mathbf{M}Y - \beta\mathbf{M}X = 0.$$

Следовательно, для того чтобы Σ_Y^2 было минимальным, во всяком случае необходимо, чтобы $\alpha = 0$.

Поэтому, используя (7.1.29), получим:

$$\Sigma_Y^2 = \mathbf{M}(Y-\beta X)^2 = \mathbf{M}Y^2 - 2\beta\mathbf{M}(XY)+\beta^2\mathbf{M}X^2 = \sigma_Y^2 - 2\beta\mu_{XY}+\beta^2\sigma_X^2 =$$
$$= \sigma_Y^2 - 2\beta\rho\sigma_X\sigma_Y+\beta^2\sigma_X^2 = (\beta\sigma_X-\rho\sigma_Y)^2+(1-\rho^2)\sigma_Y^2.$$

Правая часть представляет сумму двух неотрицательных слагаемых, причем второе из них не зависит от β.

Чтобы обратить Σ_Y^2 в минимум, мы, следовательно, должны положить $\beta = \rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y} = b_{Y|X}$, так как в этом случае первое слагаемое обращается в нуль и уравнение приближенной линейной функции будет:

$$\hat{y}(X) = b_{Y|X}X.$$

Оно изображается прямой линией, проходящей через начало координат, т. е. через точку $(a_X a_Y)$ в старых координатах.

Очевидно, эта прямая совпадает с прямой регрессии (7.1.36), которую мы исследовали раньше, предполагая линейность корреляции. Мы видим, таким образом, что в случае зависимости произвольного вида линейные уравнения (7.1.36) дают в некотором определенном смысле наилучшие линейные приближения к рассматриваемым величинам.

Находя наилучшее приближение $\hat{y}(x)$ к величине Y, мы производим разложение Y на сумму

$$Y = \hat{y}(X)+Y_0, \qquad (7.1.40)$$

где $Y_0 = Y-\hat{y}(X)$ — остаток, который получается, если вычесть из Y наилучшее линейное относительно X приближение к Y. Дисперсия этого остатка и будет измеряться величиной

$$\Sigma_{y\text{мин}}^2 = \Sigma_0^2 = \sigma_Y^2(1-\rho^2). \qquad (7.1.41)$$

Замечательное свойство разложения (7.1.40) заключается в том, что коэффициент корреляции между величиной Y и $\hat{y}(X)$, равный ρ, т. е. таков, как между

величинами Y и X, тогда как коэффициент корреляции между X и Y_0 равен нулю. В самом деле, предполагая Y и X центрированными, $\mathbf{M}Y=\mathbf{M}X=0$, будем иметь:

$$\mathbf{M}[Y\cdot\hat{y}(X)]=\mathbf{M}[Yb_{Y|X}X]=b_{Y|X}\mu_{XY}=\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\rho\sigma_Y\sigma_X=\rho^2\sigma_Y^2, \tag{7.1.42}$$

$$\sigma^2_{\hat{y}(X)}=b^2_{Y|X}\cdot\sigma^2_X=\rho^2\sigma^2_Y, \tag{7.1.43}$$

$$\rho_{Y,\hat{y}(X)}=\frac{\mathbf{M}[Y\cdot\hat{y}(x)]}{\sigma_Y\sigma_{\hat{y}(x)}}=\frac{\rho^2\sigma_Y^2}{\sigma_Y\rho\sigma_Y}=\rho \tag{7.1.44}$$

и

$$\mathbf{M}(Y_0X)=\mathbf{M}\{[Y-\hat{y}(X)]X\}=\mu_{XY}-b_{Y|X}\sigma^2_X=\mu_{XY}-\mu_{XY}=0, \tag{7.1.45}$$

так как

$$b_{Y|X}=\frac{\mu_{XY}}{\sigma^2_X}.$$

Пусть действительная линия регрессии Y по X будет:

$$\mathbf{M}(Y|x)=\bar{y}(X),$$

в то время как линейное приближение к Y будет $\hat{y}(X)$; тогда

$$\Sigma^2_{Y_0}=\mathbf{M}[Y-\hat{y}(X)]^2=\mathbf{M}[Y-\bar{y}(X)+\bar{y}(X)-\hat{y}(X)]^2=$$
$$=\mathbf{M}[Y-\bar{y}(X)]^2+2\mathbf{M}\{[Y-\bar{y}(X)][\bar{y}(X)-\hat{y}(X)]\}+\mathbf{M}[\bar{y}(X)-\hat{y}(X)]^2. \tag{7.1.46}$$

Но

$$\mathbf{M}[Y-\bar{y}(X)]^2=\bar{\sigma}^2_{Y|X}$$

и

$$\mathbf{M}\{[Y-\bar{y}(X)][\bar{y}(X)-\hat{y}(X)]\}=\sum_x p(x)[\bar{y}(X)-\hat{y}(X)]\sum_y p(y|x)[y-\bar{y}(X)].$$

Но внутренняя сумма по y по свойству отклонений от математического ожидания равна нулю и потому, обозначая

$$\mathbf{M}[\bar{y}(X)-\hat{y}(X)]^2=\delta^2_{\bar{y}(X)},$$

будем иметь:

$$\Sigma^2_{Y_0}=\bar{\sigma}^2_{Y|X}+\delta^2_{\bar{y}(X)}, \tag{7.1.47}$$

где $\bar{\sigma}^2_{Y|X}$ измеряет степень рассеивания Y около истинной линии регрессии $\bar{y}(X)$, т. е. характеризует погрешность, которую мы сделаем, вычисляя Y с помощью точной линии регрессии, а $\delta^2_{\bar{y}(X)}$ измеряет степень уклонения линии регрессии $\bar{y}(X)=\mathbf{M}(Y|x)$ от приближенно выражающей ее линейной функции $\hat{y}(X)$.

Так как, с одной стороны,

$$\Sigma^2_0=(1-\rho^2)\sigma^2_Y$$

и, с другой стороны, по определению $\eta^2_{Y|X}$ (7.1.17)

$$\bar{\sigma}^2_{(Y|X)}=(1-\eta^2_{Y|X})\sigma^2_Y,$$

то из (7.1.41) следует:

$$(1-\rho^2)\sigma^2_Y=(1-\eta^2_{Y|X})\sigma^2_Y+\delta^2_{\bar{y}(x)}$$

и далее

$$\eta^2_{Y|X}=\rho^2+\left(\frac{\delta_{\bar{y}(x)}}{\sigma_Y}\right)^2. \tag{7.1.48}$$

Из этого тождества имеем неравенство

$$\eta_{Y|X} \geqslant |\rho| \tag{7.1.49}$$

и аналогично $\eta_{X|Y} \geqslant |\rho|$, и равенство возможно лишь в случае $\delta^2_{\bar{y}(x)} = 0$, т. е. в случае, когда действительная линия регрессии будет прямой линией.

Тогда

$$\bar{\sigma}^2_{Y|X} = \Sigma^2_{Y_0} = (1 - \rho^2)\sigma^2_Y.$$

7.1.6. Свойства коэффициента корреляции. В **7.1.3** мы познакомились с основными свойствами корреляционного отношения, а в **7.1.4** мы видели, что при линейной регрессии корреляционное отношение совпадает с абсолютной величиной коэффициента корреляции. При этом частном предположении относительно формы регрессии коэффициент корреляции обладает свойствами, аналогичными свойствам 1—5 корреляционного отношения (см. **7.1.3**):

1) при наличии строгой линейной связи между величинами X и Y

$$|\rho| = 1; \tag{7.1.50}$$

2) при $|\rho| = 1$ величины X и Y связаны линейной связью;

3) если величины X и Y не коррелированы, то

$$\rho = 0; \tag{7.1.51}$$

4) если $\rho = 0$, то величины X и Y не коррелированы и прямые регрессии параллельны осям координат;

5) чем ближе $|\rho|$ к 1, тем теснее прямолинейная корреляция между величинами X и Y.

Среднее квадратическое $\bar{\sigma}_{Y|X} = \Sigma_{Y_0}$, которым измеряются колебания Y, при данном значении X в среднем в $\sqrt{1-\rho^2}$ меньше, чем σ_Y, которым измеряются случайные колебания Y в генеральной совокупности.

Приведенные свойства коэффициента корреляции позволяют считать его доброкачественной мерой тесноты связи в условиях линейной корреляции. Правильное истолкование его значений (особенно при малых значениях) при криволинейной корреляции представляет нелегкую задачу. В то время как значения корреляционного отношения не зависят от формы кривых регрессии, значения коэффициента корреляции ρ, как мы видели [см. (7.1.48)], существенно зависят от того, в какой мере линии регрессии отличаются от прямых. Коэффициент корреляции всегда меньше наименьшего из показателей $\eta_{Y|X}$ и $\eta_{X|Y}$. Если один из них или даже оба равны единице и между переменными имеется функциональная связь, то абсолютное значение коэффициента корреляции может оказаться малым, смотря по виду функциональной зависимости.

Таким образом, в случае криволинейной корреляции значение коэффициента корреляции показывает скорее точность линейного по X приближения величины Y, чем служит показателем связи между этими величинами.

Заметим, однако, что с возрастанием ρ линии регрессии приближаются к прямым регрессии, т. е.

$$\bar{y}(X) - \hat{y}(X) \to 0,$$

и

$$\bar{x}(X) - \hat{x}(X) \to 0,$$

так как в этом случае

$$\eta_{Y|X} \to 1 \text{ и } \eta_{X|Y} \to 1,$$

$$\delta^2_{\bar{y}(X)} \to 0 \text{ и } \delta^2_{\bar{x}(X)} \to 0.$$

Обратное, конечно, несправедливо, так как при малом $|\rho|$ прямолинейная корреляция может быть совершенно точной, если $|\rho| = \eta$.

Рассмотрим теперь некоторые поучительные примеры, иллюстрирующие недоброкачественность показаний коэффициента корреляции для суждений о тесноте связи при нелинейности регрессии.

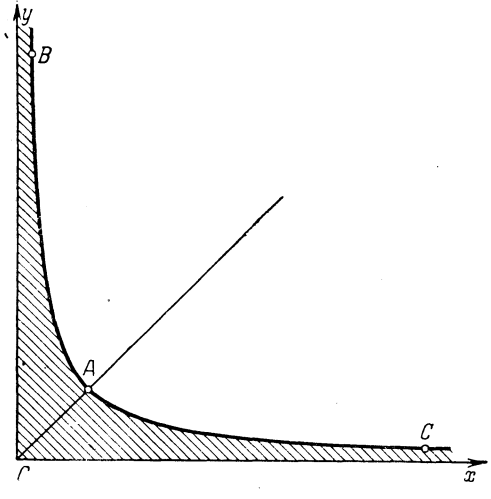
Покажем, что при $\rho = 0$ может существовать функциональная зависимость. Для иллюстрации годится уже приведенный нами раньше пример зависимости $Y = X^2$, где X принимает только три равновероятных значения 0, -1, $+1$. В этом случае $\mathbf{M}X = a_X = 0$, $\mathbf{M}Y = \mathbf{M}X^2 = \frac{2}{3}$.

Подсчитывая cov (X, Y), найдем:

$$\mu_{XY} = \mathbf{M}(X - a_X)(Y - a_Y) = (-1-0)\left(1-\frac{2}{3}\right)\frac{1}{3} + (0-0)\left(0-\frac{2}{3}\right)\frac{1}{3} + \\ + (1-0)\left(1-\frac{2}{3}\right)\frac{1}{3} = -\frac{1}{9} + \frac{1}{9} = 0.$$

Следовательно, $\rho = 0$, несмотря на наличие функциональной связи. В этом примере, как мы убедились в **7.1.3**, $\eta_{Y|X} = 1$, а $\eta_{X|Y} = 0$, что стоит в прямой связи с тем, что зависимость Y от X необратима: X есть двузначная функция от X. Покажем, что даже в том случае, когда зависимость допускает однозначное обращение и показатели $\eta_{Y|X}$ и $\eta_{X|Y}$ равны одновременно единице, коэффициент корреляции может быть близок к нулю.

Пусть величины X и Y связаны зависимостью $Y \cdot X = 1$, причем $X > 0$, $Y > 0$, так что $Y = \frac{1}{X}$ и $X = \frac{1}{Y}$ — каждая из величин однозначная функция другой, поэтому $\eta_{Y|X} = \eta_{X|Y} = 1$.



Черт. 94. Пример функциональной зависимости между величинами X и Y, когда коэффициент корреляции между ними как угодно близок к нулю.

Пусть величина X принимает три возможных значения $\frac{1}{N}$, 1 и N (N — натуральное число $\geqslant 3$), при этом

$$\mathbf{P}\left(x = \frac{1}{N}\right) = \mathbf{P}(x = N) = \frac{1}{(N-1)^2}$$

и

$$\mathbf{P}(x = 1) = 1 - \frac{2}{(N-1)^2}.$$

Очевидно, величина $Y = \frac{1}{X}$ принимает те же три значения с указанными вероятностями.

Геометрически распределение масс вероятностей в данном примере изобразится тремя точками A, B, C (черт. 94), лежащими на ветви равносторонней гиперболы $y = \frac{1}{x}$ в первом квадранте. Точка A с массой $1 - \frac{2}{(N-1)^2}$ лежит на пересечении гиперболы с биссектрисой $y = x$. В точках $B\left(\frac{1}{N}, N\right)$ и $C\left(N, \frac{1}{N}\right)$, симметричных относительно биссектрисы $y = x$, расположены равные массы $\frac{1}{(N-1)^2}$.

Произведем расчет основных характеристик этого распределения:

$$\mathbf{M}X = a_X = 1 \cdot \left(1 - \frac{2}{(N-1)^2}\right) + \frac{1}{(N-1)^2}\left(\frac{1}{N} + N\right) = 1 + \frac{(N-1)^2}{N(N-1)^2} = 1 + \frac{1}{N}.$$

$$\sigma_X^2 = 1^2 \cdot \left[1 - \frac{2}{(N-1)^2}\right] + \frac{1}{N^2}\frac{1}{(N-1)^2} + \frac{N^2}{(N-1)^2} - a_X^2 = 1.$$

Аналогично $a_Y = 1 + \frac{1}{N}$ и $\sigma_Y^2 = 1$. Следовательно,

$$\sigma_X = \sigma_Y = 1.$$

Наконец, по формуле (3.4.24)

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbf{M}(XY) - a_X a_Y = 1 \cdot 1\left(1 - \frac{2}{(N-1)^2}\right) + 2N \cdot \frac{1}{N}\frac{1}{(N-1)^2} - \left(1 + \frac{1}{N}\right)^2 =$$

$$= 1 - \left(1 + \frac{1}{N}\right)^2 = -\frac{1}{N^2} - \frac{2}{N},$$

и потому [см. (3.4.26)]

$$\rho = \frac{1 - \left(1 + \frac{1}{N}\right)^2}{1 \cdot 1} = -\frac{2N+1}{N^2}.$$

При достаточно большом N ρ, очевидно, будет как угодно мало. Заметим еще, что прямые регрессии проходят через точку $A'\left(1 + \frac{1}{N},\ 1 + \frac{1}{N}\right)$, лежащую на биссектрисе, и почти параллельны осям координат, так как угловые коэффициенты их равны ρ.

7.1.7. Стохастическая и корреляционная связь между непрерывными величинами. При непрерывных распределениях совершенно так же, как и при дискретных, мы встречаемся с условными распределениями (рассмотренными в **2.2.5**) и стохастическими связями. Если $\varphi(x, y)$ — плотность двумерного распределения, то *условное математическое ожидание и условная дисперсия величины* y соответственно равны

$$\mathbf{M}(Y \mid x) = \bar{y}(x) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} y\varphi(x, y)\,dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y)\,dy} = \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{\varphi(x, y)}{\varphi_X(x)}\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} y\varphi(y \mid x)\,dy, \quad (7.1.52)$$

$$\sigma_{Y|x}^2 = \mathbf{D}(Y \mid x) = \int_{-\infty}^{\infty} [y - \mathbf{M}(Y \mid x)]^2 \varphi(y \mid x)\,dy, \quad (7.1.53)$$

где $\varphi(y \mid x)$ является условной плотностью распределения Y при данном x.

Точку с координатами $X = x$ и $Y = \bar{y}(x)$ можно рассматривать как предельное положение центра тяжести массы, заключенной в вертикальной полосе, ограниченной прямыми $X = x$ и $X = x + h$ при $h \to 0$.

Ковариация будет иметь вид

$$\mathbf{M}[(X - \mathbf{M}X)(Y - \mathbf{M}Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbf{M}X)(y - \mathbf{M}Y)\varphi(x, y)\,dx\,dy. \quad (7.1.54)$$

Средняя величина условной дисперсии будет равна

$$\bar{\sigma}_{Y|x}^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [y - \mathbf{M}(Y \mid x)]^2 \varphi(x, y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(x)\sigma_{Y|x}^2\,dx. \quad (7.1.55)$$

Дисперсия условных математических ожиданий будет определяться формулой

$$\sigma_{\bar{y}(x)}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{M}(Y \mid x) - \mathbf{M}Y]^2 \varphi_X(x)\,dx. \quad (7.1.56)$$

Выражения для корреляционного отношения, коэффициента корреляции и коэффициента регрессии через указанные характеристики будут те же, что приводились ранее; при этом уравнение линии регрессии Y по X в плоскости x, y мы получаем непосредственно из (7.1.52), где (после интегрирования по y в правой части) условное математическое ожидание $\mathbf{M}(Y \mid x)$ будет представлять функцию $\bar{y}(x)$ от x.

§ 2. Нормальная корреляция

7.2.1. Общее понятие о нормальной корреляции. Уравнение нормальной регрессии. Широкое распространение нормального распределения, как мы видели, хорошо обосновывается, с одной стороны, теоремой Ляпунова и тем обстоятельством, что многие важные для приложений технические и производственные признаки формируются под действием большого числа почти независимых факторов; суммируясь, эти малые воздействия и приводят к картине нормального рассеивания.

Эта схема может быть привлечена и для объяснения возникновения случая нормальной корреляции. Пусть мы рассматриваем две величины X и Y, представляющие каждая сумму независимых слагаемых x_i и y_i соответственно:

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$Y = \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Слагаемые x_i и y_i с одинаковыми номерами могут находиться в произвольной стохастической и даже функциональной зависимости; слагаемые с разными номерами x_i и y_i $(i \neq j)$ независимы друг от друга. Пусть для каждой из сумм X и Y выполняются условия Ляпунова (строго формулированные, например, в книге С. Н. Бернштейна «Теория вероятностей»). Тогда двумерный закон распределения X и Y при большем n будет как угодно близок к двумерному нормальному распределению, при котором плотность $\varphi_{XY}(x, y)$ определяется равенством

$$\varphi_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{XY}^2}} e^{-\frac{1}{2\left(1-\rho_{XY}^2\right)}\left[\frac{(x-a_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-a_Y)^2}{\sigma_Y^2} - 2\rho_{XY}\frac{(x-a_X)(y-a_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right]}. \tag{7.2.1}$$

Здесь ρ_{XY} — коэффициент корреляции величин X и Y. Эта теорема, доказанная выдающимся советским математиком акад. С. Н. Бернштейном, лежит в основе теории нормальной корреляции, составляющей наиболее разработанный раздел теории стохастических связей в современной математической статистике.

Схема сумм позволяет, по крайней мере для некоторых важных случаев, уяснить реальный смысл коэффициента корреляции.

Пусть, например, величины X и Y представляют суммы:

$$X = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_m + V_1 + V_2 + \ldots + V_k,$$
$$Y = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_m + U_1 + U_2 + \ldots + U_l,$$

где величины Z_i, V_i, U_i независимы; для простоты мы предположим, что

$$\mathbf{M}Z_i = a_Z, \quad \mathbf{D}Z_i = \sigma_{Z_i}^2 = \sigma_Z^2 \qquad (i = 1, \ldots, m),$$
$$\mathbf{M}V_j = a_V, \quad \mathbf{D}V_j = \sigma_V^2 \qquad (j = 1, \ldots, s),$$
$$\mathbf{M}U_r = a_U, \quad \mathbf{D}U_r = \sigma_U^2 \qquad (r = 1, \ldots, l).$$

Тогда в силу независимости слагаемых

$$a_X = \mathbf{M}X = ma_Z + ka_V, \quad \mathbf{D}X = m\sigma_Z^2 + k\sigma_V^2,$$
$$a_Y = \mathbf{M}Y = ma_Z + la_U, \quad \mathbf{D}Y = m\sigma_Z^2 + l\sigma_U^2;$$

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbf{M}(X - a_X)(Y - a_Y) =$$
$$= \mathbf{M}[(Z_1 - a_Z) + \ldots + (Z_m - a_Z) + (V_1 - a_V) + \ldots + (V_k - a_V)] \times$$
$$\times [(Z_1 - a_Z) + \ldots + (Z_m - a_Z) + (U_1 - a_U) + \ldots + (U_l - a_U)] =$$
$$= \mathbf{M}(Z_1 - a_Z)^2 + \mathbf{M}(Z_2 - a_Z)^2 + \ldots + \mathbf{M}(Z_m - a_Z)^2 = m\sigma_Z^2,$$

так как

$$\mathbf{M}(Z_t - a_Z)(U_r - a_U) = \mathbf{M}(V_j - a_V)(Z_t - a_Z) = \mathbf{M}(V_j - a_V)(U_r - a_U) = 0$$

при всех t, j и r. Значит,

$$\rho_{XY} = \frac{m\sigma_Z^2}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\sqrt{m}\,\sigma_Z}{\sigma_X} \cdot \frac{\sqrt{m}\,\sigma_Z}{\sigma_Y}. \tag{7.2.2}$$

Мы видим, что величина коэффициента корреляции между суммами X и Y зависит существенно от того, какой удельный вес имеет дисперсия общих слагаемых $Z_1 + \ldots + Z_m$ по отношению к дисперсии каждой из сумм.

Покажем, что выражение (7.2.1) действительно является плотностью двумерного распределения двух линейно коррелированных величин X и Y, каждая из которых в отдельности нормально распределена с соответствующими значениями центра и дисперсии. В одном частном случае это обстоятельство делается очевидным.

Если величины X и Y независимы и нормально распределены с плотностями соответственно $n(x; a_X, \sigma_X)$ и $n(y; a_Y, \sigma_Y)$, то плотность их совместного распределения действительно получается из (7.2.1) при $\rho = \rho_{XY} = 0$.

В самом деле, если величины независимы, то коэффициент корреляции $\rho = 0$, а плотность их совместного распределения $\varphi_{XY}(x, y)$ будет согласно (3.2.16) равна произведению плотностей $n(x; a_X, \sigma_X)$ и $n(y; a_Y, \sigma_Y)$ их одномерных распределений. Но при $\rho = 0$ как раз и получаем из (7.2.1):

$$\varphi_{XY}(x, y) = n(x; a_X, \sigma_X) \cdot n(y; a_Y, \sigma_Y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-a_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-a_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right]}. \tag{7.2.3}$$

Из этого, кроме того, следует, что если нормально распределенные величины не коррелированы, то они вместе с тем и независимы. Таким образом, равенство $\rho = 0$ при наличии нормальной корреляции говорит о полной независимости величин X и Y. Этого вывода, как мы знаем, вообще нельзя оправдать при произвольном законе распределения X и Y.

Покажем теперь, что, интегрируя (7.2.1) по переменным y и x, мы получим плотности одномерных распределений величин X и Y соответственно $n(x; a_X, \sigma_X)$ и $n(y; a_Y, \sigma_Y)$.

Интегрируя по y, для плотности величины X получим:

$$\varphi_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_X \cdot \sigma_Y \sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-a_X)^2}{\sigma_X} + \frac{(y-a_Y)^2}{\sigma_Y} - 2\rho\left(\frac{x-a_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-a_Y}{\sigma_Y}\right)\right]} dy.$$

Сделаем подстановку:

$$v = \frac{y - a_Y}{\sigma_Y},$$

тогда $dy = \sigma_Y\, dv$ и

$$\varphi_X(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2+v^2-2\rho uv)}\, dv,$$

где для краткости мы обозначим $\frac{x - a_X}{\sigma_X} = u$.

Прибавляя и вычитая по $\frac{\rho^2 u^2}{2(1-\rho^2)}$ в показателе степени при e, мы получим:

$$\varphi_X(x) = \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{2\pi\sigma_X\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(v-\rho u)^2}\, dv.$$

Сделаем теперь подстановку $z = \frac{v - \rho u}{\sqrt{1-\rho^2}}$, тогда $dv = \sqrt{1-\rho^2}\, dz$ и

$$\varphi_X(x) = \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{2\pi\sigma_X} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz.$$

Интеграл в правой части (4.3.3) равен $\sqrt{2\pi}$, и, выражая u снова через x, мы окончательно получим:

$$\varphi_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_X} e^{-\frac{(x-a_X)^2}{2\sigma_X^2}} = n(x;\ a_X,\ \sigma_X), \tag{7.2.4}$$

что и требовалось доказать.

Из симметрии следует, что распределение величины Y также нормально с параметрами a_Y и σ_Y.

Рассмотрим теперь условное нормальное распределение. Применяя (3.2.18), из (7.2.1) и (7.2.4) и пользуясь снова обозначениями u и v для нормированных уклонений, получаем:

$$\varphi(y \mid x) = \frac{\varphi_{XY}(x, y)}{\varphi_X(x)} = \frac{e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2+v^2-2\rho uv)}}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} : \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_X} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(v^2-2\rho uv+\rho^2u^2)}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v-\rho u}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}.$$

Если теперь в полученном выражении заменить u и v на x и y, то мы получим:

$$\varphi(y \mid x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{y-a_Y-\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-a_X)}{\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}\right]^2}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}. \tag{7.2.5}$$

Правая часть (7.2.5) действительно представляет плотность — в данном случае плотность условного распределения Y при данном значении x. Мы видим,

что условное распределение Y (так же как и совместное распределение X и Y) является нормальным с центром

$$\mathbf{M}(Y \mid x) = \bar{y}(x) = a_Y + \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - a_X) \tag{7.2.6}$$

и средним квадратическим отклонением

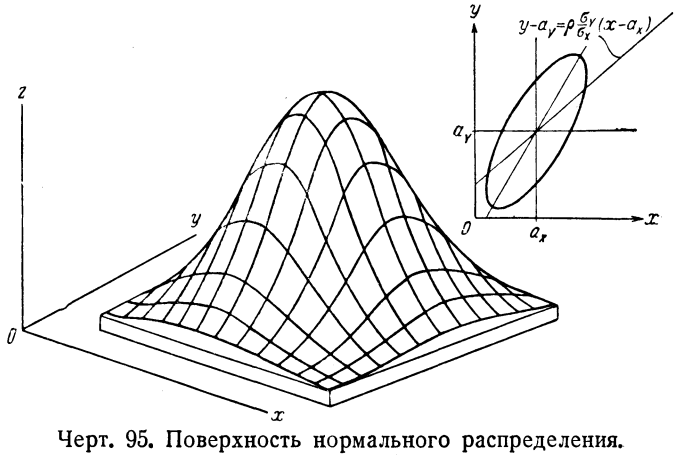
$$\sigma_{Y \mid X} = \sigma_Y \sqrt{1 - \rho^2}. \tag{7.2.7}$$

(7.2.6) представляет вместе с тем уравнение *линии нормальной регрессии* Y по X, которая, как видно из этого уравнения, является прямой линией. Аналогично регрессии X по Y будет также линейной, а условная дисперсия $\sigma_{X \mid y} = \sigma_X \sqrt{1 - \rho^2}$. Итак, нормальная регрессия является *прямолинейной*.

Далее из (7.2.7) ясно, что условное среднее квадратическое отклонение при нормальной корреляции Y *постоянно* при всех значениях x. Это последнее свойство называют часто *гомоскедастичностью*, т. е. *равноизменчивостью* условных нормальных распределений. Величина $\sigma_Y \sqrt{1 - \rho^2}$, как мы знаем, представляет теоретическое среднее квадратическое отклонение погрешностей оценки ожидаемого значения Y по x. Отсюда следует, что точность оценки корреляции одинакова при всех значениях x. Это значительно упрощает задачу оценки, с которой мы познакомимся в следующем параграфе.

Учитывая, что нормальное распределение часто встречается на практике и что нормальная регрессия прямолинейна, обычно в качестве меры силы корреляционной связи применяют коэффициент корреляции, а форму связи характеризуют при этом коэффициентом регрессии, что значительно упрощает задачу исследования связей между случайными величинами.

7.2.2. Геометрическая интерпретация нормальной корреляции. Нормальная поверхность распределения. Мы видели, что функция плотности вероятности одномерного распределения может быть наглядно изображена в виде кривой на плоскости, причем по оси абсцисс откладываются значения непрерывно изменяющегося аргумента, а по оси ординат—соответствующие им плотности. Подобным же образом можно дать геометрическую интерпретацию двумерной плотности (7.2.1), но только уже теперь придется обратиться к пространственным образам.



Черт. 95. Поверхность нормального распределения.

Из анализа известно, что функция $z = \varphi_{XY}(x, y)$ может быть изображена в системе координат x, y, z поверхностью, которая в нашем случае носит название *поверхности нормального распределения* (черт. 95).

Пользуясь (3.2.18), мы получим из (7.2.5) уравнение этой поверхности в виде

$$z = \varphi_X(x) \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{y-a_Y-\rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(x-a_X)}{\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}\right]^2}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}. \qquad (7.2.8)$$

Рассечем эту поверхность плоскостями $x = x_0$, перпендикулярными к оси x. Уравнение линии пересечения нашей поверхности с каждой из этих плоскостей может быть получено из (7.2.8) путем подстановки в него значения $x = x_0$. Мы видим, что все эти кривые будут иметь форму нормальных кривых с центрами, лежащими на линии регрессии, задаваемой уравнением (7.2.6), со средними квадратическими отклонениями, равными $\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}$, и с варьирующими вместе с x_0 максимумами

$$\varphi_X(x_0) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}.$$

Кривая с наивысшим максимумом будет лежать в той из секущих плоскостей, которая отвечает значению $x_0 = a_X$, т. е. в этом случае $\varphi_X(x_0)$ имеет абсолютно наибольшее значение. Из условий симметрии ясно, что в сечениях нашей поверхности плоскостями, нормальными оси y и параллельными оси x, мы получим кривые, обладающие аналогичными свойствами. Рассечем теперь эту поверхность плоскостью $z = z_0 = \text{const}$, параллельной плоскости (x, y). Очевидно, постоянному значению z_0 функции $z = \varphi_{XY}(x, y)$ отвечает постоянное значение показателя в уравнении (7.2.1). Поэтому уравнение нашей линии пересечения может быть записано в виде

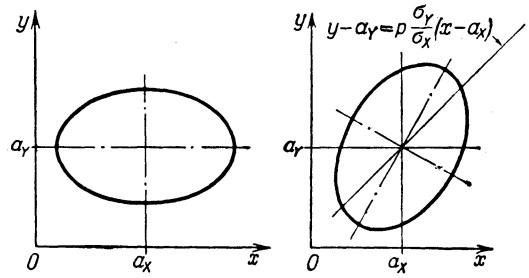
$$\left(\frac{x-a_X}{\sigma_X}\right)^2 + \left(\frac{y-a_Y}{\sigma_Y}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-a_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-a_Y}{\sigma_Y}\right) = C, \qquad (7.2.9)$$

где параметр C отвечает выбранному нами значению z. Полученное уравнение есть уравнение кривой второго порядка. Вычисление дискриминанта кривой (7.2.9) дает:

$$\Delta = \left(\frac{2\rho}{\sigma_X\sigma_Y}\right)^2 - 4\,\frac{1}{\sigma_X}\cdot\frac{1}{\sigma_Y} = \frac{4(\rho^2-1)}{\sigma_X^2\sigma_Y^2} \leqslant 0. \qquad (7.2.10)$$

Этот результат показывает, что рассматриваемое сечение представляет эллипс, за исключением тривиального случая, когда $\rho = \pm 1$. Давая z различные значения, мы получим в сечении с соответствующими плоскостями эллипсы различных размеров и с одинаковой ориентировкой их главных осей, составляющих некоторый угол с осями координат. Следует при этом заметить, что главные оси этих эллипсов не совпадают с линиями регрессии при $\rho \neq 0$. Если величины X и Y не коррелированы и, следовательно, $\rho = 0$, то уравнение (7.2.9) преобразуется в уравнение

$$\left(\frac{x-a_X}{\sigma_X}\right)^2 + \left(\frac{y-a_Y}{\sigma_Y}\right)^2 = C_1. \qquad (7.2.11)$$



Черт. 96. Эллипсы горизонтальных сечений поверхностей совместных распределений величин X и Y при отсутствии (*а*) и при наличии (*б*) корреляционной связи между ними.

Это последнее есть уравнение эллипса с центром в точке (a_X, a_Y) и с главными осями, параллельными осям x и y. Таким образом, с уменьшением силы

корреляционной связи между величинами X и Y происходит все больший поворот главных осей эллипсов относительно координатных осей.

На черт. 96 показаны эллипсы при независимости X от Y ($а$) и при их корреляционной зависимости ($б$).

§ 3. Оценка коэффициентов корреляции и регрессии и корреляционного отношения по выборочным данным

7.3.1. Статистические коэффициенты корреляции и регрессии и корреляционное отношение. Их вычисление. Мы рассмотрели наиболее употребительные показатели связи величин. Они являются, по существу, лишь некоторыми характеристиками закона распределения вероятностей (двумерного и многомерного) и могут служить для сжатого суммарного описания его основных свойств. Собственно статистическая задача возникает лишь тогда, когда мы должны дать оценку силы и формы связи, отправляясь от данной совокупности наблюдений — выборки. По данным наблюдения требуется, например, составить уравнение прямой, которая служила бы приближенным выражением для линии регрессии, произвести оценку средней величины одного признака по данному значению другого, оценить коэффициенты корреляции, коэффициенты регрессии и т. п.

Эта задача — того же типа, как рассмотренные нами в главе V вопросы статистической оценки параметров распределения. Наиболее разработанные приемы оценки, естественно, связаны со случаем нормальной корреляции.

Общий прием получения статистических оценок связи по данным выборки подобен тому, который мы неоднократно уже использовали. Он состоит в замене вероятности в теоретических показателях частостями, математических ожиданий соответствующими средними арифметическими, теоретических дисперсий их статистическими оценками, т. е. выборочными дисперсиями, и т. д.

Так, например, в пункте **3.4.7** мы рассмотрели коэффициент корреляции между двумя событиями или качественными признаками A и B:

$$\rho = \frac{p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}}{\sqrt{(p_{11}+p_{21})(p_{12}+p_{22})(p_{11}+p_{12})(p_{21}+p_{22})}}, \qquad (7.3.1)$$

где p_{11}, p_{12}, p_{21} и p_{22} представляют вероятности различных комбинаций событий A, B, $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

Предположим теперь, что произведено n наблюдений за связью между овальностью и огранкой при некотором технологическом процессе и для комбинаций овальности (A) и огранки (B) получены следующие численности:

AB — изделий с овальностью и огранкой n_{11},

$A\bar{B}$ — изделий с овальностью, но без огранки n_{12},

$\bar{A}B$ — изделий без овальности, но с огранкой n_{21},

$\bar{A}\bar{B}$ — изделий без овальности и огранки n_{22}, причем

$$n_{11} + n_{12} + n_{21} + n_{22} = n.$$

Таблица 7.3.1

A \ B	B	$\bar{B}$
A	AB n_{11}	$A\bar{B}$ n_{12}
$\bar{A}$	$\bar{A}B$ n_{21}	$\bar{A}\bar{B}$ n_{22}

Такие данные обычно сводят в таблицу, аналогичную табл. 7.2.1.

Эта таблица называется *четырехзначной таблицей сопряженности признаков*.

Мы можем получить оценку r коэффициента корреляции ρ для этого случая, заменив в формуле (7.3.1) вероятности p_{11}, p_{12}, p_{21} и p_{22} соответствующими частостями $\frac{n_{11}}{n}$, $\frac{n_{12}}{n}$, $\frac{n_{21}}{n}$ и $\frac{n_{22}}{n}$:

$$r = \frac{\frac{n_{11}}{n}\cdot\frac{n_{22}}{n} - \frac{n_{12}}{n}\frac{n_{21}}{n}}{\sqrt{\left(\frac{n_{11}}{n}+\frac{n_{21}}{n}\right)\left(\frac{n_{12}}{n}+\frac{n_{22}}{n}\right)\left(\frac{n_{11}}{n}+\frac{n_{12}}{n}\right)\left(\frac{n_{21}}{n}+\frac{n_{22}}{n}\right)}} =$$

$$= \frac{n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21}}{\sqrt{(n_{11}+n_{21})(n_{12}+n_{22})(n_{11}+n_{12})(n_{21}+n_{22})}}. \qquad (7.3.2)$$

При значительном объеме n выборки для оценки степени связанности признаков можно воспользоваться тем обстоятельством, что величина nr^2 приблизительно распределена по закону χ^2 в данном случае с одной степенью свободы.

Таблица 7.3.2

A \ B	B	$\bar{B}$	Сумма
A	99	35	134
$\bar{A}$	28	17	45
Сумма	127	52	179

Пример 7.3.1. Пусть мы имеем следующую, полученную из выборочных наблюдений таблицу сопряженности изделий с овальностью (A) и с огранкой (B) (табл. 7.3.2).

Требуется оценить степень связанности этих признаков качества продукции.

Определяем по имеющимся данным эмпирический коэффициент корреляции с помощью формулы (7.3.2):

$$r = \frac{99\cdot 17 - 35\cdot 28}{\sqrt{(99+28)(35+17)(99+35)(28+17)}} = 0{,}111.$$

Определяем критерий χ^2:

$$nr^2 = 179\cdot 0{,}111^2 = 2{,}22.$$

Как видно из табл. VIII приложений, полученное нами значение 2,22 для величины χ^2 при одной степени свободы отвечает уровню значимости, равному примерно 15%. Отсюда следует, что предположение об отсутствии связи между овальностью и огранкой изделий не находится в остром противоречии с наблюдениями.

С другой стороны, мера связанности $r = 0{,}111$ указывает на сравнительно слабую связь между интересующими нас признаками.

Вместо двумерного теоретического закона распределения выборка доставляет нам эмпирический аналог его в виде n наблюдений, каждое из которых фиксирует пару сопряженных значений интересующих нас величин. Сводная таблица таких наблюдений — *корреляционная таблица*, подробно рассматриваемая в разбираемом далее примере 7.3.2, выглядит следующим образом (табл. 7.3.3) (см. стр. 387).

В табл. 7.3.3 проставлены числа штамповок, обладающие соответствующими сопряженными отклонениями от номинального размера по двум различным диаметрам под $\angle 90°$ и под $\angle 45°$ к плоскости разъема штампов. Так, например, с отклонением под $\angle 90°$ от 0,10 до 0,20 *мм* и под $\angle 45°$ от 0,00 до 0,10 *мм* оказалась всего одна штамповка, с отклонениями под $\angle 90°$ от 0,30 до 0,40 *мм* и под $\angle 45°$ от 0,00 до 0,10 *мм* — две штамповки и т. д. В последней строке этой таблицы проставлены условные средние арифметические $\bar{y}$, т. е. средние

Таблица 7.3.3

Корреляционная таблица

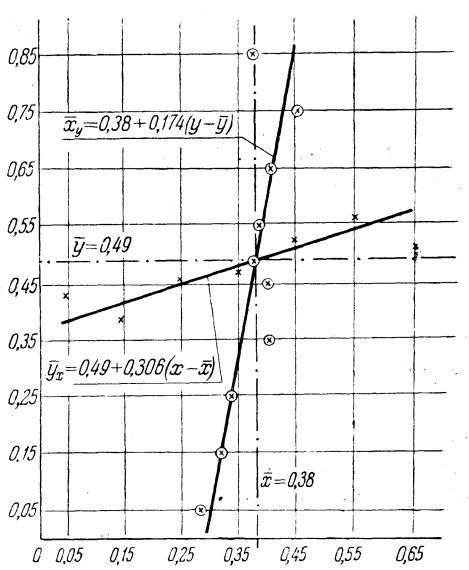
отклонений от нормального размера штамповок колец подшипников по диаметру под $\angle 90°$ к плоскости разъема штампов (x) и под $\angle 45°$ к той же плоскости (y).

Диаметр под $\angle 45°$; y	Диаметр под $\angle 90°$; x							
	От 0,00 до 0,10 *мм*	от 0,10 до 0,20 *мм*	от 0,20 до 0,30 *мм*	от 0,30 до 0,40 *мм*	от 0,40 до 0,50 *мм*	от 0,50 до 0,60 *мм*	от 0,60 до 0,70 *мм*	Условная средняя $\bar{x}$
От 0,00 до 0,10 *мм*		1		2				0,28
» 0,10 » 0,20 »		2	1	2	1	1		0,32
» 0,20 » 0,30 »	1	5	10	11	9	6		0,35
» 0,30 » 0,40 »		4	13	17	11	7	3	0,37
» 0,40 » 0,50 »	3	3	12	16	9	6	5	0,37
» 0,50 » 0,60 »	1	3	11	24	15	6		0,36
» 0,60 » 0,70 »		1	7	19	20	9	2	0,41
» 0,70 » 0,80 »		1	4	5	9	16	2	0,46
» 0,80 » 0,90 »		1	1			2		0,37
Условная средняя $\bar{y}$	0,43	0,39	0,46	0,47	0,52	0,56	0,51	0,49 / 0,38

отклонения под $\angle 45°$, отвечающие соответствующим значениям отклонений под $\angle 90°$ (т. е. иксам).

В последней графе (графы, содержащие двумерные частоты, здесь обычно называются «строями») таблицы проставлены условные средние арифметические $\bar{x}$.

Такая таблица уже сама по себе дает приблизительное представление о характере связи между интересующими нас признаками. Так, например, из приведенной таблицы видно, что с увеличением отклонений под $\angle 90°$ возрастают также и отклонения под $\angle 45°$, т. е. между этими признаками имеется прямая связь. Можно по таблице судить и о форме связи. Так, например, если построить на графике точки с координатами $(x, \bar{y})$ и $(y, \bar{x})$, то по графику можно судить, насколько связь между признаками близка к прямолинейной и насколько круто возрастают соответствующие линии связи. Для нашего примера график изображен на черт. 97. Пользуясь такой таблицей, мы можем, кроме того, вычислить «эмпирические» коэффициенты корреляции и регрессии и «эмпирическое» корреляционное отношение. Эти характеристики следует рассматривать как оценки соответствующих теоретических характеристик закона связи величин. В этом разделе мы рассмотрим практические приемы их вычисления.



Черт. 97. Линии регрессии отклонений диаметров штамповок колец под углом 90° и под углом 45° к плоскости разъема штампов.

Эмпирический коэффициент корреляции определяется соотношением

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum_x\sum_y n_{xy}(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{s_x s_y} = \frac{\frac{1}{n}\sum_x\sum_y n_{xy}x\cdot y - \left(\frac{1}{n}\sum_x n_x x\right)\left(\frac{1}{n}\sum_y n_y y\right)}{s_x s_y}, \tag{7.3.3}$$

где n — общее число наблюдений, n_{xy} — число совместных появлений значения x и значения y, s_x и s_y — эмпирические средние квадратические отклонения соответственно x и y.

Мы видим, что формула (7.3.3) совершенно аналогична формуле (3.4.26). Однако для вычислений наиболее удобна следующая формула, просто получающаяся из (7.3.3):

$$r = \frac{n\sum_x\sum_y n_{xy}xy - \left(\sum_x n_x x\right)\left(\sum_y n_y y\right)}{\sqrt{\left[n\sum_x n_x x^2 - \left(\sum_x n_x x\right)^2\right]\left[n\sum_y n_y y^2 - \left(\sum_y n_y y\right)^2\right]}}, \tag{7.3.3'}$$

где обозначения — те же. Следует заметить, что поскольку r (а также $\bar{b}$ и $\bar{\eta}$) представляет безразмерный коэффициент, то x и y в формуле (7.3.3′) могут быть выражены в любых единицах и в том числе в отклонениях от медиан распределений, отнесенных к ширине шага разбиения значений рассматриваемых величин (см. **5.2.7**). Это последнее обстоятельство значительно упрощает все вычисления. Эмпирический коэффициент регрессии определяется формулой

$$\bar{b}_{Y|x} = \frac{s_y}{s_x} r = \frac{\sqrt{n\sum_y n_y y^2 - \left(\sum_y n_y y\right)^2}}{\sqrt{n\sum_x n_x x^2 - \left(\sum_x n_x x\right)^2}} r. \tag{7.3.4}$$

Эта формула полностью отвечает формуле (7.1.29) теоретического коэффициента регрессии.

Наконец, эмпирическое корреляционное отношение задается формулой

$$\bar{\eta}_{Y|x} = \frac{s_{\bar{Y}_x}}{s_y}, \tag{7.3.5}$$

где s_y — эмпирическое среднее квадратическое отклонение (общее) величины Y, $s_{\bar{Y}_x}$ — эмпирическое среднее квадратическое отклонение частных средних арифметических $\bar{Y}_x$, т. е. средних арифметических значений Y, вычисленных при каждом из значений X. И эта формула вполне аналогична формуле (7.1.16), определяющей теоретическое корреляционное отношение. Но и в этом случае более удобна для вычислений следующая формула:

$$\bar{\eta}_{Y|x} = \sqrt{\frac{n\sum_x \frac{\left(\sum_y n_{xy}y\right)^2}{n_x} - \left(\sum_x\sum_y n_{xy}y\right)^2}{n\sum_y n_y y^2 - \left(\sum_y n_y y\right)^2}}, \tag{7.3.6}$$

где обозначения — те же, что в (7.3.3′). Эту формулу можно легко получить из (7.3.5) путем простых алгебраических преобразований. Мы поясним на числовом примере пользование приведенными формулами.

Пример 7.3.2. Пусть у нас имеется выборка, состоящая из 320 штамповок колец подшипников, причем непосредственными измерениями установлены следующие отклонения от номинального размера этих колец по наружному диаметру под $\angle 90°$ к плоскости разъема штампов (x) и под $\angle 45°$ к той же плоскости (y):

Кольцо № 1 $x_1 = 0{,}53$ *мм* $y_1 = 0{,}46$ *мм*
» № 2 $x_2 = 0{,}30$ » $y_2 = 0{,}33$ »
» № 3 $x_3 = 0{,}46$ » $y_3 = 0{,}53$ »
. . . . . .
. . . . . .
Кольцо № 320 $x_{320} = 0{,}38$ *мм* $y_{320} = 0{,}51$ *мм*.

Пусть требуется вычислить по этим данным эмпирические коэффициенты регрессии x по y и y по x, коэффициент корреляции и корреляционное отношение. Прежде всего составим по нашим данным *корреляционную таблицу* по следующей форме (табл. 7.3.4) (см. стр. 390—391).

При составлении этой таблицы отклонения по диаметру под $\angle 90°$ (x) были разбиты на 7 интервалов: от 0,00 до 0,10 *мм*, от 0,10 до 0,20 *мм*, от 0,20 до 0,30 *мм* и т. д., от 0,60 до 0,70 *мм*. Отклонения по диаметру под $\angle 45°$ (y) были разбиты на 9 интервалов: от 0,00 до 0,10 *мм*, от 0,10 до 0,20 *мм* и т. д., от 0,80 до 0,90 *мм*. С помощью того же приема, что был использован в примере 5.2.2, т. е. с помощью простановки вертикальных черточек, мы подсчитываем частоты совместных появлений тех или иных комбинаций значений x и y и заносим их в соответствующие клеточки. Так, например, при проведении такого подсчета в данном случае оказалось одно кольцо с отклонениями по диаметру под $\angle 90°$ от 0,10 до 0,20 *мм* и по диаметру под $\angle 45°$ от 0,00 до 0,10 *мм*, два кольца оказались с $0{,}30 < x \leqslant 0{,}40$ и $0{,}00 < y \leqslant 0{,}10$ *мм*. Эти числа проставлены соответственно в клеточках на пересечении второго столбца с первой строкой и четвертого столбца с первой строкой. В столбце A и строке A мы проставляем интервалы значений отклонений колец, выраженные в миллиметрах. Столбец B и строка B использованы для простановки y и x, выраженных в отклонениях от примерных значений их медиан, причем эти отклонения отнесены к шагу разбиения на интервалы. В результате получились числа натурального ряда: в строке B от -3 до $+3$ и в столбце B от -4 до $+4$. Таким образом, стоящее в строке 3 и в столбце B *число* -2 определяется формулой

$$y = \frac{0{,}25 - 0{,}45}{0{,}10} = -2,$$

где 0,25 и 0,45 *мм* суть числа, отвечающие серединам интервалов (0,20; 0,30) и (0,40; 0,50), а 0,10 *мм* есть шаг разбиения, равный ширине интервала, т. е.

$$\Delta y' = 0{,}30 - 0{,}20 = 0{,}50 - 0{,}40 = 0{,}10.$$

Кроме частот соответствующих пар значений, в клеточках на пересечениях столбцов $1 \div 7$ и строк $1 \div 9$ проставлены еще числа, очерченные уголками в виде $\left|\frac{-4}{-2}\right.$, $\left|\frac{-8}{0}\right.$ и т. д. Верхнее из этих чисел представляет произведение соответствующего y на частоту, а нижнее — произведение x на частоту. Так, например, клеточке (2,1), расположенной на пересечении второго столбца с первой строкой, отвечают значения $x_2 = -2$, $y_1 = -4$, поэтому нижнее число $-2 = -2 \cdot 1$ и верхнее число $-4 = -4 \cdot 1$. Клеточке (4,1) отвечают $x_4 = 0$ и $y_1 = -4$, отсюда обведенные уголками числа равны: нижнее $0 = 0 \cdot 2$ и верхнее $-8 = -4 \cdot 2$.

Столбцы $8 \div 16$ и строки $10 \div 18$ симметричны, поэтому достаточно остановиться только на строках. В строке 10 проставлены итоги по всем столбцам

Таблица 7.3.4

Корреляционная таблица

отклонений от номинального размера диаметров штамповок колец подшипников под $\angle 90°$ (x) и под $\angle 45°$ (y) к плоскости разъема штампов

Диаметр под $\angle 45°$ (y)		Диаметр под $\angle 90°$ (x)																
		A	0,00 0,10	0,10 0,20	0,20 0,30	0,30 0,40	0,40 0,50	0,50 0,60	0,60 0,70								$\bar{x}$	
		B	−3	−2	−1	0	1	2	3	n_y	$n_y y$	$n_y y^2$	$\sum_x n_{xy} x$	$\sum_y n_{xy} x$	$\left(\sum_x n_{xy} x\right)^2$	$\frac{\left(\sum_x n_{xy} x\right)^2}{n_y}$	отн.	мм
A	B		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0,00 0,10	−4	1		−4 / −2 / 1		−8 / 0 / 2				3	−12	48	−2	8	4	1,33	−0,67	0,28
0,10 0,20	−3	2		−6 / −4 / 2	−3 / −1 / 1	−6 / 0 / 2	−3 / 1 / 1	−3 / 2 / 1		7	−21	63	−2	6	4	0,57	−0,29	0,32
0,20 0,30	−2	3	−2 / −3 / 1	−10 / −10 / 5	−20 / −10 / 10	−22 / 0 / 11	−18 / 9 / 9	−12 / 12 / 6		42	−84	164	−2	4	4	0,10	−0,05	0,35
0,30 0,40	−1	4		−4 / −8 / 4	−13 / −13 / 13	−17 / 0 / 17	−11 / 11 / 11	−7 / 14 / 7	−3 / 9 / 3	55	−55	55	13	−13	169	3,07	0,24	0,37
0,40 0,50	0	5	0 / −9 / 3	0 / −6 / 3	0 / −12 / 12	0 / 0 / 16	0 / 9 / 9	0 / 12 / 6	0 / 15 / 5	54	0	0	9	0	81	1,50	0,17	0,37
0,50 0,60	1	6	1 / −3 / 1	3 / −6 / 3	11 / −11 / 11	24 / 0 / 24	15 / 15 / 15	6 / 12 / 6		60	60	60	7	7	49	0,82	0,12	0,36

0,60 0,70	2	7		2 −2 1	14 −7 7	38 0 19	40 20 20	18 18 9	4 6 2	58	116	232	35	70	1225	21,12	0,60	0,41
0,70 0,80	3	8		3 −2 1	12 −4 4	15 0 5	27 9 9	48 32 16	6 6 2	37	111	333	41	123	1681	45,43	1,11	0,46
0,80 0,90	4	9		4 −2 1	4 −1 1			8 4 2		4	16	64	1	4	1	0,25	0,25	0,37
n_x		10	5	21	59	96	74	53	12	320	131	1019	100	209		74,19	0,31	0,38
$n_x x$		11	−15	−42	−59	0	74	106	36	100								
$n_x x^2$		12	45	84	59	0	74	212	108	582								
$\sum_y n_{xy} y$		13	−1	−12	5	24	50	58	7	131								
$x \sum_y n_{xy} y$		14	3	24	−5	0	50	116	21	209								
$\left(\sum_y n_{xy} y\right)^2$		15	1	144	25	576	2500	3364	49									
$\frac{\left(\sum_y n_{xy} y\right)^2}{n_x}$		16	0,20	6,86	0,42	6,00	33,78	63,47	4,08	114,81								
$\bar{y}'$	отн.	17	−0,20	−0,57	0,08	0,25	0,68	1,09	0,58	0,41								
	мм	18	0,43	0,39	0,46	0,47	0,52	0,56	0,51	0,49								

$1 \div 14$, за исключением столбца 13. Таким образом, в клеточках $(1,10) \div (7,10)$ мы получили общие частоты соответствующих x, а в клеточке $(8,10)$ — общее число всех колец, равное 320, представляющее в равной мере сумму по столбцу 8 и по строке 10. Последнее важно для контроля вычислений. В строке 11 мы проставляем произведения x на их частоты. Так, например, в клеточке $(1,11)$ стоит число $-15 = -3 \cdot 5$, а в клеточке $(7,11)$ стоит число $36 = 3 \cdot 12$. В строке 12 проставляем произведение $n_x x^2$, получаемое умножением числа $n_x x$, стоящего строкой выше, на соответствующий x. Так, например, в клеточке $(1,12)$ проставлено число $45 = (-15)(-3)$. В строке 13 проставлены суммы вида $\sum\limits_y n_{xy} y$, т. е. суммы чисел по данному столбцу, обведенных верхними уголками. Так, например, в клеточке $(1,13)$ стоит число $-1 = -2 + 1$, а в клеточке $(7,13)$ — число $7 = -3 + 0 + 4 + 6$. В строке 14 указано произведение $x \sum\limits_y n_{xy} y$, представляющее результат умножения числа строки 13 на число, стоящее в строке B. Так, например, в клеточке $(1,14)$ мы проставляем $3 = (-1)(-3)$, а в клеточке $(7,14)$ проставляем $21 = 7 \cdot 3$.

В строке 15 проставляется квадрат суммы, указанной по строке 13. Так, в частности, в клеточке $(7,15)$ стоит $49 = 7^2$. В строке 16 проставлен тот же квадрат, отнесенный к частоте n_x. Таким образом, в клеточке $(7,16)$ мы получили $4{,}08 = \frac{49}{12}$. В строке 17 подсчитаны условные средние

$$\bar{y}_x = \frac{\sum\limits_y n_{xy} y}{n_x}. \tag{7.3.7}$$

Так, например, в клеточке $(1,17)$ мы получили по формуле (7.3.7):

$$\bar{y}_x = \frac{-1}{5} = -0{,}20.$$

В строке 18 проставлены те же условные средние в миллиметрах. Перевод в миллиметры произведен по формуле (5.2.18). Так, например, в клеточке $(1,18)$ мы получим:

$$\bar{y}' = -0{,}20 \cdot 0{,}10 + 0{,}45 = 0{,}43,$$

где $0{,}10$ — шаг разбиения и $0{,}45$ — условный нуль — середина интервала $(0{,}40;\ 0{,}50)$.

Отметим еще контроль подсчетов, содержащихся в данной таблице. Число, стоящее в клеточке $(9,10)$, должно быть равно числу, стоящему в клеточке $(8,13)$. Число в клеточке $(11,10)$ должно быть равно числу в клеточке $(8,11)$. Число в клеточке $(12,10)$ должно быть равно числу в клеточке $(8,14)$. Остальные итоги проверяются повторными подсчетами.

По составленной корреляционной таблице мы легко вычисляем нужные нам статистические коэффициенты.

Выборочный коэффициент корреляции подсчитываем по формуле (7.3.3′):

$$r = \frac{320 \cdot 209 - 100 \cdot 131}{\sqrt{320 \cdot 582 - 100^2}\ \sqrt{330 \cdot 1019 - 131^2}} = \frac{538 \cdot 10^2}{233 \cdot 10^3} = 0{,}230.$$

Коэффициенты регрессии x по y и y по x вычисляем по формуле (7.3.4):

$$\bar{b}_{Y|X} = \frac{\sqrt{320 \cdot 1019 - 131^2}}{\sqrt{320 \cdot 582 - 100^2}} \cdot 0{,}230 = \frac{556}{420} 0{,}230 = 0{,}304,$$

$$\bar{b}_{X|Y} = \frac{420}{556} 0{,}230 = 0{,}174.$$

Корреляционные отношения определяем по формуле (7.3.6):

$$\bar{\eta}_{Y|X} = \sqrt{\frac{320 \cdot 115 - 131^2}{320 \cdot 1019 - 131^2}} = \frac{140}{556} = 0{,}252,$$

$$\bar{\eta}_{X|Y} = \sqrt{\frac{320 \cdot 74 - 100^2}{320 \cdot 582 - 100^2}} = \frac{117}{420} = 0{,}279.$$

Используя данные строки 18 и столбца 16, мы строим линии регрессии $\bar{x}$ по y и $\bar{y}$ по x (см. черт. 97).

7.3.2. Оценка коэффициента корреляции; его выборочное математическое ожидание, дисперсия и закон распределения. При использовании статистического коэффициента корреляции в качестве оценки коэффициента корреляции генеральной совокупности прежде всего важно знать, является ли он состоятельной и несмещенной оценкой. Из (7.3.3′) следует, что $r \to \rho$ при $n \to \infty$, так как при этом все статистические характеристики, из которых составлен r, будут иметь своим пределом соответствующие параметры распределения. Можно доказать также, что $\mathbf{M}r \neq \rho$. При нормальном распределении исходных величин имеет место следующее соотношение:

$$\mathbf{M}r - \rho \approx -\frac{1}{2n}\rho(1-\rho^2). \tag{7.3.8}$$

Таким образом, $\mathbf{M}r < \rho$ и r является отрицательно смещенной оценкой ρ.

При нормальной корреляции мы имеем также:

$$\sigma_r \approx \frac{1-\rho^2}{\sqrt{n}}. \tag{7.3.9}$$

При выводах формул (7.3.8) и (7.3.9) предполагается, что коэффициент корреляции r получается по выборочным данным при следующих условиях:

1) в течение всех испытаний закон распределения остается постоянным,

2) испытания независимы друг от друга,

3) корреляция нормальная или во всяком случае не слишком сильно отличается от нормальной,

4) число наблюдений n достаточно велико.

При этих же условиях приближенно можно применять следующую оценку среднего квадратического отклонения эмпирического коэффициента регрессии:

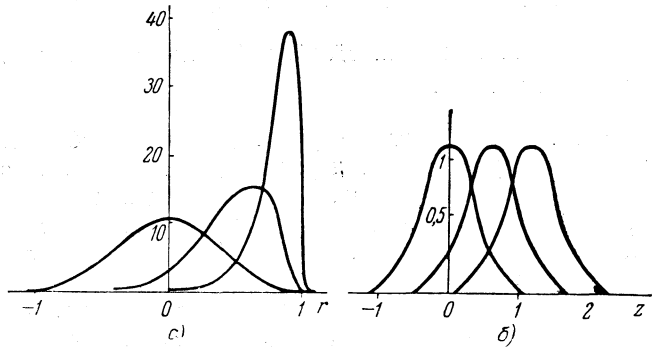
$$\sigma_{\bar{b}_{Y|X}} \sim \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\frac{1-\rho^2}{\sqrt{n}}. \tag{7.3.10}$$

При большом числе наблюдений можно полагать выборочный закон распределения коэффициента корреляции r близким к нормальному. Однако такое утверждение становится все более грубым и, наконец, просто недопустимым с уменьшением n и с увеличением ρ. В самом деле, пусть, например, $\rho = 0{,}9$ и $n = 4$; тогда $\sigma_r \approx \frac{1-0{,}9^2}{\sqrt{4}} = 0{,}095$. Учитывая, что $|r|$ не может быть больше 1, мы заключаем, что все значения r, выходящие за границу $+1$, отстоящую от центра на величину

$$\frac{1-0{,}9}{0{,}095}\sigma_r = 1{,}05\sigma_r,$$

невозможны; между тем, вероятность таких отклонений при нормальном распределении должна равняться 0,1469 (если пренебречь пока смещением центра распределения r) (черт. 98). Ясно, что допущение в этом случае нормального закона было бы слишком грубым. С другой стороны, при $\rho = 0$ и $n = 100$ мы имеем

$\sigma_r = \frac{1-0}{\sqrt{100}} = 0{,}1$; при допущении нормального закона вероятность отклонений, превышающих $\frac{1-0}{0{,}1}\sigma_r = 10\sigma_r$, равна всего лишь $2 \cdot 10^{-23}$; на самом деле эта вероятность равна нулю. Из этих примеров видно, что с увеличением n и при



Черт. 98. Графики плотностей вероятности для коэффициента корреляции r ($а$) и для $z = \frac{1}{r}\ln\frac{1+r}{1-r}$ ($б$) в выборках из нормальной совокупности при $n = 10$.

небольших ρ допущение нормального закона распределения для r все более правдоподобно.

Для целей оценки во многих случаях оказывается удобным использовать преобразование, введенное Р. Фишером:

$$Z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r}, \quad r = \operatorname{th} Z, \tag{7.3.11}$$

где $\operatorname{th} Z$ — гиперболический тангенс при аргументе Z. Р. Фишер показал, что величина Z уже при небольших значениях n с хорошим приближением следует нормальному закону с математическим ожиданием и дисперсией, задаваемыми приближенными выражениями параметров:

$$\mathbf{M}Z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\rho}{1-\rho} + \frac{\rho}{2(n-1)}, \tag{7.3.12}$$

$$\mathbf{D}Z = \frac{1}{n-3}, \quad \sigma_Z = \frac{1}{\sqrt{n-3}}. \tag{7.3.13}$$

Таким образом, величина σ_Z, а значит, и форма нормального (приближенного) распределения величины Z не зависят от ρ.

При использовании преобразования (7.3.11) иногда для оценки a_Z, руководствуясь (7.3.12), вводят поправку на систематическую ошибку и в качестве оценки $a_Z = \mathbf{M}Z$ берут:

$$Z' = Z + \Delta Z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r} + \frac{r}{2(n-1)}. \tag{7.3.14}$$

При больших n и небольших r (меньших 0,5) мы можем при построении доверительных границ с достаточной степенью приближения использовать нормальный закон распределения. В этом случае доверительным интервалом для ρ будет интервал

$$r - \alpha\frac{1-r^2}{\sqrt{n}} < \rho < r + \alpha\frac{1-r^2}{\sqrt{n}}, \tag{7.3.15}$$

где α — коэффициент, зависящий от уровня доверительной вероятности P и определяемый в данном случае из соотношения

$$P = 2\Phi(\alpha).$$

В порядке приближения величина ρ^2 заменяется выборочной оценкой r^2.

Аналогично этому доверительный интервал для коэффициента регрессии $b_{Y|X}$ имеет вид

$$\bar{b}_{Y|X} - \alpha \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \frac{1-r^2}{\sqrt{n}} < b_{Y|X} < \bar{b}_{Y|X} + \alpha \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \frac{1-r^2}{\sqrt{n}}.$$

Более точная оценка этих коэффициентов рассматривается в **7.6.2**.

Если число n мало (например, меньше 10), то обычно на практике может итти речь лишь об оценке очень высоких коэффициентов корреляции. В этом случае кривая распределения последних становится резко асимметричной, вследствие чего приходится прибегать к преобразованию (7.3.11). Здесь используют таблицы гиперболических функций и функций Лапласа (см. табл. XXX и IV приложений).

Пример 7.3.3. Пусть требуется оценить коэффициент корреляции ρ и коэффициенты регрессии $b_{Y|X}$ и $b_{X|Y}$ с доверительной вероятностью $P = 0{,}95$ по данным примера 7.3.2.

Принимая $\sigma_Y \approx s_Y$, $\sigma_X \approx s_X$ и $\rho \approx r$, по формуле (7.3.9) вычисляем:

$$\sigma_r \approx \frac{1-0{,}230^2}{\sqrt{320}} = 0{,}054.$$

По табл. VII приложений при $P = 0{,}95$ находим $\beta = +1{,}96$, $\alpha = -1{,}96$, и доверительный интервал для ρ будет

$$0{,}230 - 1{,}96 \cdot 0{,}054 < \rho < 0{,}230 + 1{,}96 \cdot 0{,}054$$

или

$$0{,}124 < \rho < 0{,}336.$$

Далее, по данным примера 7.3.2 с помощью формулы (5.2.22) находим:

$$s_Y = \frac{556}{320} \cdot 0{,}10 = 0{,}174 \quad \text{и} \quad s_X = \frac{420}{320} \cdot 0{,}10 = 0{,}131.$$

Среднее квадратическое отклонение коэффициента регрессии находим по формуле (7.3.10), заменяя в ней теоретические параметры их выборочными оценками:

$$\sigma_{\bar{b}_{Y|X}} \approx \frac{0{,}174}{0{,}131} \cdot \frac{1-0{,}230^2}{\sqrt{320}} = 0{,}071,$$

$$\sigma_{\bar{b}_{X|Y}} \approx \frac{0{,}131}{0{,}174} \cdot \frac{1-0{,}230^2}{\sqrt{320}} = 0{,}040.$$

Тогда, используя опять результаты примера 7.3.2, для коэффициентов регрессии при той же доверительной вероятности $P = 0{,}95$ мы будем иметь:

$$0{,}304 - 1{,}96 \cdot 0{,}071 < b_{Y|X} < 0{,}304 + 1{,}96 \cdot 0{,}071$$

и

$$0{,}174 - 1{,}96 \cdot 0{,}040 < b_{X|Y} < 0{,}174 + 1{,}96 \cdot 0{,}040$$

или

$$0{,}167 < b_{Y|X} < 0{,}441$$

и

$$0{,}096 < b_{X|Y} < 0{,}252.$$

Пример 7.3.4. Пусть требуется оценить с доверительной вероятностью $P = 0{,}95$ коэффициент корреляции ρ между браком по завышенным фаскам и

браком по завышенному наружному диаметру штамповок колец под $\angle 90°$ к плоскости разъема штампа по статистическому коэффициенту корреляции $r=0{,}84$, если последний подсчитан по выборке объема $n=12$.

По табл. XXX приложений при $r=0{,}84$ находим: $Z=1{,}221$.

По формуле (7.3.13) получаем:

$$\sigma_Z=\frac{1}{\sqrt{12-3}}=\frac{1}{3},$$

откуда при доверительной вероятности 0,95 имеем $1{,}221-1{,}96\frac{1}{3}<Z<1{,}221+1{,}96\cdot\frac{1}{3}$, что дает для ρ (определяемого опять-таки по таблицам гиперболических функций)

$$0{,}515<\rho<0{,}954.$$

Можно несколько уточнить нашу оценку, введя поправку по формуле (7.3.14) на систематическую ошибку:

$$\Delta Z=\frac{0{,}84}{2(12-1)}=0{,}038,$$

откуда Z' (без систематической ошибки) будет:

$$Z'=1{,}221-0{,}038=1{,}183.$$

Теперь будем иметь:

$$1{,}183-1{,}96\cdot\frac{1}{3}<Z<1{,}183+1{,}96\cdot\frac{1}{3},$$

откуда для ρ по тем же таблицам получим:

$$0{,}485<\rho<0{,}950.$$

Мы видим, что в нашем случае уточнение оказалось незначительным.

7.3.3. Проверка гипотезы об отсутствии корреляционной связи. При проведении корреляционного анализа прежде всего возникает вопрос о реальности связи, т. е. о том, являются ли полученные из наблюдений коэффициенты корреляции значимыми и не объясняется ли их получение случайностями выборки. Таким образом, требуется проверить гипотезу $\rho=0$. В качестве критерия в этом случае служит эмпирический коэффициент корреляции r. Пользуясь при больших выборках соотношением (7.3.9) и при малых формулой (7.3.13) (Z-преобразованием), строят критическую область вида

$$|r|>t\sigma_r \qquad (7.3.16)$$

для данного уровня значимости α, и если полученное по данным выборки значение r окажется в этой области, то гипотезу $\rho=0$ отбрасывают.

Пример 7.3.5. Пусть требуется проверить реальность корреляционных связей, обнаруженных в примерах 7.3.2 и 7.3.4. Пользуясь 1%-ным уровнем значимости по табл. VII приложений, находим $t=2{,}58$. Тогда по условиям примера 7.3.2 критическая область будет:

$$|r|>2{,}58\cdot 0{,}054=0{,}139,$$

мы же в примере 7.3.2 получили значение $r=0{,}230$. Таким образом, с вероятностью не менее 0,99 мы можем считать, что корреляционная связь между диаметрами штамповки под $\angle 90°$ и под $\angle 45°$ к плоскости разъема действительно имеет место.

Во втором случае по условиям примера 7.3.4 критическая область будет:

$$|r|>2{,}58\cdot\frac{1}{3}=0{,}86.$$

По выборочным данным мы получили $r = 0{,}84$. Таким образом, гипотеза $\rho = 0$ согласуется с данными опыта. Этот результат показывает, что проведение корреляционного анализа по малому числу наблюдений является мало эффективным.

7.3.4. Проверка гипотезы о криволинейности корреляционной связи. Ранее мы уже указывали, что в большинстве случаев на практике следует ожидать, что если корреляционная связь имеется, то она скорее всего является прямолинейной. Это заключение вытекает из рассмотрения нормальной корреляции и распространения нормального распределения. Однако при пользовании коэффициентами регрессии бывает важно знать, в какой мере является обоснованным предположение о прямолинейности действительной корреляционной связи. В этом случае мы можем отправляться от равенства $|\rho| = \eta_{Y|X} = \eta_{X|Y}$ и посмотреть, насколько эти равенства согласуются с опытом.

Пример 7.3.6. Пусть по данным примера 7.3.2 требуется проверить гипотезу о криволинейности корреляционной связи.

В примере 7.3.3 мы видели, что доверительный интервал для ρ по указанным данным составляет $0{,}124 < \rho < 0{,}336$.

Корреляционные отношения $\eta_{Y|X}$ и $\eta_{X|Y}$, построенные в примере 7.3.2, $\overline{\eta}_{Y|X} = 0{,}252$ и $\overline{\eta}_{X|Y} = 0{,}279$ будут покрываться доверительным интервалом для ρ. Поэтому в данном случае мы должны считать, что гипотеза прямолинейной регрессии не противоречит данным опыта, и связь между диаметрами под $\angle 90°$ и под $\angle 45°$ можно считать прямолинейной.

Поставленный вопрос может быть решен еще и с помощью F-распределения. В этом случае мы строим критерий:

$$F = \frac{(n-l)\,(\overline{\eta}^2_{Y|X} - r^2)}{(l-2)\,(1-\overline{\eta}^2_{Y|X})}, \tag{7.3.17}$$

где n — общее число наблюдений, l — число значений x в корреляционной таблице (т. е. число столбцов в ней), $\eta_{Y|X}$ — корреляционное отношение Y по x, r — коэффициент корреляции. Критерий (7.3.17) имеет F-распределение с числами степеней свободы $k_1 = l - 2$ и $k_2 = n - l$. Если при вычислении критерия числитель окажется меньше знаменателя, то их нужно поменять местами, поменяв при этом местами и числа степеней свободы. Критическая область в этом случае будет определяться неравенством $F > F_q$, где F_q — $q\%$-ный предел.

Пример 7.3.7. Пусть требуется проверить гипотезу о прямолинейности корреляционной связи по условиям примера 7.3.2 при помощи критерия F при доверительной вероятности 0,95.

По формуле (7.3.17) находим:

$$F_{Y|X} = \frac{(320-7)\,(0{,}252^2 - 0{,}230^2)}{(7-2)\,(1-0{,}252^2)} = \frac{3{,}32}{4{,}68}$$

и

$$F_{X|Y} = \frac{(320-9)\,(0{,}279^2 - 0{,}230^2)}{(9-2)\,(1-0{,}279^2)} = 1{,}202.$$

Меняя в первом случае числитель и знаменатель местами, получаем:

$$F_{Y|X} = \frac{4{,}68}{3{,}32} = 1{,}410.$$

По табл. XX приложений находим для $P = 0{,}95$:

а) при $k_1 = 313$ и $k_2 = 5$
$F_5 = 4{,}38$;

б) при $k_1 = 7$ и $k_2 = 311$
$F_5 = 2{,}04$.

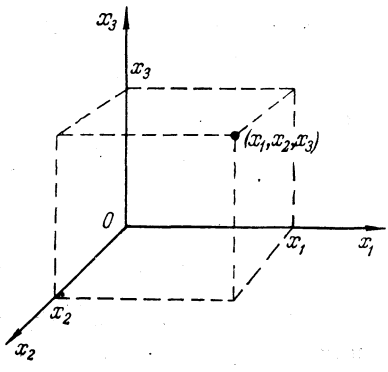
Полученные нами значения лежат в области допустимых значений. Таким образом, гипотеза о прямолинейности не противоречит опыту.

§ 4 Множественная корреляция

7.4.1. Общее понятие о множественной корреляции. Случай трех величин. До сих пор мы рассматривали корреляционную связь всего лишь между двумя случайными величинами и познакомились с методами оценки тесноты и формы этой связи. Однако на практике очень часто встречаются случаи, когда

число сопряженных переменных бывает больше двух и это обстоятельство вносит в методы анализа связей между ними дополнительные трудности и усложнения.

Здесь мы рассмотрим лишь наиболее важный для практики и сравнительно более простой случай *линейной* и приближенно линейной корреляции многих переменных.



Черт. 99. Геометрическая интерпретация результата совместного наблюдения над тремя величинами X_1, X_2 и X_3.

Возьмем сначала только три сопряженные случайные величины X_1, X_2 и X_3. Такими величинами могут, например, быть три каких-либо признака качества некоторого изделия (скажем, овальность, конусность и огранка валика). Результат каждого совместного наблюдения над тремя величинами может быть геометрически изображен в виде точки, отвечающей трем координатам x_1, x_2 и x_3 (черт. 99). При большом числе наблюдений эти точки дают как бы облако или некоторое «поле корреляции», которое в различных местах имеет различную плотность.

Если связь между случайными величинами X_1, X_2, X_3 и носит стохастический характер, то мы в первую очередь интересуемая условными математическими ожиданиями каждой величины, например X_1, при фиксированных значениях двух других $X_2 = x_2$ и $X_3 = x_3$. Это условное математическое ожидание определяется аналогично двумерному случаю одной из следующих формул, смотря по тому, будет ли распределение величин дискретным или непрерывным:

$$\mathbf{M}\left(X_1 \,\middle|\, \begin{matrix} X_2 = x_2 \\ X_3 = x_3 \end{matrix}\right) = \bar{x}_1(x_2, x_3) = \frac{\sum\limits_{x_1} x_1 p(x_1, x_2, x_3)}{\sum\limits_{x_1} p(x_1, x_2, x_3)} = \sum_{x_1} x_1 p(x_1 \mid x_2, x_3) \qquad (7.4.1)$$

или

$$\bar{x}_1(x_2, x_3) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1 \varphi_{x_1 x_2 x_3}(x_1, x_2, x_3)\, dx_1}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_{x_1 x_2 x_3}(x_1, x_2, x_3)\, dx_1} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1 \varphi_{x_1}(x_1 \mid x_2, x_3)\, dx_1. \qquad (7.4.2)$$

В этих формулах $p(x_1 \mid x_2, x_3)$ и $\varphi_{x_1}(x_1 \mid x_2, x_3)$ — условная вероятность и соответственно плотность вероятности X_1 при данных значениях двух других переменных.

В координатном пространстве (x_1, x_2, x_3) функция $\bar{x}_1 = \bar{x}_1(x_2, x_3)$ изобразится поверхностью, носящей название *поверхности регрессии* X_1 по X_2 и X_3. Аналогично определяются и две другие поверхности регрессии: $\bar{x}_2 = \bar{x}_2(x_1, x_3)$ и $\bar{x}_3 = \bar{x}_3(x_1, x_2)$.

Корреляционная связь между величинами X_1, X_2 и X_3 называется *линейной*, если поверхности регрессии являются плоскостями и функция $\bar{x}_1(x_2, x_3)$ линейна относительно аргументов, например

$$\bar{x}_1(x_2, x_3) = a_{10} + x_2 a_{12} + x_3 a_{13}$$

— уравнение плоскости регрессии X_1 по X_2 и X_3. Коэффициенты в уравнении плоскости регрессии можно выразить через моменты первого и второго порядка и ковариации величин X_1, X_2 и X_3, которые оцениваются по данным наблюдения. Уравнения регрессии мы можем использовать для прогноза ожидаемого значения X_1 при надлежащих значениях $X_2 = x_2$ и $X_3 = x_3$. Точность этого прогноза зависит от тесноты и формы корреляционной связи.

Рассматривая случаи связи, близкие к линейной корреляции, мы попытаемся разложить величину X_1 на два компонента $\widehat{X}_1$ и $X_{1.23}$ так, что $X_1 = \widehat{X}_1 + X_{1.23}$, где $\widehat{X}_1$ есть компонент, точно прогнозируемый с помощью линейной функции и притом так, что второй компонент — остаток $X_{1.23}$ имеет минимальную возможную дисперсию. Мы должны, следовательно, найти такую линейную функцию:

$$\widehat{X}_1(X_2, X_3) = a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + a_{10},$$

чтобы разность

$$X_1 - \widehat{X}_1 = X_{1.23}$$

имела минимальную дисперсию

$$H(a_{10}, a_{12}, a_{13}) = \mathbf{M}(X_1 - \widehat{X}_1)^2 = \mathbf{M}(X_1 - a_{12}X_2 - a_{13}X_3 - a_{10})^2 = \text{минимум}. \quad (7.4.3)$$

Линейная функция X_1 называется *средней квадратической регрессией* X_1 по (X_2, X_3). Чтобы несколько упростить задачу, мы допустим, что величины X_1, X_2 и X_3 центрированы так, что $a_{X_1} = a_{X_2} = a_{X_3} = 0$. Этого всегда можно достигнуть, заменяя в наших дальнейших рассуждениях X_i на $X_i' = X_i - a_{X_i}$ и в нужный момент возвращаясь снова от X_i' к прежним X_i.

Дифференцируем $H(a_{10}, a_{12}, a_{13})$ по параметрам и приравниваем по правилам дифференциального исчисления частные производные нулю (при этом мы переставливаем порядок знаков математических ожиданий и производной):

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial a_{10}} = \mathbf{M}(X_1 - a_{12}X_2 - a_{13}X_3 - a_{10}) = 0,$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial a_{12}} = \mathbf{M}[(X_1 - a_{12}X_2 - a_{13}X_3 - a_{10})X_2] = 0,$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial a_{13}} = \mathbf{M}[(X_1 - a_{12}X_2 - a_{13}X_3 - a_{10})X_3] = 0.$$

Первое уравнение дает:

$$a_{X_1} - a_{12}a_{X_2} - a_{13}a_{X_3} - a_{10} = 0,$$

и ввиду сделанного допущения (о центрированности величин)

$$a_{10} = 0.$$

Два других уравнения мы можем переписать так: замечая, что $\mathbf{M}(X_i \cdot X_k) = \rho_{ik}\sigma_i\sigma_k$ при $i \neq k$, где ρ_{ik} — коэффициент корреляции между величинами X_i и X_k ($\rho_{ik} = \rho_{ki}$), напишем:

$$a_{12}\sigma_2^2 + a_{13}\rho_{32}\sigma_3\sigma_2 = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2,$$

$$a_{12}\sigma_2\sigma_3\rho_{32} + a_{13}\sigma_3^2 = \rho_{13}\sigma_1\sigma_3.$$

Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} \sigma_2^2 & \rho_{23}\sigma_3\sigma_2 \\ \sigma_3\sigma_2\rho_{23} & \sigma_3^2 \end{vmatrix} = \sigma_2^2\sigma_3^2 \begin{vmatrix} 1 & \rho_{23} \\ \rho_{23} & 1 \end{vmatrix} = (1 - \rho_{23}^2)\sigma_2^2\sigma_3^2 = \Delta_{11}\sigma_2^2\sigma_3^2,$$

где

$$\Delta_{11} = 1 - \rho_{23}^2, \quad (7.4.4)$$

отличен от нуля, если предположить $\rho_{23} \neq 1$. В случае же $\rho_{23} = 1$ величины X_2 и X_3 связаны линейной зависимостью и вместо трехмерной задачи мы будем

иметь рассмотренную выше двумерную. Исключая этот случай и решая систему с помощью определителей, найдем:

$$a_{12}=\frac{1}{\Delta_{11}\sigma_2^2\sigma_3^2}\begin{vmatrix}\rho_{21}\sigma_1\sigma_2 & \rho_{23}\sigma_3\sigma_2\\ \rho_{31}\sigma_1\sigma_3 & \sigma_3^2\end{vmatrix}=\frac{\sigma_1\sigma_2\sigma_3^2}{\Delta_{11}\sigma_2^2\sigma_3^2}\begin{vmatrix}\rho_{21} & \rho_{23}\\ \rho_{31} & 1\end{vmatrix}=-\frac{\sigma_1\Delta_{12}}{\sigma_2\Delta_{11}}, \tag{7.4.5}$$

где

$$\Delta_{12}=-\begin{vmatrix}\rho_{12} & \rho_{23}\\ \rho_{31} & 1\end{vmatrix}=\rho_{23}\rho_{31}-\rho_{12}. \tag{7.4.6}$$

Аналогично

$$a_{13}=\frac{1}{\Delta_{11}\sigma_2^2\sigma_3^2}\begin{vmatrix}\sigma_2^2 & \rho_{21}\sigma_1\sigma_2\\ \sigma_2\sigma_3\rho_{32} & \rho_{31}\sigma_1\sigma_3\end{vmatrix}=\frac{\sigma_2^2\sigma_1\sigma_3}{\Delta_{11}\sigma_2^2\sigma_3^2}\begin{vmatrix}1 & \rho_{21}\\ \rho_{32} & \rho_{31}\end{vmatrix}=-\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\frac{\Delta_{13}}{\Delta_{11}}, \tag{7.4.7}$$

где

$$\Delta_{13}=\begin{vmatrix}\rho_{21} & 1\\ \rho_{31} & \rho_{32}\end{vmatrix}=\rho_{21}\rho_{32}-\rho_{31}. \tag{7.4.8}$$

Δ_{11}, Δ_{12} и Δ_{13}, как легко видеть, являются алгебраическими дополнениями элементов первой строки определителя

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & \rho_{12} & \rho_{13}\\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23}\\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1\end{vmatrix}. \tag{7.4.9}$$

Другими словами, Δ_{11} получается из Δ вычеркиванием первой строки и первого столбца, Δ_{12} получается вычеркиванием первой строки и второго столбца, причем у получившегося таким образом определителя берут знак минус; наконец, Δ_{13} получается вычеркиванием первой строки и третьего столбца из Δ.

Уравнение линейной функции $\widehat{X}_1$ может быть записано теперь в виде

$$\widehat{X}_1=-\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}}X_2-\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\frac{\Delta_{13}}{\Delta_{11}}X_3 \tag{7.4.10}$$

или, если вернуться к нецентрированным переменным,

$$\widehat{X}_1-a_{X_1}=-\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{13}}(X_2-a_{X_2})-\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\frac{\Delta_{13}}{\Delta_{11}}(X_3-a_{X_3}). \tag{7.4.11}$$

Найденная нами линейная функция $\widehat{X}_1(X_2, X_3)$ представляет наилучшую линейную оценку X_1 по данным значениям величин X_2 и X_3. Покажем теперь, что остаток $X_{1\cdot 23}=X-\widehat{X}_1$ линейно не коррелирован ни с X_2, ни с X_3, т. е. коэффициенты корреляции $\rho(X_{1\cdot 23}, X_2)=\rho(X_{1\cdot 23}, X_3)=0$.

В самом деле, считая все величины центрированными, будем иметь согласно (7.4.10):

$$X_{1\cdot 23}=X_1-\widehat{X}_1=X_1+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}}X_2+\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\frac{\Delta_{13}}{\Delta_{11}}X_3 \tag{7.4.12}$$

или

$$\frac{X_{1\cdot 23}}{\sigma_1}=\frac{X_1-\widehat{X}_1}{\sigma_1}=\frac{1}{\Delta_{11}}\left(\frac{X_1\Delta_{11}}{\sigma_1}+\frac{X_2\Delta_{12}}{\sigma_2}+\frac{X_3\Delta_{13}}{\sigma_3}\right)$$

и далее

$$\mathbf{M}\left(\frac{X_{1\cdot 23}}{\sigma_1}\cdot\frac{X_1}{\sigma_1}\right)=\frac{\Delta_{11}+\rho_{12}\Delta_{12}+\rho_{13}\Delta_{13}}{\Delta_{11}}=\frac{\Delta}{\Delta_{11}}, \tag{7.4.13}$$

так как числитель предшествующего равенства представляет разложение определителя Δ по элементам верхней строки. Далее

$$\mathbf{M}\left(\frac{X_{1\cdot 23}}{\sigma_1}\cdot\frac{X_2}{\sigma_2}\right)=\frac{1}{\Delta_{11}}(\rho_{12}\Delta_{11}+\Delta_{12}+\rho_{23}\Delta_{13})=0, \tag{7.4.14}$$

так как в скобках стоит аналогичное разложение определителя, который получается из Δ, если первую его строку заменить второй так, что получается определитель с двумя равными строками и, значит, равный нулю.

Аналогично

$$\mathbf{M}\left(\frac{X_{1\cdot 23}}{\sigma_1}\frac{X_3}{\sigma_3}\right)=0. \tag{7.4.15}$$

Итак, остаток $X_{1\cdot 23}$ линейно некоррелирован с X_2 и X_3. Покажем теперь, как выражается его дисперсия, которую обозначим через $\sigma^2_{1\cdot 23}$.

Согласно (7.4.12) дисперсия линейной функции, имеющей математическое ожидание, равное нулю, представится так:

$$\sigma^2_{1\cdot 23}=\mathbf{D}X_{1\cdot 23}=\mathbf{M}X^2_{1\cdot 3}=\mathbf{M}\left[X_{1\cdot 23}\left(X_1+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}}X_2+\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\frac{\Delta_{13}}{\Delta_{11}}X_3\right)\right]=$$

$$=\mathbf{M}(X_{1\cdot 23}X_1)+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}}\mathbf{M}(X_{1\cdot 23}X_2)+\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\frac{\Delta_{13}}{\Delta_{11}}\mathbf{M}(X_{1\cdot 23}X_3).$$

Принимая во внимание (7.4.13), (7.4.14) и (7.4.15), найдем:

$$\sigma^2_{1\cdot 23}=\mathbf{M}(X_{1\cdot 23}X_1)=\frac{\Delta}{\Delta_{11}}\sigma^2_1. \tag{7.4.16}$$

Или, раскладывая определитель, напишем явное выражение для $\sigma^2_{1\cdot 23}$:

$$\sigma^2_{1\cdot 23}=\frac{1+2\rho_{12}\rho_{23}\rho_{31}-\rho^2_{13}-\rho^2_{23}-\rho^2_{12}}{1-\rho^2_{23}}\sigma^2_1. \tag{7.4.17}$$

Эта величина оценивает точность линейного приближения к величине X_1 посредством двух других величин.

Рассмотрим теперь коэффициент корреляции между X_1 и $\widehat{X}_1(X_2, X_3)$—линейным приближением к X_1. Этот коэффициент мы будем рассматривать как характеристику связи между X_1 и совокупностью других переменных, т. е. X_2 и X_3. Такой показатель называется *сводным, или полным коэффициентом корреляции* и обозначается через $\rho_{1\cdot(23)}$.

Так как $\widehat{X}_1=X_1-X_{1\cdot 23}$, то, принимая во внимание (7.4.13) и (7.4.15), найдем:

$$\mathbf{M}(X_1\widehat{X}_1)=\sigma^2_1-\mathbf{M}(X_1X_{1\cdot 23})=\sigma^2_1-\sigma^2_1\frac{\Delta}{\Delta_{11}}=\sigma^2_1\left(1-\frac{\Delta}{\Delta_{11}}\right),$$

$$\mathbf{M}\widehat{X}^2_1=\mathbf{M}(X_1-X_{1\cdot 23})^2=\sigma^2_1-2\mathbf{M}(X_1X_{1\cdot 23})+\mathbf{M}X^2_{1\cdot 23}=$$

$$=\sigma^2_1-2\sigma^2_1\frac{\Delta}{\Delta_{11}}+\frac{\Delta}{\Delta_{11}}\sigma^2_1=\sigma^2_1\left(1-\frac{\Delta}{\Delta_{11}}\right)>0. \tag{7.4.18}$$

Следовательно,

$$\rho_{1\cdot(23)}=\frac{\mathbf{M}(X_1\widehat{X}_1)}{\sigma_{X_1}\sigma_{\widehat{X}_1}}=\frac{\sigma^2_1\left(1-\frac{\Delta}{\Delta_{11}}\right)}{\sigma^2_1\sqrt{1-\frac{\Delta}{\Delta_{11}}}}=\sqrt{1-\frac{\Delta}{\Delta_{11}}} \tag{7.4.19}$$

или

$$\rho_{1\cdot(23)}=\sqrt{1-\frac{\sigma^2_{1\cdot 23}}{\sigma^2_1}}=\sqrt{\frac{\rho^2_{12}+\rho^2_{13}-2\rho_{12}\rho_{23}\rho_{31}}{1-\rho^2_{23}}}. \tag{7.4.20}$$

$\rho_{1\cdot(23)}$ содержится всегда между нулем и единицей. Когда $\rho_{1\cdot(23)}=1$, то $\sigma_{1\cdot 23}=0$ и потому $X_{1\cdot 23}=0$ и X_1 совпадает с линейной функцией $\widehat{X}_1(X_2, X_3)$ величин X_2 и X_3. В этом случае все распределение масс вероятностей сосредоточено на

некоторой плоскости трехмерного пространства — плоскости регрессии X_1 по X_2X_3. Заметим еще, что из (7.4.20) следует

$$\sigma^2_{1\cdot 23} = \sigma^2_1(1 - \rho^2_{1\cdot(23)}). \tag{7.4.21}$$

Если бы мы рассматривали корреляцию между X_1 и каким-либо одним из переменных, например X_2, то могли бы найти дисперсию остатка, получаемого вычитанием из X_1 его наилучшего линейного приближения по X_2

$$\Sigma^2_{1,0} = \sigma^2_1(1 - \rho^2_{12}). \tag{7.4.22}$$

Очевидно, привлекая новое переменное, мы имеем возможность получить более точное линейное приближение, так как варьируем двумя коэффициентами при X_2 и X_3, а не одним.

Поэтому

$$\sigma^2_{1\cdot 23} \leqslant \Sigma^2_{1,0}.$$

Из (7.4.21) и (7.4.22) следует

$$1 - \rho^2_{1\cdot(23)} \leqslant (1 - \rho^2_{12}),$$

откуда

$$\rho_{1\cdot(23)} \geqslant |\rho_{12}| \tag{7.4.23}$$

и аналогично

$$\rho_{1\cdot(23)} \geqslant |\rho_{13}|. \tag{7.4.24}$$

Таким образом, сводный коэффициент корреляции не меньше, чем наибольший из коэффициентов корреляции величины X_1 с каждой из величин X_2 и X_3 в отдельности. Поэтому из равенства $\rho_{1\cdot(23)} = 0$ следует, что X_1 линейно не коррелирует ни с одной из величин X_2 и X_3, т. е. $\rho_{12} = \rho_{13} = 0$.

Отметим еще, что если X_2 и X_3 линейно не коррелированы и $\rho_{23} = 0$, то из (7.4.19) следует:

$$\rho^2_{1\cdot(23)} = \rho^2_{12} + \rho^2_{13}. \tag{7.4.25}$$

Посмотрим, в каком случае $\rho_{1\cdot(23)} = |\rho_{12}|$.

Рассмотрим разность $\rho^2_{1\cdot(23)} - \rho^2_{12}$. Согласно (7.4.20)

$$\rho^2_{1\cdot(23)} - \rho^2_{12} = \frac{\rho^2_{13} + \rho^2_{12} - 2\rho_{12}\rho_{23}\rho_{31}}{1 - \rho^2_{23}} - \rho^2_{12} = \frac{\rho^2_{13} - 2\rho_{12}\rho_{23}\rho_{31} + \rho^2_{23}\rho^2_{12}}{1 - \rho^2_{23}} = \frac{(\rho_{13} - \rho_{23}\rho_{12})^2}{1 - \rho^2_{23}}.$$

Следовательно, равенство $\rho_{1\cdot(23)} = |\rho_{12}|$ возможно лишь в случае

$$\rho_{13} = \rho_{12}\rho_{23}. \tag{7.4.26}$$

В этом случае введение переменной X_3 в линейную формулу прогноза X_1 бесполезно.

Совершенно аналогичным образом могут быть построены средние квадратические регрессии X_2 по X_1X_3 и X_3 по X_1X_2. Для того чтобы их записать, мы введем особое обозначение для коэффициентов регрессий. Мы их будем обозначать с помощью одной и той же буквы a с индексами. Эти индексы разбиваются на две группы: первая группа состоит из двух индексов (первичных) — индекса зависимого, т. е. приближаемого (или прогнозируемого) переменного, на первом месте и индекса переменного, при котором стоит данный коэффициент. Вторая группа индексов (вторичных), отделенная от первой точкой, состоит из номеров всех переменных, не вошедших в первую группу и расположенных в произвольном порядке. Так, при пяти переменных $X_1X_2X_3X_4X_5$ коэффициент при X_3 в уравнении средней квадратической регрессии X_2 по совокупности четырех переменных $X_1X_3X_4X_5$ будет обозначаться так: $a_{23\cdot 145}$ или $a_{23\cdot 451}$ и т. д.

В этих обозначениях три линии регрессии записываются так:

$$\widehat{X}_1 - a_1 = a_{12\cdot 3}(X_2 - a_2) + a_{13\cdot 2}(X_3 - a_3),$$
$$\widehat{X}_2 - a_2 = a_{21\cdot 3}(X_1 - a_1) + a_{23\cdot 1}(X_3 - a_3),$$
$$\widehat{X}_3 - a_3 = a_{31\cdot 2}(X_1 - a_1) + a_{32\cdot 1}(X_2 - a_2),$$

где

$$a_i = a_{x_i} = \mathbf{M}(x_i) \qquad (i = 1,\ 2,\ 3).$$

Коэффициент $a_{ik\cdot\ldots}$, каковы бы ни были индексы второй группы, определяется формулой

$$a_{ik\cdot\ldots} = \frac{\sigma_i}{\sigma_k}\frac{\Delta_{ik}}{\Delta_{ii}}, \tag{7.4.27}$$

т. е. вполне определяется индексами первой группы. Здесь Δ_{ik} — алгебраическое дополнение элемента r_{ik} (или $r_{ii} = 1$ при $i = k$) в определителе Δ, т. е. определитель, получаемый вычеркиванием i-й строки и k-го столбца, на пересечении которых находится r_{ik}, умноженный на $(-1)^{i+k}$ — последний множитель равен $+1$ или -1, смотря по тому, будет ли четной или нечетной сумма $i + k$.

Для оценки точности линейного прогноза служат дисперсии остатков; их выражение определяется первым индексом — номером приближаемого переменного.

Например, при трех переменных мы имеем:

$$\sigma^2_{1\cdot 23} = \frac{\Delta}{\Delta_{11}}\sigma_1^2; \quad \sigma^2_{2\cdot 13} = \frac{\Delta}{\Delta_{22}}\sigma_2^2; \quad \sigma^2_{3\cdot 12} = \frac{\Delta}{\Delta_{33}}\sigma_3^2 \tag{7.4.28}$$

и соответствующие выражения для трех сводных коэффициентов корреляции будут:

$$\left.\begin{aligned} \rho^2_{1\cdot(23)} &= 1 - \frac{\sigma^2_{1\cdot 23}}{\sigma_1^2} = 1 - \frac{\Delta}{\Delta_{11}}, \\ \rho^2_{2\cdot(13)} &= 1 - \frac{\sigma^2_{2\cdot 13}}{\sigma_2^2} = 1 - \frac{\Delta}{\Delta_{22}}, \\ \rho^2_{3\cdot(12)} &= 1 - \frac{\sigma^2_{3\cdot 12}}{\sigma_3^2} = 1 - \frac{\Delta}{\Delta_{33}}. \end{aligned}\right\} \tag{7.4.29}$$

Здесь

$$\Delta_{11} = 1 - \rho^2_{23}, \quad \Delta_{22} = 1 - \rho^2_{13}, \quad \Delta_{33} = 1 - \rho^2_{12}$$

и

$$\Delta = 1 + 2\rho_{12}\rho_{23}\rho_{13} - \rho^2_{13} - \rho^2_{23} - \rho^2_{12}.$$

Формулы, которые мы вывели для коэффициентов средней квадратической регрессии при трех переменных, остаются справедливыми при любом числе переменных, если под Δ понимать определитель, составленный аналогичным образом из коэффициентов корреляции всех рассматриваемых переменных, а под Δ_{ik} — алгебраическое дополнение элемента r_{ik} в данном определителе.

Заметим еще, что если корреляция строго линейная, то истинные плоскости регрессии совпадают с плоскостями, найденными нами по методу наименьших квадратов: $\bar{X}_1(X_2X_3) = \widehat{X}_1(X_2X_3)$, $\bar{X}_2(X_1X_3) = \widehat{X}_2(X_1X_3)$ и т. д.

7.4.2. Уравнения линейной регрессии по эмпирическим данным. Пусть мы располагаем выборкой объема n такой, что в каждом наблюдении фиксируются значения трех случайных величин X, Y, Z. Всю совокупность данных выборки можно представить в виде сводной таблицы следующего вида:

$$\begin{array}{c|ccc} X & x_1 & x_2 \ldots & x_n \\ Y & y_1 & y_2 \ldots & y_n \\ Z & z_1 & z_2 \ldots & z_n \end{array}.$$

По этим данным при достаточно больших n можно приближенно оценить параметры закона распределения совокупности трех величин — центры распределения дисперсии и коэффициенты корреляции, вычисляя соответствующие эмпирические характеристики:

$$\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z},\quad s_x,\ s_y,\ s_z,\quad r_{xy},\ r_{xz},\ r_{yz}.$$

Отсюда получается возможность составления уравнения эмпирической линейной функции регрессии, которую мы получим, заменяя в формулах (7.4.27), (7.4.28), (7.4.29) и др. все теоретические характеристики их оценками по данным выборки. Так, мы получим оценки для коэффициентов регрессии, для сводного коэффициента корреляции, для остаточных дисперсий и т. д.

Пусть X соответствует в прежних обозначениях X_1, Y соответствует X_2 и Z соответствует X_3. Тогда эмпирическая регрессия Z по X и Y (и X_3 по X_1 и X_2) запишется так:

$$\hat{z}-\bar{z}=-\frac{s_z}{s_x}\frac{\bar{\Delta}_{31}}{\bar{\Delta}_{33}}(x-\bar{x})-\frac{s_z}{s_y}\frac{\bar{\Delta}_{32}}{\bar{\Delta}_{33}}(y-\bar{y}). \tag{7.4.30}$$

Здесь $\bar{\Delta}_{31}$, $\bar{\Delta}_{32}$ и $\bar{\Delta}_{33}$ — алгебраические дополнения элементов третьей строки определителя

$$\bar{\Delta}=\begin{vmatrix}1 & r_{xy} & r_{xz}\\ r_{yx} & 1 & r_{yz}\\ r_{zx} & r_{zy} & 1\end{vmatrix}=1+2r_{xy}r_{xz}r_{yz}-r_{xy}^2-r_{xz}^2-r_{yz}^2. \tag{7.4.31}$$

($r_{yx}=r_{xy}$ и т. д.).

Следовательно,

$$\bar{\Delta}_{11}=1-r_{yz}^2,$$

$$\bar{\Delta}_{22}=1-r_{xz}^2,$$

$$\bar{\Delta}_{33}=1-r_{xy}^2,$$

$$\bar{\Delta}_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}r_{xy} & r_{xz}\\ 1 & r_{yz}\end{vmatrix}=r_{xy}r_{yz}-r_{xz},$$

$$\bar{\Delta}_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & r_{xz}\\ r_{yx} & r_{yz}\end{vmatrix}=r_{yx}r_{xz}-r_{yz}.$$

Подставляя эти значения в уравнение (7.4.30), получим:

$$\frac{\hat{z}-\bar{z}}{s_z}=\frac{r_{xz}-r_{xy}r_{yz}}{1-r_{xy}^2}\frac{x-\bar{x}}{s_x}+\frac{r_{yz}-r_{xy}r_{xz}}{1-r_{xy}^2}\frac{y-\bar{y}}{s_y}. \tag{7.4.32}$$

Аналогично им определяются и две другие линии регрессии.

Сводные коэффициенты корреляции $r_{z\cdot xy}$, $r_{x\cdot yz}$ и $r_{y\cdot xz}$ проще всего вычисляются по формулам:

$$\left.\begin{aligned} r_{z\cdot xy}&=\sqrt{1-\frac{\bar{\Delta}}{\bar{\Delta}_{33}}},\\ r_{x\cdot yz}&=\sqrt{1-\frac{\bar{\Delta}}{\bar{\Delta}_{11}}},\\ r_{y\cdot xz}&=\sqrt{1-\frac{\bar{\Delta}}{\bar{\Delta}_{22}}}. \end{aligned}\right\} \tag{7.4.33}$$

Если имеется в виду вычислить все характеристики связи и определить все три линии регрессии, то выгоднее определить предварительно все алгебраические дополнения $\bar{\Delta}_{ik}$ — элементов трех строк определителя $\bar{\Delta}$.

Пример 7.4.1. Пусть у нас имеются следующие данные, относящиеся к трем переменным: X — овальности втулок после предварительного шлифования, Y — припуски под окончательное шлифование и Z — овальности после окончательного шлифования:

$$\bar{x} = 0{,}045, \quad s_x = 0{,}020, \quad r_{xz} = 0{,}70,$$
$$\bar{y} = 0{,}027, \quad s_y = 0{,}062, \quad r_{yz} = 0{,}42,$$
$$\bar{z} = 0{,}018, \quad s_z = 0{,}012, \quad r_{xy} = 0{,}54.$$

Требуется найти уравнение регрессии Z по X и Y и сводные коэффициенты корреляции.

Вычисляем сначала определитель $\bar{\Delta}$ и алгебраические дополнения элементов его третьей строки:

$$\bar{\Delta} = 1 + 2 \cdot 0{,}54 \cdot 0{,}70 \cdot 0{,}42 - 0{,}54^2 - 0{,}70^2 - 0{,}42^2 = 0{,}36;$$
$$\bar{\Delta}_{33} = 1 - 0{,}54^2 = 0{,}71;$$
$$\bar{\Delta}_{31} = 0{,}54 \cdot 0{,}42 - 0{,}70 = -0{,}47;$$
$$\bar{\Delta}_{32} = 0{,}54 \cdot 0{,}70 - 0{,}42 = -0{,}04;$$
$$\bar{\Delta}_{11} = 1 - 0{,}42^2 = 0{,}82;$$
$$\bar{\Delta}_{22} = 1 - 0{,}70^2 = 0{,}51.$$

Уравнение регрессии запишем в виде:

$$\hat{z} - 0{,}018 = -\frac{0{,}012}{0{,}020} \cdot \frac{-0{,}47}{0{,}71}(x - 0{,}045) - \frac{0{,}012}{0{,}062} \cdot \frac{-0{,}04}{0{,}71}(y - 0{,}027)$$

или

$$\hat{z} = 0{,}40x + 0{,}011y - 0{,}019.$$

Совокупные коэффициенты корреляции вычисляем по формулам (7.4.33):

$$r_{z \cdot xy} = \sqrt{1 - \frac{0{,}36}{0{,}71}} = 0{,}70,$$
$$r_{x \cdot yz} = \sqrt{1 - \frac{0{,}36}{0{,}82}} = 0{,}75,$$
$$r_{y \cdot xz} = \sqrt{1 - \frac{0{,}36}{0{,}51}} = 0{,}54.$$

Оценим приближенно среднее квадратическое отклонение остатка $\bar{z}_{1 \cdot 23}$ по формуле (7.4.28):

$$\sigma_{z \cdot xy} \approx \sqrt{\frac{0{,}36}{0{,}71} 0{,}012^2} = 0{,}0087.$$

Полученное по выборочным данным уравнение регрессии с некоторой надежностью, зависящей от объема использованного материала, показывает, что при неизменном припуске под окончательное шлифование, с уменьшением овальности после предварительного шлифования на каждую сотую долю миллиметра, овальность после окончательного шлифования будет уменьшаться в среднем на 4 *мк*. С другой стороны, при неизменной овальности после предварительного шлифования, с увеличением припуска под окончательное шлифование на утроенное среднее квадратическое отклонение, т. е. на $3 \cdot 0{,}062 = 0{,}186$ *мм*, овальность после этой операции уменьшится лишь примерно на 2 *мк*. Таким образом, при окончательном шлифовании припуск влияет на овальность изделия значительно слабее, чем овальность заготовки. Подобные заключения, конечно,

лишь приблизительно верны, как и всякие заключения, опирающиеся на ограниченный статистический материал. При сравнении коэффициентов при независимых переменных в уравнении регрессии, естественно, необходимо принимать во внимание величины средних квадратических отклонений соответствующих переменных.

В данном примере совокупный коэффициент $r_{z\cdot xy} = 0{,}70$, характеризующий связь между овальностью при окончательном шлифовании и совокупным действием припуска на обработку и овальности заготовки, оказался равным (с точностью до сотых долей) коэффициенту корреляции $r_{13} = 0{,}70$, характеризующему тесноту связи между овальностью изделий (Z) и овальностью заготовок (X). Отсюда следует, что при совокупном рассмотрении влияния величин припуска (Y) и овальности заготовок на овальность изделий величина припуска практически ничего не меняет по сравнению с рассмотрением простой связи овальности изделий с овальностью заготовок.

7.4.3. Частный коэффициент корреляции. Когда мы имеем дело с взаимосвязью нескольких случайных переменных, к показаниям коэффициента корреляции между парой изолированно взятых признаков следует относиться с большой осторожностью.

Вполне возможно, что заметная связь между двумя признаками обусловлена тем, что каждый из них находится в тесной связи с каким-либо третьим признаком или с группой признаков; если бы можно было исключить влияние этого обстоятельства, то зависимость между данной парой или совсем перестала бы проявлять себя или заменилась бы даже связью, противоположной по характеру. Так, в примере 7.4.1 простой коэффициент корреляции между овальностью после окончательного шлифования и припуском под него составляет $r_{23} = 0{,}42$. Это, казалось бы, указывает на довольно заметную прямую связь овальности с величиной припуска. Однако, повидимому, такой результат получается потому, что припуск под окончательное шлифование просто должен быть достаточным для выведения дефектов предварительного шлифования. На самом же деле, как видно из уравнения регрессии, величина припуска лишь очень слабо сказывается на овальности после шлифования по сравнению, например, с овальностью заготовки. Таким образом, простой коэффициент корреляции в некоторых случаях может лишь косвенно оценивать между данными величинами более сложную систему взаимозависимости, имеющую место в действительности.

В целях более правильного выяснения силы связи между двумя переменными в подобных случаях прибегают к тому, чтобы оценивать эту связь после устранения влияния всех других переменных, связанных с рассматриваемыми. Получающийся при этом показатель связи между двумя величинами носит название частного коэффициента корреляции.

Рассмотрим для определенности три переменные X_1, X_2, X_3. Можно считать, что зависимость X_1 от X_2, измеряемая коэффициентом корреляции ρ_{12}, в какой-то мере обусловлена наличием связи как X_1, так и X_2 с X_3. Чтобы устранить влияние этого фактора на X_1 и X_2, мы рассмотрим остатки, которые получаются, если мы вычтем из X_1 и из X_2 их наилучшие линейные приближения по X_3. Эти остатки, если считать все величины центрированными, будут:

$$\left.\begin{aligned} &X^0_{1\cdot 3} = X_1 - b_{1|3}X_3,\quad X^0_{2\cdot 3} = X_2 - b_{2|3}X_3,\\ &b_{1|3} = \rho_{13}\frac{\sigma_1}{\sigma_3},\quad b_{2|3} = \rho_{23}\frac{\sigma_2}{\sigma_3}, \end{aligned}\right\} \tag{7.4.34}$$

где $b_{1|3}$ и $b_{2|3}$ — коэффициенты регрессии X_1 и X_2 по X_3.

Рассмотрим теперь коэффициент корреляции между остатками $X^0_{1\cdot 3}$ и $X^0_{2\cdot 3}$; он и называется *частным коэффициентом корреляции* величин X_1 и X_2 относительно исключенного переменного X_3 и обозначается так: $\rho_{12\cdot 3}$.

По определению

$$\rho_{12\cdot 3}=\frac{\mathbf{M}(X^0_{1\cdot 3}X^0_{2\cdot 3})}{\sigma_{X^0_{1\cdot 3}}\sigma_{X^0_{2\cdot 3}}}.$$

Но, как видно из (7.1.41),

$$\sigma_{X^0_{1\cdot 3}}=\sigma_1\sqrt{1-\rho^2_{13}},$$

$$\sigma_{X^0_{2\cdot 3}}=\sigma_2\sqrt{1-\rho^2_{23}};$$

$$\mathbf{M}(X^0_{1\cdot 3}\cdot X^0_{23})=\mathbf{M}(X^0_{1\cdot 3}\cdot(X_2-b_{2|3}X_3))=\mathbf{M}(X^0_{1\cdot 3}\cdot X_2),$$

так как по свойству остатков

$$\mathbf{M}(X^0_{13}\cdot X_3)=0.$$

Далее

$$\mathbf{M}(X^0_{1\cdot 3}\cdot X_2)=\mathbf{M}[X_1-b_{1|3}X_3]X_2=\rho_{12}\sigma_1\sigma_2-b_{1|3}\rho_{23}\sigma_2\sigma_3$$

и, принимая во внимание (7.4.34),

$$\mathbf{M}(X^0_{1\cdot 3}\cdot X_2)=\sigma_1\sigma_2(\rho_{12}-\rho_{13}\rho_{23}).$$

Таким образом,

$$\rho_{12\cdot 3}=\frac{\rho_{12}-\rho_{13}\cdot\rho_{23}}{\sqrt{(1-\rho^2_{13})(1-\rho^2_{23})}}. \qquad (7.4.35)$$

Частный коэффициент корреляции, вообще говоря, отличен от ρ_{12}. Эти два коэффициента могут иметь разные знаки и один из них может оказаться равным нулю тогда, когда другой будет равен единице.

Аналогичным образом вычисляются частные коэффициенты корреляции $\rho_{23\cdot 1}$ и $\rho_{31\cdot 2}$. По данным выборки эти коэффициенты могут быть оценены, если в порядке приближения заменить все коэффициенты ρ их эмпирическими оценками r.

Рассмотрим теперь пример. Для данных примера 7.4.1, пользуясь формулой (7.4.35) и еще двумя аналогичными, мы можем вычислить частные коэффициенты корреляции:

$$r_{xz\cdot y}=\frac{0{,}70-0{,}54\cdot 0{,}42}{\sqrt{(1-0{,}54^2)(1-0{,}42^2)}}=0{,}62;$$

$$r_{xy\cdot z}=\frac{0{,}54-0{,}70\cdot 0{,}42}{\sqrt{(1-0{,}42^2)(1-0{,}70^2)}}=0{,}38;$$

$$r_{yz\cdot x}=\frac{0{,}42-0{,}54\cdot 0{,}70}{\sqrt{(1-0{,}70^2)(1-0{,}54^2)}}=0{,}07.$$

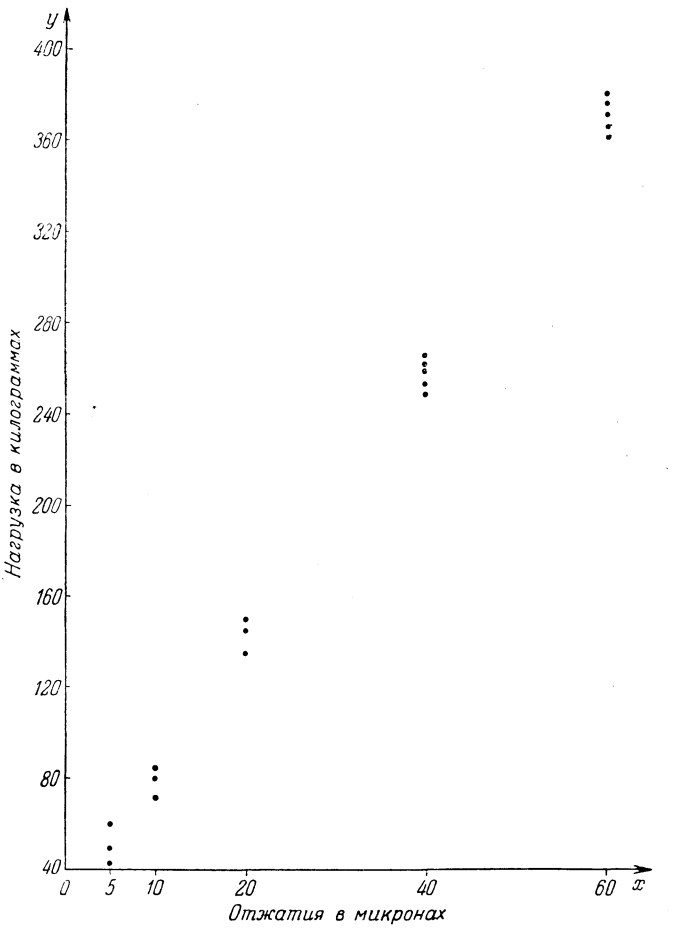
Мы видим, что частный коэффициент корреляции между овальностью после окончательного шлифования и припуском под него оказался равным всего лишь $r_{yz\cdot x}=0{,}07$, что гораздо лучше характеризует связь между этими двумя признаками y и z, нежели простой коэффициент корреляции $r_{23}=r_{yz}=0{,}42$.

§ 5. Обобщение задачи регрессии. Способ наименьших квадратов

7.5.1. Постановка задачи и общие понятия. Мы рассматривали в § 3 настоящей главы задачу оценки по данным выборки параметров, входящих в уравнение регрессии; это уравнение связывало среднее значение одной переменной с соответствующим ему значением другой случайной величины. Обе величины имели в этой задаче определенные распределения вероятностей. Несколько обобщая задачу, мы рассмотрим снова две величины X и Y, связанные между собой так, что всякий раз, когда X получает определенное значение $X=x$, Y

подчиняется некоторому закону распределения $f(y, x; \alpha, \beta, \ldots)$, где $\alpha, \beta, \ldots$ — значения неизвестных параметров; переменная x входит в выражение плотности вероятности величины Y в качестве параметра и может не быть случайной переменной.

Так, например, нас может интересовать жесткость задней бабки токарного станка при нагружении ее вертикальной составляющей усилия резания. Для этой цели мы повторно нагружаем и разгружаем ее, измеряя с помощью динамометра



Черт. 100. «Разброс» экспериментально полученных точек при испытании жесткости станка.

при каждом значении $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ее отжатия X, соответствующие им нагружения Y. Благодаря рассеиванию показаний динамометра мы получим для одних и тех же значений отжатия различные нагружения. Если мы теперь предположим линейную зависимость между нагрузкой и деформацией, что вполне естественно для случая напряжений, не превосходящих предела пропорциональности, то задача определения с заданной надежностью жесткости задней бабки сведется к оценке по выборочным данным параметров плотности $f(y, x; \alpha, \beta, \ldots)$.

Вернемся теперь к общему случаю. Пусть наблюдения величины Y проводятся при некоторых фиксированных и известных значениях параметра x. Таким образом, совокупность наблюдений будет представлять некоторое множество пар значений $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, причем не исключается случай, когда несколько наблюдений величины Y отвечают одному и тому же x. Будем, однако,

предполагать, что имеется по крайней мере два различных значения x. Задача обработки наблюдений заключается в том, чтобы оценить неизвестные параметры α, β, ... в выражении плотности $f(y, x; \alpha, \beta, \ldots)$. Если же задача будет решена, то мы сможем с некоторой надежностью судить о поведении величины Y в зависимости от X. Другими словами, мы сможем решать задачу прогноза — установления такого доверительного интервала для величины Y, попадание в который при каждом фиксированном x можно гарантировать с заданной степенью вероятности.

Предположим, например, что величина Y для каждого значения $X = x$ подчиняется нормальному закону с центром $\mathbf{M}(x; \alpha, \beta) = \alpha + \beta x$, линейно изменяющимся вместе с x, и с постоянной не зависящей от x дисперсией σ^2. Параметры α, β и σ^2 неизвестны и их надлежит оценить по данным выборки. Эта оценка даст в свою очередь возможность построить доверительный интервал для Y при каждом X и решить таким образом задачу прогноза. В конкретных исследованиях подобного рода задачи возникают весьма часто. Пусть, например, мы имеем физические основания предположить линейную зависимость некоторой величины Y^* от X, так что $Y^* = \alpha + \beta X$. Измерения величины Y^*, проведенные для некоторой последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n$ значений величины X, дали соответствующие значения $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Нанося на график точки $(x_i y_i)$, мы обычно получаем картину некоторого «разброса» точек, в силу которого лишь с некоторым приближением зависимость Y^* от X можно трактовать как линейную (черт. 100). Причины такого уклонения от строгой линейной связи могут лежать, например, в ошибках измерений, которые искажают «истинные» значения Y^*. Для каждого значения x_i мы получаем поэтому истинную ординату $y_i^* = \alpha + \beta x_i$ с некоторой случайной ошибкой так, что

$$y_i = y_i^* + \delta_i = \alpha + \beta x_i + \delta_i.$$

Если предположить, что ошибка $\delta_i = y_i - \alpha - \beta x_i$ подчиняется нормальному закону с центром в нуле (так как мы считаем исключенной систематическую «составляющую» ошибки) и некоторой дисперсией σ^2, то величина Y будет подчиняться для каждого x нормальному закону

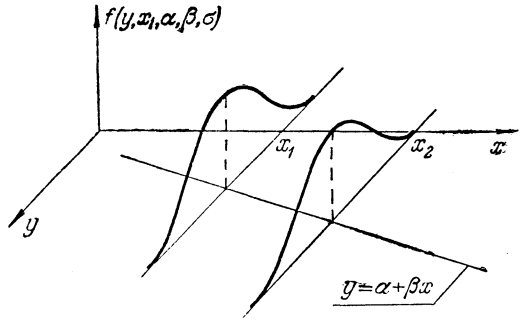
$$f(y, x; \alpha, \beta, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-\alpha-\beta x)^2}{\sigma^2}},$$

и мы приходим к сформулированной выше задаче оценки параметров α, β и σ^2 уравнения.

Если X пробегает некоторую последовательность значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то мы будем иметь последовательность плотностей:

$$f(y, x_i; \alpha, \beta, \sigma^2)$$
$$(i = 1, 2, \ldots),$$

которые графически изобразятся кривыми черт. 101.



Черт. 101. Последовательность плотностей вероятности величины Y, отвечающая значениям $x_1; x_2; \ldots; x_n$.

Мы непосредственно займемся указанной задачей в следующем разделе, а здесь отметим, что она может быть обобщена в различных направлениях. Так, например, параметр X может быть многомерной величиной $(X_1, X_2, \ldots, X_s)$ и наблюдения Y происходят для различных фиксированных значений переменных $x_i (x_1 = x_1; x_2 = x_2^0; \ldots; x_s = x_s^0)$, причем в каждом таком случае Y

подчиняется определенному закону распределения

$$f(y;\ x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_s^0;\ \alpha,\ \beta,\ \ldots),$$

где α, β, ... — подлежащие оценке параметры.

7.5.2. Оценка линейной зависимости по методу наименьших квадратов. Мы рассмотрим теперь задачу оценки неизвестных параметров в уравнении линейной зависимости

$$y^* = \alpha + \beta x, \tag{7.5.1}$$

предполагая, что ошибки измерения

$$\delta_i = y_i - \alpha - \beta x_i \tag{7.5.2}$$

удовлетворяют условиям:

A) $\mathbf{M}\delta_i = 0$;

$\mathbf{D}\delta_i = \mathbf{M}\delta_i^2 = \sigma^2$ (не зависит от x);

B) для различных x_i погрешности δ_i независимы друг от друга;

C) δ_i при каждом i подчиняются одному и тому же нормальному закону распределения $N(0,\ \sigma)$.

Пусть даны n пар наблюдений над совместными значениями величин X и $Y = \alpha + \beta X + \delta$. Плотность распределения системы ошибок δ_1, δ_2, ..., δ_n ввиду сделанных предположений выразится произведением

$$\frac{e^{-\frac{\delta_1^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \frac{e^{-\frac{\delta_2^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdots \frac{e^{-\frac{\delta_n^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \sigma^{-n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2}{2\sigma^2}}.$$

Но каждой системе ошибок δ_1, δ_2, ..., δ_n отвечает система возможных наблюденных y, представляющих $y_1 = \alpha + \beta x_1 + \delta_1$; ...; $y_n = \alpha + \beta x_n + \delta_n$, а потому плотность распределения системы наблюденных величин y_i будет:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \sigma^{-n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \alpha - \beta x_i)^2}{2\sigma^2}} = p(x_1, \ldots, x_n;\ \alpha,\ \beta,\ \sigma^2).$$

Наша задача заключается в оценке параметров α, β и σ^2. Применяя метод наибольшего правдоподобия, мы должны в качестве оценок взять их значения, которые обращают в максимум функцию $p(x_1, \ldots, x_n;\ \alpha,\ \beta,\ \sigma^2)$ при фиксированных значениях x_1, x_2, ..., x_n. Обозначим искомые значения α, β и σ^2 соответственно через a, b и s^2. Очевидно, что при данном σ^2 максимум функции p получится в том случае, когда стоящая в показателе степени форма при значениях $\alpha = a$ и $\beta = b$

$$Q = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2$$

будет обращаться в минимум. Условием экстремума, как известно из анализа, будет служить обращение в нуль частных производных Q. Но, дифференцируя по a и b, получим:

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i) = \sum_{i=1}^{n} y_i - an - b\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)\, x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - b\sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Приравнивая их нулю, будем иметь систему уравнений для определения оценок a и b для α и β. Эти уравнения особенно просто записываются и решаются, если предположить, что система значений X удовлетворяет условию

D) $$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0.$$

Этого всегда можно добиться, приняв за начало отсчета x среднюю арифметическую $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$, т. е., другими словами, если перейти от прежней системы абсцисс $x_1, \ldots, x_n$ к новой системе $x_1', \ldots, x_n'$, причем $x_i' = x_i - \bar{x}$. Тогда в новой системе требуемое условие будет выполнено, так как

$$\sum_{i=1}^{n} x_i' = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = 0.$$

Таким образом, вводимое нами условие D) сводится лишь к несущественной замене прежних абсцисс x_i новыми x_i' ($i = 1, 2, \ldots, n$). В дальнейшем мы будем предполагать условие D) для x выполненным.

Тогда уравнения для определения «наилучших» оценок a и b для α и β соответственно будут:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i) &= 0, \\ \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)\, x_i &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{7.5.3}$$

откуда ввиду условия $\sum x_i = 0$ следует:

$$na = \sum_{i=1}^{n} y_i,$$

$$b \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

и окончательно

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} \quad \text{и} \quad b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \tag{7.5.4}$$

Очевидно, что если условие D) не соблюдено, то для наилучшей системы оценок мы получим несколько более сложные выражения:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}; \quad b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}. \tag{7.5.5}$$

Дифференцируя функцию p по параметру σ^2 и приравнивая частную производную нулю, аналогичным образом получим для определения оценки s^2 параметра σ^2:

$$ns^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2.$$

Таким образом,

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)^2;$$

при этом оценки a и b определяются формулами (7.5.3) и (7.5.5).

Использованный нами принцип для оценки неизвестных коэффициентов α и β в уравнении (7.5.1) составляет существо *метода наименьших квадратов*, так как мы полагаем, что «наилучшие» оценки обращают в минимум сумму квадратов уклонений наблюденных значений y_i от вычисленных при тех же значениях $X = x_i$ на основании сделанных оценок

$$Y_i = a + bx_i; \tag{7.5.6}$$

т. е. сумму

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - Y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - a + bx_i)^2.$$

Посмотрим теперь, как оцениваются точность и надежность определения параметров. Замечаем прежде всего, что a и b и их отклонения от истинных значений параметров α и β мы можем выразить через величины δ_i. В самом деле, при условии $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ имеем:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n}(\beta x_i + \alpha + \delta_i) = \beta\sum_{i=1}^{n} x_i + n\alpha + \sum_{i=1}^{n}\delta_i = n\alpha + \sum_{i=1}^{n}\delta_i,$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n}\delta_i}{n} = a - \frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_i}{n}, \\ a - \alpha &= \frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_i}{n}. \end{aligned}\right\} \tag{7.5.7}$$

С другой стороны, при том же условии:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \sum_{i=1}^{n}(\alpha + \beta x_i + \delta_i)\, x_i = \alpha\sum_{i=1}^{n} x_i + \beta\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\delta_i x_i = \beta\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\delta_i x_i,$$

откуда, принимая во внимание (7.5.5),

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \beta + \frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

или

$$b - \beta = \frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \tag{7.5.8}$$

Мы видим, что уклонения $a - \alpha$ и $b - \beta$ представляют линейные функции от δ_i. Они будут подчиняться нормальному закону распределения. Если бы параметр σ^2 был известен, то задача вероятностной оценки α и β решалась бы полностью и мы могли бы очень просто найти доверительные интервалы для α и β.

В случае неизвестного параметра σ^2 мы используем прием, сходный с тем, который был использован в **5.4.4** при оценке среднего значения по методу Стьюдента при неизвестном σ. Положим:

$$y_i = a + bx_i + d_i, \tag{7.5.9}$$

где $d_i = y_i - Y_i$ есть найденные или «кажущиеся» уклонения наблюденного y_i от полученной путем вычисления ординаты прямой Y_i

$$Y_i = a + bx_i.$$

Очевидно, следует ожидать, что уклонения d_i будут, как правило, меньше, чем неизвестные истинные уклонения δ_i, так как коэффициенты a и b выбраны со специальным расчетом обратить в минимум сумму квадратов $\sum (y_i - a - bx_i)^2$.

Так как наряду с (7.5.9) мы имеем из (7.5.2) для y_i выражение

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \delta_i, \tag{7.5.10}$$

то из (7.5.9) и (7.5.10) следует

$$a + bx_i + d_i = \alpha + \beta x_i + \delta_i. \tag{7.5.11}$$

Разности $a - \alpha$ и $b - \beta$ мы представим теперь в следующем виде:

$$a - \alpha = \frac{\eta_1}{\sqrt{n}}, \qquad \text{где} \quad \eta_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta_i}{\sqrt{n}};$$

$$b - \beta = \frac{\eta_2}{\sqrt{[xx]}}, \quad \text{где} \quad \eta_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \delta_i}{\sqrt{[xx]}}$$

и $[xx] = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. В этих обозначениях

$$d_i = \delta_i - \frac{\eta_1}{\sqrt{n}} - \frac{\eta_2 x_i}{\sqrt{[xx]}}.$$

Введенные нами величины η_1 и η_2 будут обладать следующими свойствами:

1) $\mathbf{M}\eta_1 = \mathbf{M}\eta_2 = 0$,
2) $\mathbf{D}\eta_1 = \mathbf{D}\eta_2 = \sigma^2$,
3) $\mathbf{M}(\eta_1\eta_2) = 0$.

В самом деле, первое свойство вытекает из предположения $\mathbf{M}\delta_i = 0$, второе из независимости δ_i по теореме о дисперсии суммы независимых величин. Наконец, третье свойство легко проверяется

$$\mathbf{M}(\eta_1\eta_2) = \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{[xx]}} \mathbf{M}\left(\sum_{i=1}^{n} \delta_i \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j\delta_j\right) = \frac{1}{\sqrt{n[xx]}} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}\left(\delta_i \sum_{j=1}^{n} x_j\delta_j\right). \tag{7.5.12}$$

Далее, в силу независимости δ_i и δ_j $(i \neq j)$ $\mathbf{M}(\delta_i\delta_j) = \mathbf{M}\delta_i\,\mathbf{M}\delta_j = 0$, и мы будем иметь:

$$\mathbf{M}\left(\delta_i \sum_{j=1}^{n} x_j\delta_j\right) = x_i\,\mathbf{M}\delta_i^2 = x_i\sigma^2,$$

и потому из (7.5.12) следует

$$\mathbf{M}(\eta_1\eta_2) = \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^{n} x_i}{\sqrt{n[xx]}} = 0,$$

так как $\sum_{i=1}^{n} x_i$ по условию равна 0.

Принимая во внимание, что величины η_1 и η_2 нормально распределены, мы можем заключить отсюда, что они независимы между собой (так как коэффициент корреляции между ними равен нулю). Отсюда следует также, что $a-\alpha$ и $b-\beta$ независимы друг от друга. Не приводя доказательства, мы заметим, что величина

$$\frac{ns^2}{\sigma^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)^2}{\sigma^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}d_i^2}{\sigma^2}$$

оказывается распределенной независимо от a и b по закону χ^2 с $n-2$ степенями свободы. Это последнее число получается потому, что уклонения d_i связаны между собой двумя линейными соотношениями:

$$\sum_{i=1}^{n}d_i=\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)=0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n}d_ix_i=\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)\,x_i=0,$$

которые вытекают из уравнений (7.5.3) метода наименьших квадратов.

На основании полученных выводов можно получить вероятностную оценку коэффициентов α и β, дисперсии σ^2, а также произвести проверку гипотезы линейности.

Для того чтобы получить доверительный интервал для α, мы примем во внимание, что величина

$$u=\frac{a-\alpha}{\sigma}\sqrt{n}=\frac{\eta_1}{\sigma}$$

распределена нормально с единичной дисперсией и центром в нуле. С другой стороны, так как величина $\frac{ns^2}{\sigma^2}$ распределена независимо от u по закону χ^2 с $n-2$ степенями свободы, то по теореме пункта **5.4.4** величина

$$t'=\frac{(a-\alpha)\sqrt{n-2}}{s}=\frac{a-\alpha}{s_a}, \tag{7.5.13}$$

где

$$s_a=\frac{s}{\sqrt{n-2}}=\sqrt{\frac{1}{n-2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}d_i^2} \tag{7.5.14}$$

и

$$d_i=y_i-Y_i=y_i-a-bx_i,$$

распределена по закону Стьюдента с $n-2$ степенями свободы. Для каждого ε мы можем, следовательно, найти такое t_ε, что

$$\mathbf{P}(|t'|<t_\varepsilon)=1-\varepsilon$$

и построить для α доверительный интервал $(a-t_\varepsilon s_a,\ a+t_\varepsilon s_a)$. Аналогичным приемом устанавливается и доверительный интервал для β. При этом используется величина

$$t''=\frac{(b-\beta)\sqrt{(n-2)[xx]}}{\sqrt{n}s}=\frac{b-\beta}{s_b}, \tag{7.5.15}$$

где

$$s_b=\frac{\sqrt{n}s}{\sqrt{(n-2)[xx]}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}d_i^2}{[xx]}}, \tag{7.5.16}$$

распределенная также по закону Стьюдента с $n-2$ степенями свободы. Заметим еще, что символ $[xx]$, равносильный $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$, следует заменить на $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$, если начало отсчета по оси x не совпадает со средней арифметической $\bar{x}$ так, что $\bar{x}\neq 0$.

Для оценки σ^2 мы используем s^2 и закон χ^2 для $\frac{ns^2}{\sigma^2}$ с $n-2$ степенями свободы.

Несмещенной оценкой для σ^2 в данном случае служит еще величина

$$s'^2=\frac{ns^2}{n-2}. \tag{7.5.17}$$

На практике часто возникает вопрос об оценке отклонения истинной прямой $y=\alpha+\beta x$ от построенной нами ее оценки $Y=a+bx$ при некотором заданном значении x.

Разность $Y-y$ можно представить в следующем виде:

$$Y-y=(a-\alpha)+(b-\beta)\,x=\frac{\eta_1}{\sqrt{n}}+\frac{\eta_2 x}{\sqrt{[xx]}}.$$

Эта разность представляет сумму двух нормально распределенных величин и потому также нормально распределена с центром в нуле и дисперсией, равной

$$\mathbf{D}(Y-y)=\frac{\sigma^2}{n}+\frac{x^2\sigma^2}{[xx]};$$

следовательно, среднее квадратическое отклонение величины $(Y-y)$ равно

$$\sigma_{Y-y}=\sigma\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{x^2}{[xx]}}$$

или

$$\sigma_{Y-y}=\sigma\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{(x-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}. \tag{7.5.18}$$

Можно показать, что величина

$$T=\frac{(Y-y)\sqrt{n-2}}{s\sqrt{1+n\frac{x^2}{[xx]}}} \tag{7.5.19}$$

распределена по закону Стьюдента с $n-2$ степенями свободы и потому можно определить доверительный интервал для оценки разности $(Y-y)$, соответствующий заданной доверительной вероятности.

При $x-\bar{x}=0$ (или при $x=\bar{x}$) мы получаем ту же оценку, как и для α. С увеличением x (или $(x-\bar{x})$), т. е. по мере удаления от среднего значения x, принятого нами за начало отсчета, точность оценки будет заметно снижаться. Наименее надежная оценка по прямой, проведенной по методу наименьших квадратов, будет получаться для ординат, отвечающих точкам, наиболее удаленным от среднего значения $\bar{x}$. Поэтому использование найденной прямой для экстраполирования за пределами того промежутка, внутри которого помещаются наблюденные данные, возможно производить, лишь соблюдая большую осторожность.

Разобранный нами случай оценки параметров линейной зависимости можно обобщить. Предположим, что для каждого значения $x=x_i$ $(i=1, 2, \ldots, k)$ наблюдения повторяются некоторое количество n_i раз и n_i вообще больше

единицы. При этом общее число наблюдений будет равно $N=\sum_{i=1}^{k} n_i$. Обозначим через $\bar{y}_i$ среднюю арифметическую из n_i наблюдений, отвечающих значению x_i ($i=1, 2, \ldots, k$). Через $\bar{s}_i^2$ обозначим несмещенную оценку дисперсии σ^2 для той же серии наблюдений так, что

$$\bar{s}_i^2=\frac{1}{n_i-1}\sum_{p=1}^{n_i}(y_{ip}-\bar{y}_i)^2, \tag{7.5.20}$$

где y_{ip} — «p»-е по порядку наблюдение из серии n_i наблюдений, отвечающих значению x_i. В этом случае мы можем предварительно проверить построенную нами гипотезу постоянства дисперсии, как это было объяснено в **6.4.3**. Если гипотеза постоянства подтвердится, то мы можем оценить σ^2, комбинируя наблюдения всех серий, для чего можем воспользоваться оценкой:

$$s_1^2=\frac{\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)\,s_{1i}^2}{\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)}=\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{p=1}^{n_i}(y_{ip}-\bar{y}_i)^2}{\left(\sum_{i=1}^{k}n_i\right)-k}. \tag{7.5.21}$$

Оценка коэффициентов a и b выполняется с помощью критериев Стьюдента с $N-2$ степенями свободы:

$$t'=\frac{a-\alpha}{s_a} \quad \text{и} \quad t''=\frac{b-\beta}{s_b}, \tag{7.5.22}$$

где

$$s_a=\frac{s}{\sqrt{N}}, \quad s_b=\frac{s}{\sqrt{\sum_{i=1}^{k}n_i(x_i-\bar{x})^2}},$$

$$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{p=1}^{n_i}(y_{ip}-Y_i)^2}{N-2}, \quad Y_i=a+bx_i$$

и $y_{ip}-Y_i=d_{ip}$ — уклонение наблюденного значения y_{ip} от вычисленного с помощью полученных параметров a и b значения линейной функции при $x=x_i$.

Вычисление a и b производится в этом случае по формулам:

$$\left.\begin{aligned} a&=\bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{k}n_i\bar{y}_i}{\sum_{i=1}^{k}n_i},\\ b&=\frac{\sum_{i=1}^{k}n_i(x_i-\bar{x})\bar{y}_i}{\sum_{i=1}^{k}n_i(x_i-\bar{x})^2}=\frac{\sum_{i=1}^{k}n_ix_i\bar{y}_i-\frac{\left(\sum_{i=1}^{k}n_ix_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k}n_i\bar{y}_i\right)}{N}}{\sum_{i=1}^{k}n_i(x_i-\bar{x})^2}. \end{aligned}\right\} \tag{7.5.23}$$

Оценка «истинной» ординаты y линейной функции по величине Y при данном x производится с помощью критерия:

$$T=\frac{Y-y}{s_{Y-y}}, \tag{7.5.24}$$

где $Y = a + bx$,

$$s_{Y-y} = s\left(\sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{k} n_i} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x})^2}}\right) = \sqrt{s_a^2 + s_b^2 (x_i - \bar{x})^2}. \quad (7.5.25)$$

Критерий этот имеет распределение Стьюдента с $N - 2 = (\sum_{i=1}^{k} n_i) - 2$ степенями свободы.

Если гипотеза линейности верна, то мы можем построить еще одну несмещенную оценку для σ^2, беря уклонения средних $\bar{y}_i$ от величин Y_i. Это будет:

$$s_2^2 = \frac{1}{k-2} \sum_{i=1}^{k} n_i (\bar{y}_i - Y_i)^2. \quad (7.5.26)$$

Нетрудно показать, что в наших предположениях величина $\frac{s_2^2}{\sigma^2}$ распределена по закону χ^2 с $k-2$ степенями свободы. Можно показать также, что если гипотеза неверна, то математическое ожидание s_2^2 будет тем больше, чем больше величина η_i уклоняется от прямолинейного расположения. Кроме того, обнаруживается, что оценки s_1^2 и s_2^2 независимы одна от другой. Поэтому в качестве критерия проверки гипотезы линейности мы можем воспользоваться отношением

$$\frac{s_2^2}{s_1^2} = \frac{1}{k-2} \sum_{i=1}^{k} n_i \left(\frac{\bar{y}_i - Y_i}{s_1}\right)^2, \quad (7.5.27)$$

в котором числитель имеет $k-2$ и знаменатель $N-k$ степеней свободы. Если окажется, что s_2^2 значительно больше s_1^2, то проверяемая гипотеза должна быть отброшена. Если $n_i = 1$, то мы не располагаем подобными критериями линейности. В качестве некоторой опоры для оценки соответствия прямой мы можем использовать то обстоятельство, что уклонения $d_i = y_i - Y_i$ наблюденных значений от вычисленных в случае правильности гипотезы должны приближенно следовать нормальному закону распределения и быть независимыми друг от друга. Таким образом, в этом случае мы должны детально рассмотреть распределение уклонений d_i.

Рассматриваемая нами процедура относится к тому случаю, когда уравнение, связывающее y с x, линейно. Однако к этому случаю можно привести ряд других более сложных зависимостей, если предварительно сделать надлежащую замену переменных: взяв за новый аргумент вместо x некоторую функцию его $x' = g(x)$ и вместо y — некоторую функцию $y' = \psi(y)$. Мы можем свести тогда дело к линейной зависимости между y' и x'. Так, например, логарифмируя равенство

$$y = Ax^v,$$

получим:

$$\lg_{10} y = \lg_{10} A + v \lg_{10} x,$$

откуда

$$y' = a + bx',$$

если положить

$$y' = \lg_{10} y, \quad x' = \lg_{10} x,$$
$$v = b \quad \text{и} \quad \lg_{10} A = a.$$

Точно так же в случае зависимости вида

$$y = Ae^{kx}$$

мы получим:

$$\lg_{10} y = \lg_{10} A + k \lg_{10} e \cdot x$$

и снова $y' = a + bx'$, если положить $y' = \lg_{10} y$, $a = \lg_{10} A$ и $b = k \lg_{10} e$. При таком преобразовании приходится, однако, предполагать, что отклонение от полученной линейной функции хотя бы приближенно следуют нормальному закону. Рассмотрим теперь пример.

Пример 7.5.1. Пусть у нас имеются следующие данные об испытании жесткости задней бабки токарного станка (табл. 7.5.1).

Таблица 7.5.1

Отжатия бабки в микронах (x_i)	Нагрузка в килограммах (y_{ip})				
	№ опытов				
	1	2	3	4	5
5	50	61	43	—	—
10	73	78	83	—	—
20	145	137	151	—	—
40	272	268	259	254	265
60	380	366	383	371	376

Таким образом, при отжатиях в 5, 10 и 20 *мк* произведено по три наблюдения и при отжатиях в 40 и 60 *мк* по пять наблюдений. Так как создаваемые указанными нагрузками напряжения в материале бабки значительно ниже предела текучести $\sigma_т$ *кг/мм*^{2}, то, опираясь на закон Гука, мы вправе в данном случае ожидать зависимость между отжатиями и нагрузками вида

$$y = \alpha + \beta x.$$

Требуется оценить на основе приведенных данных коэффициенты α и β, построить для них доверительные интервалы и проверить гипотезу линейности зависимости между отжатиями (x_i) и нагрузками (y_{ip}).

В целях большего удобства и наглядности сведем наши вычисления в две расчетные таблицы (табл. 7.5.2 и 7.5.3).

Табл. 7.5.2 предназначена лишь для предварительных вычислений, а именно для вычислений, необходимых для дальнейших значений средних арифметических нагружений $\overline{y}_i$ и их уточненных эмпирических дисперсий $\overline{s}_i^2$, отвечающих каждая соответствующему отжатию x_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$). При этом $\overline{y}_i$ и $\overline{s}_i^2$ вычисляются по обычным формулам, т. е. соответственно по (5.2.2) и (5.3.61). В строках 2 ÷ 6 расположены наблюденные значения нагружений y_{ip} ($i = 1, 2, 3, 4, 5$, причем $p = 1, 2, 3$ при $i = 1, 2, 3$ и $p = 1, 2, 3, 4, 5$ при $i = 4$ и 5), где первый индекс обозначает значение отжатия, к которому относится данное нагружение, а второй индекс обозначает порядковый номер наблюдения нагружения при данном отжатии.

Учитывая формулу (5.2.12), легко понять, что при вычитании из любого числа, стоящего в строке 9, второго числа, стоящего под ним в строке 10, мы получим в строке 11 суммы квадратов отклонений значений y_{ip} от соответствующих $\overline{y}_i$. Дальнейшие вычисления ведем, пользуясь табл. 7.5.3. (см. стр. 420).

Прежде всего следует отметить, что в табл. 7.5.3 столбцы 8, 9 и 10 предназначены только для контроля вычислений, а столбцы 12, 13, 14 и 15 — для построения доверительных интервалов для α и β и для проверки гипотезы линейности и лишь остальные восемь столбцов используются собственно при нахождении эмпирических оценок a и b коэффициентов α и β линейного уравнения

$$Y_i = \alpha + \beta x_i \approx a + b x_i.$$

Таблица 7.5.2

	1	Отжатия в микронах (x_i)										
		5		10		20		40		60		
		нагрузка в килограммах (y_{ip})										
		y_1	y_1^2	y_2	y_2^2	y_3	y_3^2	y_4	y_4^2	y_5	y_5^2	$\sum_p \sum_i$
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	2	50	2500	73	5329	145	21 025	272	73 984	380	144 400	
	3	61	3721	78	6084	137	18 769	268	71 824	366	133 956	
	4	43	1849	83	6889	151	22 801	259	67 081	383	146 689	
	5							254	64 516	371	137 641	
	6							265	70 225	376	141 376	
n_i	7	3		3		3		5		5		19
$\sum_{p=1}^{n_i} y_{ip}$	8	154		234		433		1318		1876		4015
$\sum_{p=1}^{n_i} y_{ip}^2$	9	8070		18 302		62 595		347 630		704 062		
$\frac{\left(\sum_{p=1}^{n_i} y_{ip}\right)^2}{n_i}$	10	7905		18 252		62 496		347 425		703 875		
$\sum_{p=1}^{n_i} (y_{ip}-\bar{y}_i)^2$	11	165		50		99		205		187		706
$k_i = n_i - 1$	12	2		2		2		4		4		14
$\bar{s}_i^2$	13	82		25		50		51		47		
$\bar{y}_i = \frac{\sum_{p=1}^{n_i} y_{ip}}{n_i}$	14	51		78		144		264		375		912

Заметим, что значения $n_i\bar{y}_i$, (см. столбец 6 табл. 7.5.3), которые должны быть в силу равенства

$$\bar{y}_i = \frac{\sum_{p=1}^{n_i} y_{ip}}{n_i}$$

равны суммам вида $\sum_{p=1}^{n_i} y_{ip}$, стоящим в числителе, все же не совпадают с этими суммами, проставленными в строке 8 табл. 7.5.2; это объясняется произведенными округлениями.

Столбец 8 табл. 7.5.3 предназначен для разности $\bar{y}_i - x_i$, а в столбцах 9 и 10 проставляются результаты умножения числа n_i соответственно на разность $(\bar{y}_i - x_i)$ и на ее квадрат $(\bar{y}_i - x_i)^2$. Если $y_i < x_i$, то удобнее составлять разность $x_i - \bar{y}_i$, чтобы избежать отрицательных чисел.

Столбцы 12 ÷ 15 мы заполняем после того, как произведем все вычисления по первым одиннадцати столбцам и получим оценки a и b.

Таблица 7.5.3

		x_i	n_i	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$	$\bar{y}_i$	$n_i \bar{y}_i$	$n_i \bar{y}_i^2$	$\bar{y}_i - x_i$	$n_i(\bar{y}_i - x_i)$	$n_i(\bar{y}_i - x_i)^2$	$\frac{n_i x_i \bar{y}_i = n_i x_i n_i \bar{y}_i}{n_i}$	Y_i	$\bar{y}_i - Y_i$	$(\bar{y}_i - Y_i)^2$	$n_i(\bar{y}_i - Y_i)^2$
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	1	5	3	15	75	51	153	7 803	46	138	6 348	765	49	2	4	12
	2	10	3	30	300	78	234	18 252	68	204	13 872	2 340	79	— 1	1	3
	3	20	3	60	1 200	144	432	62 208	124	372	46 128	8 640	139	5	25	75
	4	40	5	200	8 000	264	1320	348 480	224	1120	250 880	52 800	259	5	25	125
	5	60	5	300	18 000	375	1875	703 125	315	1575	496 125	112 500	379	— 4	16	80
$\sum_{i=1}^{k}$	6	135	19	605	27 575	912	4014	1 139 868	777	3409	813 353	177 045	905	7	71	295
$\frac{\left(\sum_{i=1}^{k}\right)^2}{n}$	7			19 264			848 010			611 646						
$\sum_{i=1}^{k} n_i\left[(\ )_i - \overline{(\ )}\right]^2$	8				8311			291 858			201 707					

Заполнение табл. 7.5.3 мы производим последовательно, контролируя наши вычисления на каждом из четырех следующих этапов:

1) Сначала в строки $1 \div 5$ столбцов 1, 2 и 5 мы переносим данные из строк соответственно 1, 7 и 14 табл. 7.5.2, производим вычитание $\bar{y}_i - x_i$, заполняя пять строк столбца 8 и подсчитываем по первым пяти строкам столбцов 1, 5 и 8 суммы, которые проставляем в клетках (1, 6), (5, 6) и (8, 6). Легко понять, что между последними суммами существует соотношение

$$(5,\ 6) - (1,\ 6) = (8,\ 6).$$

В самом деле, у нас получилось $912 - 135 = 777$, откуда следует, что на *первом* этапе вычисления сделаны правильно.

2) Производя умножение на n_i, заполняем первые пять строк столбцов 3, 6 и 9 и подсчитываем по ним суммы, которые проставляем в клетках (3, 6), (6, 6) и (9, 6). Ясно, что между этими суммами существует соотношение

$$(6,\ 6) - (3,\ 6) = (9,\ 6).$$

В нашем примере получилось $4014 - 605 = 3409$, следовательно, вычисления на *втором* этапе также верны.

3) Попарно перемножая числа, стоящие в первых пяти строках соответственно столбцов 1 и 3, 5 и 6, 8 и 9, 1 и 6, заполняем первые пять строк соответственно столбцов 4, 7, 10 и 11. Затем суммируем по вертикали полученные числа и суммы вносим в клетки соответственно (4, 6), (7, 6), (10, 6) и (11, 6). Из алгебраической формулы для квадрата разности следует, что между этими суммами существует соотношение

$$(10,\ 6) = (7,\ 6) - 2\,(11,\ 6) + (4,\ 6).$$

В нашем примере имеем: $813\,353 = 1\,139\,868 - 2 \cdot 177\,045 + 27\,575$, откуда следует, что вычисления на *третьем* этапе сделаны правильно.

4) Возводим в квадрат суммы, стоящие в клетках соответственно (3, 6), (6, 6) и (9, 6) и делим их на число $n = 19$ наблюдений. Полученные числа проставляем в клетках соответственно (3, 7), (6, 7) и (9, 7). Затем производим попарные вычитания чисел в клетках (4, 6) и (3, 7), (7, 6) и (6, 7), (10, 6) и (9, 7). Полученные разности вносим в клетки соответственно (4, 8), (7, 8) и (10, 8). Вслед за этим мы вычисляем числитель в соотношении (7.5.23), определяющем оценку b, а именно:

$$B = \sum_{i=1}^{k} n_i x_i \bar{y}_i - \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{k} n_i \bar{y}_i\right)}{n}.$$

Первый член этого выражения представляет, очевидно, сумму, стоящую в клетке (11, 6), а второй есть частное от деления произведения чисел в клетках (3, 6) и (6, 6) на число $n = 19$ наблюдений. Находим:

$$B = 177\,045 - \frac{605 \cdot 4014}{19} = 49\,231.$$

Из той же алгебраической формулы, что и прежде, следует, что между суммами (4, 8), (7, 8) и (10, 8) и величиной B имеется соотношение

$$(10,\ 8) = (7,\ 8) - 2 \cdot B + (4,\ 8).$$

В нашем примере получаем: $201\,707 = 291\,858 - 2 \cdot 49\,231 + 8311$, что указывает на правильность вычислений, произведенных на *четвертом* этапе.

Теперь наилучшие оценки a и b коэффициентов α и β мы находим по формулам (7.5.5) в виде:

$$a = \bar{y} = \frac{(6,6)}{n} = \frac{4014}{19} = 211;$$

$$b = \frac{B}{(4,8)} = \frac{49\,231}{8311} = 6; \quad \bar{x} = \frac{(3,6)}{n} = \frac{605}{19} = 32.$$

Искомое линейное уравнение будет иметь вид:

$$Y_i = 211 + 6(x_i - 32) = 19 + 6x_i.$$

Найдем теперь доверительные интервалы для истинных коэффициентов α и β линейного уравнения

$$y = \alpha + \beta x.$$

С этой целью прежде всего надо заполнить графы 12 ÷ 15 табл. 7.5.3. Значения Y_i мы вычисляем для каждого x_i, пользуясь полученным нами уравнением. Их мы вносим в первые пять строк столбца 12, подсчитываем сумму этих значений и проставляем ее в клетке (12,6). Затем мы находим разности между $\bar{y}_i$, стоящими в столбце 5, и Y_i — в столбце 12. Результаты вносим в столбец 13, подсчитываем сумму разностей и проставляем ее в клетке (13,6). Очевидно, между упомянутыми суммами имеем соотношение

$$(5,6) - (12,6) = (13,6).$$

В самом деле, в нашем примере получаем 912—905 = 7, что подтверждает правильность вычислений. Числа, стоящие в первых пяти строках столбца 13, мы сначала возводим в квадрат, а затем умножаем на n_i. Результаты мы вносим в столбцы соответственно 14 и 15 и подводим по ним итоги. Для вычисления дисперсий s_a^2 и s_b^2 по формулам (7.5.14) и (7.5.16) нужно сначала определить общий в этих формулах числитель дроби под знаком радикала, который мы обозначим через

$$C = \sum_{i=1}^{k} \sum_{p=1}^{n_i} (y_{ip} - \bar{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^{k} n_i (\bar{y}_i - Y_i)^2.$$

Первый член этого выражения представляет сумму, стоящую в клетке (11,11) табл. 7.5.2, а второй член — сумму, стоящую в клетке (15,6) табл. 7.5.3, и потому

$$C = 706 + 295 = 1001.$$

Теперь получим:

$$s_a^2 = \frac{C}{(n-2)\cdot n} = \frac{1001}{17 \cdot 19} = \frac{58{,}9}{19} = 3{,}10; \quad s_a = \sqrt{3{,}10} = 1{,}76,$$

$$s_b^2 = \frac{C}{(n-2)\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x})^2} = \frac{1001}{17 \cdot 8311} = \frac{58{,}9}{8311} = 0{,}0071;$$

$$s_b = \sqrt{0{,}0071} = 0{,}084.$$

Учитывая, что величины $t' = \frac{a - \alpha}{s_a}$ и $t'' = \frac{b - \beta}{s_b}$ распределены по закону Стьюдента, из табл. XVIII приложений находим, что $100 \cdot q = 100\,\varepsilon$; 5-процентные пределы для них при числе степеней свободы $k = n - 2 = 19 - 2 = 17$

будут определяться значением $t_s = t_{q,k} = t_{5,17} = 2{,}11$. Отсюда находим доверительные границы для α и β в следующем виде:

$$211 - 2{,}11 \cdot 1{,}76 < \alpha < 211 + 2{,}11 \cdot 1{,}76,$$
$$6 - 2{,}11 \cdot 0{,}084 < \beta < 6 + 2{,}11 \cdot 0{,}084$$

или

$$207 < \alpha < 215,$$
$$5{,}8 < \beta < 6{,}2.$$

Найдем теперь 5-процентные доверительные интервалы для неизвестного «истинного» значения y_i.

Для этого найдем s^2_{Y-y} по формуле (7.5.25):

$$s^2_{Y-y} = s^2_a + s^2_b (x_i - \bar{x})^2 = 3{,}10 + 0{,}0071\ (x_i - 32)^2.$$

Построим 5-процентные пределы для y_i, учитывая согласно предыдущему, что $t_s = t_{5,17} = 2{,}11$, и сведем результаты в таблицу (табл. 7.5.4).

Таблица 7.5.4

Y_i	x_i	$x_i - \bar{x}$	s_{Y-y}	5-процентные доверительные границы для y_i	
				$Y_i - 2{,}11\, s_{Y-y}$	$Y_i + 2{,}11\, s_{Y-y}$
49	5	— 27	2,88	43	55
79	10	— 22	2,56	74	84
139	20	— 12	2,03	135	143
199	30	— 2	1,77	195	203
259	40	8	1,89	255	263
379	60	28	2,94	373	385

Мы видим, что по мере удаления от $\bar{x} = 32$ доверительные интервалы для Y_i увеличиваются, так как возрастает s_{Y-y}. Иными словами, точность нашей прямой при данной надежности уменьшается по мере удаления от $\bar{x}$, о чем уже упоминалось выше. Полученные при наблюдениях точки, построенная по ним прямая и доверительная область показаны на черт. 102.

Произведем теперь проверку гипотезы линейности путем сравнения двух дисперсий: s^2_1, определяемой соотношением (7.5.21), и s^2_2, определяемой соотношением (7.5.26).

По формуле (7.5.21) имеем:

$$s^2_1 = \frac{706}{19-5} = 50{,}4.$$

С другой стороны, по формуле (7.5.26) получаем:

$$s^2_2 = \frac{295}{5-2} = 98{,}3,$$

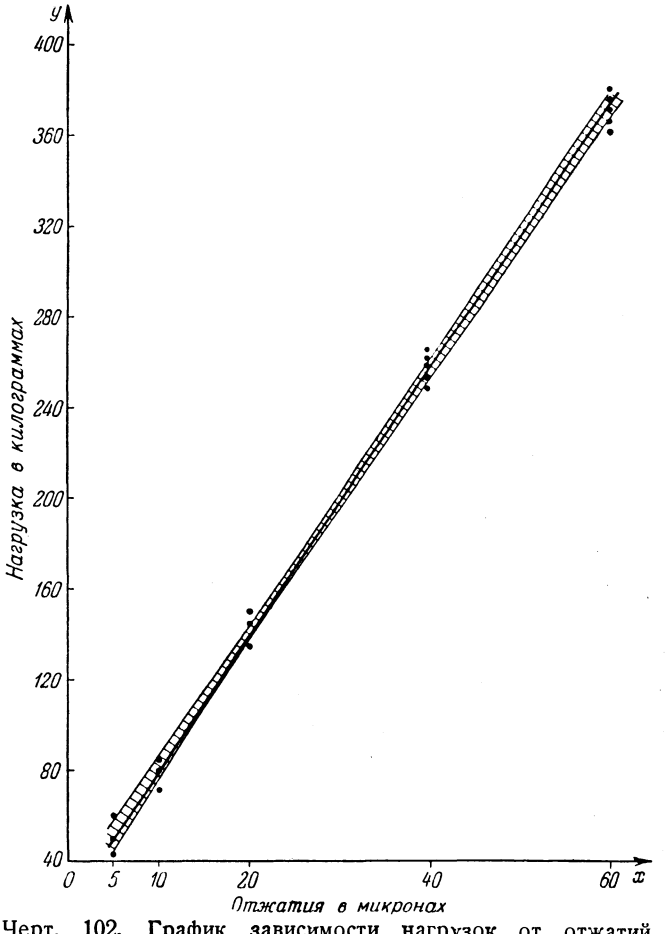
откуда

$$F = \frac{98{,}3}{50{,}4} = 1{,}95,$$

причем числитель имеет $k - 2 = 5 - 2 = 3$ степени свободы, а знаменатель $N - k = 19 - 5 = 14$ степеней свободы.

По табл. XX приложений находим, что при 5-процентном уровне значимости $F_T = 3{,}34$, а при 1-процентном — 5,56. Таким образом, в нашем случае гипотеза линейности связи не опровергается произведенными наблюдениями.

Заметим, что при наличии достаточного навыка в вычислениях следует вначале делать проверку гипотезы линейности и только после этого оценивать коэффициенты α и β и строить для них доверительные интервалы.



Черт. 102. График зависимости нагрузок от отжатий задней бабки токарного станка, построенный по способу наименьших квадратов с 95%-ной доверительной областью.

7.5.3. Общая схема применения метода наименьших квадратов. Мы рассмотрим теперь более общую задачу оценки неизвестных параметров $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ в уравнении

$$\eta = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \varphi_k(x), \tag{7.5.28}$$

которым связывается наблюдаемая нами величина η с независимым переменным x. В этом уравнении $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ представляют известные функции x. Так, например, в случае

$$\varphi_1 = 1, \quad \varphi_2 = x, \quad \varphi_3 = x^2, \quad \ldots, \quad \varphi_m = x^{m-1}$$

мы получим многочлен $m-1$ степени и, в частности, при $m=2$ будем иметь ранее уже рассмотренную нами линейную зависимость. С параболическими зависимостями указанного вида при том или ином значении $m>2$ мы нередко встречаемся в технике при описании различных зависимостей (например, стойкостных и прочностных зависимостей). В некоторых вопросах техники, например при исследовании колебательных процессов, мы встречаемся с системой тригонометрических функций вида

$$\varphi_k(x) = \cos kx, \quad \varphi_k(x) = k\cos x \quad \text{или} \quad \varphi_k(x) = \sin kx.$$

Мы снова будем предполагать, что наблюдения величины η, произведенные при некоторой системе значений аргумента $x = x_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, дают искаженные ошибками δ значения этой величины

$$y_j = \sum_{k=1}^{m} a_k \varphi_k(x_j) + \delta_j = \eta_j + \delta_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{7.5.29}$$

Мы будем попрежнему предполагать, что

$$\mathbf{M}\delta_j = 0,$$
$$\mathbf{M}\delta_j^2 = \sigma^2 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

и что независимые между собой δ_j следуют нормальному закону.

Для оценки параметров a_k в уравнении (7.5.28) мы построим функцию

$$Y = \sum_{k=1}^{m} a_k \varphi_k(x),$$

наилучше приближающую η в смысле среднего квадратического уклонения; другими словами, подчиним выбор a_k условию

$$Q = \sum_{j=1}^{n} [y_j - \sum_{k=1}^{m} a_k \varphi_k(x_j)]^2 = \text{minimum}.$$

Так как мы требуем, чтобы сумма квадратов уклонений

$$d_j = y_j - \sum_{k=1}^{m} a_k \varphi_k(x_j) = y_j - Y_j$$

приближающей функции Y_j от действительно наблюденных значений y_j была минимальной, то этот прием подбора a_k, как уже указывалось в **7.5.2**, получил название метода наименьших квадратов.

Основное преимущество метода наименьших квадратов заключается в сравнительной простоте определения коэффициентов a_k; как мы сейчас увидим, они определяются из системы *линейных* уравнений.

Эти уравнения мы получим, решая задачу на минимум функции $Q(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, приравнивая нулю частные производные $\frac{\partial Q}{\partial a_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, найдем:

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial a_i} = \sum_{j=1}^{n} \left[y_j - \sum_{k=1}^{m} a_k \varphi_k(x_j) \right] \varphi_i(x_j) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Обозначая для краткости

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_i(x_j)\varphi_k(x_j) = (\varphi_i, \varphi_k) = (\varphi_k, \varphi_i),$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \varphi_i(x_j) = (y, \varphi_i) = (\varphi_i, y),$$

мы можем записать полученные уравнения следующим образом:

$$a_1(\varphi_i, \varphi_1) + a_2(\varphi_i, \varphi_2) + \ldots + a_m(\varphi_i, \varphi_m) = (y, \varphi_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

или более подробно

$$\left.\begin{aligned} a_1(\varphi_1, \varphi_1) + a_2(\varphi_1, \varphi_2) + a_3(\varphi_1, \varphi_3) + \ldots + a_m(\varphi_1, \varphi_m) &= (y, \varphi_1), \\ a_1(\varphi_2, \varphi_1) + a_2(\varphi_2, \varphi_2) + a_3(\varphi_2, \varphi_3) + \ldots + a_m(\varphi_2, \varphi_m) &= (y, \varphi_2), \\ \ldots\ldots\ldots\

Условие «*ортогональности*» заключается в том, что для любой пары $i \neq k$ «скалярное» произведение функций

$$(\varphi_1, \varphi_k) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_i(x_j)\,\varphi_k(x_j) \tag{7.5.31}$$

равно нулю

$$(\varphi_i, \varphi_k) = 0.$$

Заметим, что если функции φ_k ортогональны, то и функции $\bar{\varphi}_k(x) = c_k\varphi_k(x)$ также будут ортогональны.

Если исходная система функций $\varphi_k(x)$ не ортогональна, то, беря линейные комбинации, из них можно по правилам теории функций построить ортогональную систему. Не останавливаясь на доказательстве этого, мы рассмотрим для примера систему функций:

$$\varphi_1(x) = 1,$$

$$\varphi_2(x) = x,$$

$$\varphi_3(x) = x^2.$$

Эта система не ортогональна, так как, например, при

$$x_1 = 1,$$

$$x_2 = 2 \text{ и}$$

$$n = 2$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \cdot x_j^2 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2^2 \neq 0;$$

однако ее можно заменить системой ортогональных функций $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\psi_3(x)$ следующим приемом.

Первую функцию $\psi_1(x)$ определим равенством

$$\psi_1(x) = \varphi_1(x) = 1. \tag{7.5.32}$$

В качестве второй функции $\psi_2(x)$ возьмем линейную комбинацию первых двух φ_1 и φ_2

$$\psi_2(x) = \varphi_2(x) + b\varphi_1(x) = x + b, \tag{7.5.33}$$

причем b определим из условия ортогональности ψ_2 и ψ_1.

$$(\psi_2, \psi_1) = (x + b, 1) = \sum_{j=1}^{n} (x_j + b) = 0$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = -nb,$$

откуда

$$b = -\bar{x} = -\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j}{n}. \tag{7.5.34}$$

Таким образом, положим:

$$\psi_2(x) = (x - \bar{x}) = x - \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j}{n}. \tag{7.5.35}$$

Наконец, для определения функции $\psi_3(x)$ положим:

$$\psi_3(x) = \varphi_3(x) + c\psi_2(x) + d\psi_1(x) = x^2 + c(x - \bar{x}) + d. \tag{7.5.36}$$

Для определения c и d воспользуемся снова условиями ортогональности:

$$(\psi_3, \psi_2) = (\varphi_3, \psi_2) + c(\psi_2, \psi_2) + d(\psi_2, \psi_1) = 0$$

и

$$(\psi_3, \psi_1) = (\varphi_3, \psi_1) + c(\psi_2, \psi_1) + d(\psi_1, \psi_1) = 0.$$

Принимая во виимание, что $(\psi_2, \psi_1) = 0$, мы из этих уравнений получим:

$$\left.\begin{aligned} c &= -\frac{(\varphi_3, \psi_2)}{(\psi_2, \psi_2)} = -\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j^2 (x_j - \bar{x})}{\sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})^2}, \\ d &= -\frac{(\varphi_3, \psi_1)}{(\psi_1, \psi_1)} = -\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}{n}, \end{aligned}\right\} \tag{7.5.37}$$

так что

$$\psi_3(x) = x^2 - \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j^2 (x_j - \bar{x})}{\sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})^2} (x - \bar{x}) - \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}{n} =$$

$$= x^2 - \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j^3 - \bar{x} \sum_{j=1}^{n} x_j^2}{\sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \bar{x} \sum_{j=1}^{n} x_j} (x - \bar{x}) - \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}{n}. \tag{7.5.38}$$

Таким же образом можно поступать и в более общем случае, ортогонализируя систему степеней 1, x, x^2, ..., x^m. Функция $\psi_i(x)$ определится при этом последовательными вычислениями.

Определив функции $\psi_1(x)$, ..., $\psi_{i-1}(x)$, для $\psi_i(x)$ мы будем иметь:

$$\psi_i(x) = x^{i-1} - \frac{(x_i^{i-1}, \psi_1)}{(\psi_1, \psi_1)} \psi_1(x) - \ldots - \frac{(x^{i-1}, \psi_{i-1})}{(\psi_{i-1}, \psi_{i-1})} \psi_{i-1}(x). \tag{7.5.39}$$

Каждая из функций $\psi_i(x)$ будет представлять многочлен $i-1$ степени.

Ортогональные многочлены, полученные таким образом, называются *многочленами Чебышева*. Нетрудно заметить, что каждую степень x^{i-1} можно представить в виде линейной комбинации функций $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_i$. Таким образом, и любой многочлен m-й степени можно представить в виде линейной комбинации функций $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_i, \ldots, \psi_{m+1}$.

Рассуждая аналогично, мы всегда сможем любую комбинацию $\sum_{j=1}^{n} a_k \varphi_k(x_j)$ заменить линейной комбинацией $\sum_{j=1}^{n} b_k \psi_k(x_j)$ ортогональных функций ψ_k, полученных ортогонализацией из функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ аналогичным процессом.

Мы предположим теперь, что система функций $\varphi_k(x)$ ортогональна. В этом случае $(\varphi_i, \varphi_j) = 0$, если $i \neq j$, и потому система (7.5.30) может быть записана значительно более просто:

$$\left.\begin{aligned} a_1(\varphi_1, \varphi_1) &= (y, \varphi_1), \\ a_2(\varphi_2, \varphi_2) &= (y, \varphi_2), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_m(\varphi_m, \varphi_m) &= (y, \varphi_m). \end{aligned}\right\} \tag{7.5.40}$$

Таким образом, решая (7.5.40), мы будем иметь:

$$a_k = \frac{(y, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m) \tag{7.5.41}$$

или

$$a_k = \frac{\sum_{j=1}^{n} y_j \varphi_k(x_j)}{\sum_{j=1}^{n} \varphi_k^2(x_j)}.$$

Мы снова видим, что a_k являются линейными функциями наблюденных значений y_j; но согласно (7.5.29) $y_j = \sum_{p=1}^{m} \alpha_p \varphi_p(x_j) + \delta_j$ и потому в силу ортогональности:

$$a_k = \frac{\sum_{j=1}^{n} \delta_j \varphi_k(x_j)}{(\varphi_k, \varphi_k)} + \frac{\sum_{p=1}^{m} \alpha_p (\varphi_p(x_j), \varphi_k(x_j))}{(\varphi_k, \varphi_k)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \delta_j \varphi_k(x_j)}{(\varphi_k, \varphi_k)} + \alpha_k$$

или

$$a_k - \alpha_k = \frac{\sum_{j=1}^{n} \delta_j \varphi_k(x_j)}{(\varphi_k, \varphi_k)} = \lambda_k. \tag{7.5.42}$$

Отсюда следует, что величины λ_k (как линейные функции величины δ_i) распределены нормально с центром в нуле и дисперсией, равной

$$\mathbf{D}\lambda_k = \mathbf{M}(\lambda_k^2) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{M}\delta_i^2) \varphi_k^2(x_i)}{(\varphi_k, \varphi_k)^2} = \frac{\sigma^2 (\varphi_k, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)^2} = \frac{\sigma^2}{(\varphi_k, \varphi_k)}. \tag{7.5.43}$$

Наиболее важное и значительное свойство коэффициентов a_k, разложенных по ортогональным функциям (которым вообще не обладают другие разложения), заключается в их некоррелированности, а в случае нормальности δ_i — и в их независимости. В самом деле, из (7.5.42) следует

$$(\varphi_k, \varphi_k)(\varphi_j, \varphi_j)\,\mathbf{M}(\lambda_k \lambda_j) = \mathbf{M}\left[\sum_{p=1}^{n} \delta_p \varphi_k(x_p) \sum_{p'=1}^{n} \delta_{p'} \varphi_j(x_{p'})\right] = \sum_{p, p'} \varphi_k(x_p) \varphi_j(x_{p'})\,\mathbf{M}(\delta_p \delta_{p'});$$

так как $\mathbf{M}(\delta_p \delta_{p'}) = 0$ при $p \neq p'$ и $\mathbf{M}\delta_p^2 = \sigma^2$ $(p = p')$, то предшествующая сумма сведется к сумме $\sigma^2 \sum_{p=1}^{n} \varphi_k(x_p) \varphi_j(x_p)$, равной нулю в силу условия ортогональности. Отсюда $\mathbf{M}(\lambda_k \lambda_j) = 0$ и коэффициент корреляции между a_k и a_j равен нулю, а следовательно, они некоррелированы.

Для оценки дисперсии σ^2 мы воспользуемся суммой квадратов уклонений $d_j^2 = (y_j - Y_j)^2$. Можно показать, что величина

$$s_Y^2 = \frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - Y_i)^2}{n-m} \tag{7.5.44}$$

представляет при наших предположениях несмещенную оценку σ^2. Величина $\frac{(n-m)\, s_Y^2}{\sigma^2}$ имеет распределение χ^2 с $n-m$ степенями свободы. Для построения доверительных интервалов для коэффициента α_k можно воспользоваться тем, что величина

$$t^{(k)} = \frac{(a_k - \alpha_k)}{s_{a_k}}, \tag{7.5.45}$$

где

$$s_{a_k} = \frac{s_Y}{\sqrt{(\varphi_k, \varphi_k)}} \tag{7.5.46}$$

распределена по закону Стьюдента с числом степеней свободы $n-m$.

Для случая, когда аргумент x_i принимает значения, равноотстоящие друг от друга, т. е. образующие некоторую арифметическую прогрессию, возможно всегда перейти к другому аргументу, который принимает лишь целые значения. Случай интерполяции при равноотстоящих значениях был подробно исследован Чебышевым. Существуют таблицы, облегчающие технику расчета в этом случае[1]). Рассмотрим пример.

---

[1]) См., например, книгу В. С. Немчинов, Полиномы Чебышева и математическая статистика, М. — Л, Гостехиздат, 1946.

Пример 7.5.2. Пусть у нас имеются следующие данные о распределении валиков по овальности в микронах до (x) и после (y) шлифования (табл. 7.5.5):

Таблица 7.5.5

y \ x	1	2	3	4	5	$n_{j\cdot}$
10	21					21
20	1	7				8
30		8	5			13
40			9	2		11
50			1	10		11
60				2	8	10
$n_{\cdot i}$	22	15	15	14	8	74

Частные средние $\bar{y}_x$, вычисленные по этим данным, будут следующие (табл. 7.5.6):

Найдем по способу наименьших квадратов зависимость между $\bar{y}_i$ и x_i в форме параболы второй степени:

$$\bar{y} = \sum_{k=1}^{3} a'_k \varphi_k(x) = a'_1 + a'_2 x + a'_3 x^2.$$

Ортогонализируя нашу систему, запишем ее в виде

$$\bar{y} = \sum_{k=1}^{3} a_k \psi_k(x) = a_1\psi_1(x) + a_2\psi_2(x) + a_3\psi_3(x)$$

и вычислим a_1, a_2, a_3, ψ_1, ψ_2 и ψ_3 по изложенной в этом разделе методике.

Для дальнейших вычислений составим сначала таблицу (табл. 7.5.7).

Таблица 7.5.6

x_i в сотых долях *мм*	$n_{i\cdot}$	$\bar{y}_i$ в *мк*
1	21	1
2	8	1,9
3	13	2,4
4	11	3,2
5	11	3,9
6	10	4,8
Сумма	74	

Таблица 7.5.7

x_i	$\bar{y}_i$	$n_{i\cdot}$	$n_{i\cdot}x_i$	$n_{i\cdot}x^2$	$n_{i\cdot}x^3$	$n_{i\cdot}x^4$	$n_{i\cdot}\bar{y}_i$	$n_{i\cdot}\bar{y}_i^2$	$n_{i\cdot}\bar{y}_i x_i$	$n_{i\cdot}\bar{y}_i x_i^2$
1	1	21	21	21	21	21	21	21	21	21
2	1,9	8	16	32	64	128	15,2	28,9	30,4	60,8
3	2,4	13	39	117	351	1 053	31,2	74,9	93,6	280,8
4	3,2	11	44	176	704	2 816	35,2	112,6	140,8	563,2
5	3,9	11	55	275	1 375	6 875	42,9	167,3	214,5	1072,5
6	4,8	10	60	360	2 160	12 960	48,0	230,4	288,0	1728,0
Σ		74	235	981	4 675	23 853	193,5	635,1	788,3	3726,3

Ортогональные функции $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ и $\psi_3(x)$ мы находим по формулам (7.5.32) (7.5.35) и (7.5.38):

$$\psi_1(x) = 1;$$

$$\psi_2(x) = x - \bar{x} = x - \frac{235}{74} = -3{,}18;$$

$$\psi_3(x) = x^2 - \frac{\sum n_{i\cdot}x_i^3 - \bar{x}\sum n_{i\cdot}x_i^2}{\sum n_{i\cdot}x_i^2 - \bar{x}\sum n_{i\cdot}x_i}(x - \bar{x}) - \frac{\sum n_{i\cdot}x_i^2}{n} =$$

$$= x^2 - \frac{4675 - 3{,}18\cdot 981}{981 - 3{,}18\cdot 235}(x - 3{,}18) - \frac{981}{74} = x^2 - 6{,}66(x - 3{,}18) - 13{,}3 = x^2 - 6{,}66x + 7{,}9.$$

Коэффициенты a_1, a_2 и a_3 вычислим по формуле (7.5.41):

$$a_1 = \frac{\sum n_{i.}\bar{y}_i\psi_1}{\sum\psi_1^2} = \frac{\sum n_{i.}\bar{y}_i}{74} = \frac{193{,}5}{74} = 2{,}61;$$

$$a_2 = \frac{\sum n_{i.}\bar{y}_i\psi_2}{\sum\psi_2^2} = \frac{\sum n_{i.}\bar{y}_i x_i - \bar{x}\sum n_i\bar{y}_i}{\sum (x-\bar{x})^2} =$$

$$= \frac{\sum n_{i.}\bar{y}_i x_i - \bar{x}\sum n_{i.}\bar{y}_i}{\sum n_{i.}x_i^2 - \bar{x}\sum n_{i.}x_i} = \frac{788{,}3 - 3{,}18\cdot 193{,}5}{981 - 3{,}18\cdot 235} = 0{,}74;$$

$$a_3 = \frac{\sum n_{i.}\bar{y}_i\psi_3}{\sum\psi_3^2} = \frac{\sum n_{i.}\bar{y}_i (x_i^2 - 6{,}66x_i + 7{,}9)}{\sum n_{i.}(x_i^2 - 6{,}66x_i + 7{,}9)^2} =$$

$$= \frac{\sum n_{i.}\bar{y}_i x_i^2 - 6{,}66\sum n_{i.}\bar{y}_i x_i + 7{,}9\sum n_{i.}\bar{y}_i}{\sum n_{i.}x_i^4 - 13{,}3\sum n_{i.}x_i^3 + 60{,}2\sum n_{i.}x_i^2 - 105{,}2\sum n_{i.}x_i + 62{,}4\sum n_{i.}} =$$

$$= \frac{3726{,}3 - 6{,}66\cdot 788{,}3 + 7{,}9\cdot 193{,}5}{23\,853 - 13{,}3\cdot 4675 + 60{,}2\cdot 981 - 105{,}2\cdot 235 + 62{,}4\cdot 74} = +0{,}008.$$

Искомое уравнение будет иметь вид:

$$\bar{y}_i = 2{,}61 + 0{,}74\,(x_i - 3{,}18) + 0{,}008\,(x_i^2 - 6{,}66x_i + 7{,}9) = 0{,}008x_i^2 + 0{,}69x_i + 0{,}32,$$

где $\bar{y}_i$ — средняя овальность валиков в микронах после шлифования и x_i — овальность валиков до шлифования в сотых долях миллиметра.

Более полное изложение основ теории корреляции будет дано в специальной части этой книги.

ГЛАВА VIII

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ И ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕТОДОВ В ТЕХНИКЕ

§ 1. Вводные замечания

Теория вероятностей и математическая статистика находят широкое применение в технике. Пожалуй, не будет преувеличением сказать, что в настоящее время почти не осталось таких областей техники, где бы они вместе или порознь не применялись.

В настоящей главе мы рассмотрим вопрос гораздо у́же: мы сосредоточим внимание на применении этих методов только в машиностроении. Однако и здесь применения указанных дисциплин настолько разнообразны, что настоящая глава охватывает, конечно, не все и, может быть, даже не все важнейшие приложения теории вероятностей и математической статистики в машиностроении, являясь известным введением в них. Последнее обстоятельство составляет особенность этой главы. В предыдущих главах излагавшийся материал был систематизирован по соответствующим математическим методам и приемам с учетом в ряде случаев последовательности усложнения применяемого математического аппарата.

В отличие от этого, в данной главе использована иная систематика, опирающаяся на подразделения самой технической деятельности. Здесь мы будем рассматривать в основном лишь применения уже изложенных в предыдущих главах методов и приемов с добавлением некоторых важнейших с точки зрения практики подробностей. Но располагать материал будем в другом разрезе, применительно к основным этапам, таким, как конструирование, технология производства, технический контроль. Несмотря на то, что при подобном рассмотрении, с одной стороны, неизбежны некоторые повторения и к тому же в каждом из разделов приходится затрагивать разные по существу вопросы, этот порядок, с другой стороны, позволяет осветить характерные примеры применения статистических и вероятностных методов в их комплексе при решении тех или иных типичных задач из данной области техники.

Итак, мы рассмотрим вероятностные методы оценки ошибок механизмов, применяемые при конструировании и расчетном обосновании допусков их размеров, статистические методы анализа технологических процессов, некоторые вопросы статистических методов исследования погрешностей измерения и статистические методы текущего и последующего контроля.

§ 2. Вероятностные методы оценки ошибок механизмов

8.2.1. Общая характеристика применения вероятностных методов в современной теории точности механизмов. Вероятностные методы нашли широкое применение в современной теории точности механизмов, разрабатываемой советскими учеными. Эта теория ставит перед собой задачу *исследовать влияние точности деталей и узлов на конечную точность механизма в целом* с целью

главным образом надлежащего выбора допусков. В настоящее время наметились в основном два подхода к решению этой задачи.

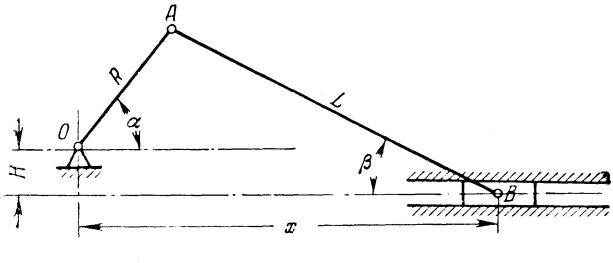
В первом случае вопрос рассматривается *с точки зрения множества уже изготовленных или подлежащих изготовлению машин и приборов*, объединенных одним проектом. Тогда ошибки расположений в звене элементов кинематических пар и геометрических форм поверхностей элементов (*первичные ошибки*) оказываются случайными, а разница положений ведомых звеньев действительного и соответствующего идеально точно изготовленного механизмов, при одинаковом положении ведущих звеньев (*ошибки положения*), и добавочные силы реакции, вызванные добавочными ускорениями от первичных ошибок (*динамические ошибки*), оказываются функциями случайных величин. Вся разработка поставленного вопроса при этом носит вероятностный характер.

Во втором случае в рассмотрение *вводится периодичность первичных ошибок, обусловливаемая периодичностью процесса получения действительных поверхностей деталей на металлообрабатывающих станках*. Ошибки этого рода были названы *функциональными ошибками*. Если функциональная зависимость первичной ошибки вполне определена, т. е. известен не только вид функции, но и все входящие в нее параметры (что, естественно, возможно лишь по отношению к единичному экземпляру), то функциональную ошибку называют *определенной*. Если известен только вид функции, но не известны параметры ее (что бывает, когда хотят хотя бы с более или менее грубым допущением перейти от единичного экземпляра к серии одинаковых изделий, полученных в результате одного и того же технологического процесса), то ошибку называют *неопределенной* функциональной ошибкой, а неизвестные параметры оценивают с помощью вероятностных и статистических методов.

Из сказанного ясно, что указанные два направления теории точности механизмов дополняют друг друга, так как исследование точности механизмов естественно вести и на основе единичных экземпляров с применением аналитических приемов и выявлением строгих зависимостей и параллельно исследовать множество механизмов с целью получения обобщенных данных и методик.

Мы уже рассмотрели в § 6 главы IV один из практически важных вопросов, относящихся к данной области, — это вопрос о приложении теории кривых распределения к расчету размерных цепей.

В настоящем параграфе мы рассмотрим еще некоторые характерные примеры, иллюстрирующие применение вероятностных методов в теории точности механизмов. Начнем с простейшего примера.



Черт. 103. Схема кривошипного механизма.

8.2.2. Оценка погрешностей кривошипного механизма. Пусть мы имеем кривошипный механизм, принципиальная схема которого показана на черт. 103.

Требуется определить ошибку положения x ползуна B в зависимости от погрешностей размеров кривошипа R и шатуна L и от погрешности дезаксажа H (смещения центра вращения кривошипа относительно направления движения ползуна). Из графика имеем:

$$x = R\cos\alpha + L\cos\beta \tag{8.2.1}$$

и

$$R\sin\alpha + H = L\sin\beta, \tag{8.2.2}$$

откуда

$$x = R\cos\alpha + \sqrt{L^2 - (R\sin\alpha + H)^2} = f(R,\ L,\ H). \tag{8.2.3}$$

Если параметры R, L и H в действительности отличаются от их идеальных значений на малые величины ΔR, ΔL и ΔH, то параметр x тоже будет отличаться от идеального значения.

Разлагая функцию (8.2.3) в ряд Тейлора и ограничиваясь ввиду относительной малости погрешностей членами 1-го порядка, получим:

$$x+\Delta x=x+\frac{\partial f}{\partial R}\Delta R+\frac{\partial f}{\partial L}\Delta L+\frac{\partial f}{\partial H}\Delta H, \tag{8.2.4}$$

где $\frac{\partial f}{\partial R}$, $\frac{\partial f}{\partial L}$ и $\frac{\partial f}{\partial H}$ — частные производные соответственно по R, L и H.

Из (8.2.4) имеем:

$$\Delta x=\frac{\partial f}{\partial R}\Delta R+\frac{\partial f}{\partial L}\Delta L+\frac{\partial f}{\partial H}\Delta H, \tag{8.2.5}$$

но

$$\frac{\partial f(R;\ L;\ H)}{\partial R}=\cos\alpha-\frac{R\sin\alpha+H}{\sqrt{L^2-(R\sin\alpha+H)^2}}\sin\alpha,$$

откуда, учитывая (8.2.2) и (8.2.1), получим:

$$\frac{\partial f(R;\ L;\ H)}{\partial R}=\cos\alpha-\frac{L\sin\beta}{L\cos\beta}\sin\alpha=\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta},$$

$$\frac{\partial f(R;\ L;\ H)}{\partial L}=\frac{L}{\sqrt{L^2-(R\sin\alpha+H)^2}}=\frac{1}{\cos\beta}$$

и

$$\frac{\partial f(R;\ L;\ H)}{\partial H}=-\frac{R\sin\alpha+H}{\sqrt{L^2-(R\sin\alpha+H)^2}}=-\frac{L\sin\beta}{L\cos\beta}=-\operatorname{tg}\beta.$$

А потому

$$\Delta x=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta}\Delta R+\frac{1}{\cos\beta}\Delta L-\operatorname{tg}\beta\cdot\Delta H. \tag{8.2.6}$$

Математическое ожидание и дисперсию каждого из трех слагаемых правой части этого равенства мы находим в следующем виде:

$$\mathbf{M}\left[\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta}\Delta R\right]=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta}\mathbf{M}(\Delta R),\quad \mathbf{M}\left(\frac{\Delta L}{\cos\beta}\right)=\frac{\mathbf{M}(\Delta L)}{\cos\beta},$$

$$\mathbf{M}(-\operatorname{tg}\beta\,\Delta H)=-\operatorname{tg}\beta\,\mathbf{M}(\Delta H),$$

$$\mathbf{D}\left[\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta}\Delta R\right]=\frac{\cos^2(\alpha+\beta)}{\cos^2\beta}\mathbf{D}(\Delta R),\quad \mathbf{D}\left(\frac{\Delta L}{\cos\beta}\right)=\frac{\mathbf{D}(\Delta L)}{\cos^2\beta},$$

$$\mathbf{D}(-\operatorname{tg}\beta\,\Delta H)=\operatorname{tg}^2\beta\,\mathbf{D}(\Delta H).$$

Систематическая погрешность Δx может быть найдена путем суммирования математических ожиданий:

$$\mathbf{M}(\Delta x)=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta}\mathbf{M}(\Delta R)+\frac{1}{\cos\beta}\mathbf{M}(\Delta L)-\operatorname{tg}\beta\mathbf{M}(\Delta H). \tag{8.2.7}$$

Таким образом, систематическая погрешность положения ползуна при постоянных систематических погрешностях R, L и H будет изменяться по закону (8.2.7) в зависимости от угла поворота кривошипа. Заметим, что при этом

$$\cos\beta=\frac{1}{L}\sqrt{L^2-(R\sin\alpha+H)^2}.$$

Дисперсию $\mathbf{D}(\Delta x)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma_{\Delta x}$ ошибки положения мы, учитывая линейный характер зависимости Δx от ΔR, ΔL и ΔH, легко найдем по теоремам (3.4.15) и (3.4.17), если первичные ошибки независимы, и по теореме (3.4.27), если они коррелированы. Тогда, учитывая, что

распределения ΔR, ΔL и ΔH бывают обычно в той или иной мере близкими к нормальным, мы можем считать с вероятностью порядка 0,9, что практически предельная ошибка положения

$$\Delta x_{\lim} \leqslant 3\sigma_{\Delta x}. \qquad (8.2.8)$$

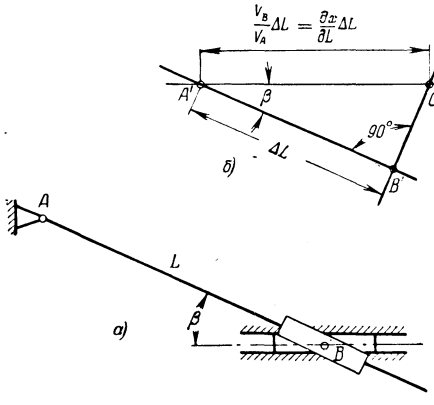
Существует другой, более строгий, но вместе с тем в большинстве случаев очень громоздкий способ оценки предельной ошибки положения. Этот способ сводится к нахождению закона распределения Δx по плотностям распределений ΔR, ΔL и ΔH с помощью (4.4.7).

Определив таким путем плотность распределения ведомого звена и задавшись разумным уровнем надежности, мы сможем вычислить и практически предельную его погрешность.

Заметим, что для более сложных механизмов формула, выражающая взаимную связь параметров (в нашем примере формула (8.2.3)), может оказаться громоздкой, и тогда проще найти нужные частные производные графическим способом, предложенным Н. Г. Бруевичем.

Пусть, например, этим последним способом требуется определить коэффициент $\frac{\partial f}{\partial L}$ в выражении (8.2.5) для кривошипного механизма, изображенного на черт. 103.

При заданном положении нашего механизма, т. е. при фиксированном положении точки A, изменение длины L на величину ΔL равносильно «преобразованию» его, изображенному на черт. 104; мы получили тангенсный механизм со второй ползушкой на шатуне L, могущей перемещаться вдоль шатуна. Тогда, обозначая время через t, будем иметь $\frac{\partial x}{\partial L} = \frac{\partial x}{\partial t} : \frac{\partial L}{\partial t}$. Иными словами, $\frac{\partial x}{\partial L}$ в «преобразованном механизме» равна отношению скорости v_1 перемещения первой ползушки к скорости v_2 перемещения второй ползушки вдоль звена L. Следовательно,



Черт. 104. Графический способ определения частных производных в уравнении погрешностей механизма.
а — преобразованный механизм,
б — картина малых перемещений.

$$\frac{\Delta x}{\Delta L} = \frac{v_B}{v_A}. \qquad (8.2.9)$$

Пользуясь формулой (8.2.9), строим план скоростей преобразованного механизма, или так называемую «картину малых перемещений», как показано на черт. 104, *б*, откладываем вместо скорости v_2 отрезок, изображающий ΔL, и измеряем длину Δx из этого графика. Так как полученная «картина малых перемещений» представляет прямоугольный треугольник с углом β при вершине, то

$$\frac{\partial x}{\partial L} = \frac{v_B}{v_A} = \frac{1}{\cos\beta}.$$

Таким образом, мы пришли к тому же результату, что и раньше.

Рассмотрим еще один пример.

8.2.3. Оценка погрешности кулачкового механизма с толкателем. Пусть требуется найти ошибку положения штока *3* плоского кулачкового механизма с толкателем, показанного на черт. 105, *а*, в зависимости от эксцентриситетов кулачка *1* и ролика *2*. Пусть эксцентриситет кулачка будет вектор $\overline{OO'}$, а ролика — вектор $\overline{AA'}$ (черт. 104, *б*). Вектор $\overline{OO'}$ определяется величиной эксцентриситета $\Delta_{эк}$

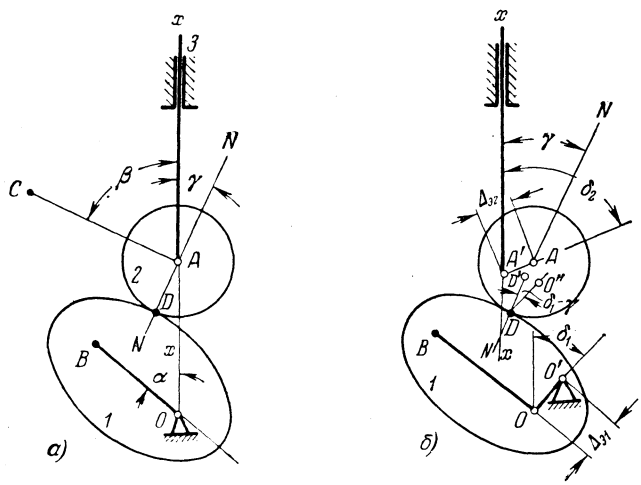
кулачка *1* и углом δ_1, а вектор $\overline{AA'}$ — величиной эксцентриситета $\Delta_{э2}$ ролика *2* и углом δ_2. *D* представляет точку соприкосновения кулачка с роликом, а *NN* есть нормаль к профилям кулачка и ролика в точке соприкосновения *D*.

Из черт. 105, *а* имеем:

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \beta, \tag{8.2.10}$$

где γ — угол между нормалью *NN* и направлением $x - x$ перемещения штока *3*, а β — угол между тем же направлением и касательной к профилям кулачка и ролика в точке *D*.

β является вместе с тем углом между касательной *AC* и радиусом-вектором $\overline{OA} = \rho = x$ точки *A* эквидистанты кривой профиля кулачка ($\overline{OA}$ также



Черт. 105. Кулачковый механизм с толкателем.

является в прямоугольной системе координатой x центра *A* вращения ролика, отсчитываемой в направлении $x - x$ от точки пересечения этого направления с перпендикуляром, опущенным на него из центра вращения кулачка, являющегося полюсом), иными словами, он является углом наклона касательной, но тангенс этого угла, как известно из анализа, равен:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{dy}{dx} = \frac{\rho\cos\alpha\, d\alpha}{\cos\alpha\, d\rho} = \frac{\rho}{\frac{d\rho}{d\alpha}}, \tag{8.2.11}$$

где x и y — текущие координаты точки *A* в прямоугольной системе координат, α — угол между направлением $x - x$ и риской *OB*, нанесенной на теле кулачка (таким образом, α является полярным углом точки *A*).

Пусть, как часто бывает на практике, уравнение эквидистанты профильной кривой кулачка будет:

$$OA = \rho = k\alpha + c. \tag{8.2.12}$$

Тогда из (8.2.11) и (8.2.12) получим:

$$\frac{d\rho}{d\alpha} = k, \quad \operatorname{ctg}\gamma = \operatorname{tg}\beta = \frac{k\alpha + c}{k}, \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{\alpha + \frac{c}{k}}. \tag{8.2.13}$$

Угол γ, так же как и углы δ_1 и δ_2 эксцентриситетов кулачка и ролика, отсчитывается от направления, параллельного $x - x$.

Найдем ошибку положения штока, вызываемую эксцентриситетом кулачка *1*. Переместим без вращения кулачок *1* на величину OO' по направлению эксцентриситета и разложим получающееся от этого перемещение поверхности кулачка около точки D на перемещение по направлению нормали NN и касательной. Очевидно, что только первое из этих направлений вызовет ошибку положения штока, второе же — лишь приведет к проскальзыванию кулачка по ролику.

Тогда составляющая перемещения по нормали DD' будет равна:

$$DD' = DO'' \cos(\delta_1 - \gamma) = \Delta_{э1} \cdot \cos(\delta_1 - \gamma).$$

Проектируя перемещение по нормали на ось штока, получим погрешность перемещения последнего под действием нормальной составляющей перемещения от эксцентриситета в виде

$$\frac{\cos(\delta_1 - \gamma)}{\cos\gamma} \Delta_{э1}. \tag{8.2.14}$$

Аналогичным образом найдем погрешность штока, вызванную эксцентриситетом ролика, в виде

$$\frac{\cos(\delta_2 - \gamma)}{\cos\gamma} \Delta_{э2}. \tag{8.2.15}$$

Учитывая, что погрешности под действием обоих эксцентриситетов будут иметь разные направления при вращении кулачка в одну и ту же сторону, мы получим погрешность $\Delta x_э$ положения штока под действием эксцентриситетов кулачка и ролика в виде

$$\Delta x_э = \frac{\cos(\delta_1 - \gamma)}{\cos\gamma} \Delta_{э1} - \frac{\cos(\delta_2 - \gamma)}{\cos\gamma} \Delta_{э2} = (\cos\delta_1 + \sin\delta_1 \operatorname{tg}\gamma) \Delta_{э1} -$$

$$- (\cos\delta_2 + \sin\delta_2 \cdot \operatorname{tg}\gamma) \Delta_{э2} = \left(\cos\delta_1 + \frac{\sin\delta_1}{\alpha + \frac{c}{k}}\right) \Delta_{э1} - \left(\cos\delta_2 + \frac{\sin\delta_2}{\alpha + \frac{c}{k}}\right) \Delta_{э2}. \tag{8.2.16}$$

Коэффициенты при $\Delta_{э1}$ и $\Delta_{э2}$ здесь являются передаточными отношениями ошибок от эксцентриситетов.

Как видно из этой формулы, передаточные отношения ошибок от эксцентриситетов по абсолютной величине будут иметь максимум при таких направлениях эксцентриситетов, когда

$$\delta_1 - \gamma = \delta_2 - \gamma = 0;\ \pi,$$

т. е., иными словами, направления эксцентриситетов должны быть параллельны нормали к профилям кулачка и ролика.

Передаточные отношения ошибок будут равны нулю, когда

$$\delta_1 - \gamma = \delta_2 - \gamma = \pm\frac{\pi}{2},$$

т. е. когда направления эксцентриситетов будут перпендикулярны к нормали.

При рассмотрении целой группы одинаковых механизмов передаточное отношение ошибки от эксцентриситета (кулачка или ролика) является случайной величиной.

Определим его математическое ожидание и дисперсию в предположении, что угловое положение эксцентриситета равномерно распределено в пределах от 0 до 2π, т. е. на одном полном обороте.

Тогда плотность вероятности δ будет $\frac{1}{2\pi}$.

Математическое ожидание передаточного отношения мы найдем по формуле (3.5.2):

$$\mathbf{M}\left[\frac{\cos(\delta - \gamma)}{\cos\gamma}\right] = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\delta - \gamma)}{\cos\gamma} \frac{1}{2\pi} d\delta = 0. \tag{8.2.17}$$

Дисперсия передаточного отношения будет равна:

$$D\left[\frac{\cos(\delta-\gamma)}{\cos\gamma}\right]=\int_0^{2\pi}\left[\frac{\cos(\delta-\gamma)}{\cos\gamma}\right]^2\frac{1}{2\pi}d\delta=$$

$$=\frac{1}{2\pi\cos^2\gamma}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\sin 2(\delta-\gamma)}{4}+\frac{\delta-\gamma}{2}\right]=\frac{1}{2\cos^2\gamma}. \quad (8.2.18)$$

Сделав в отношении законов распределения эксцентриситетов и их зависимости от передаточных отношений (углов δ) те или иные обоснованные предположения, мы можем на основании правил, изложенных в главах III и IV, определить практически предельные значения погрешности ошибки положения ведомого звена.

§ 3. Статистические методы анализа технологических процессов

8.3.1. Задачи анализа технологических процессов. Основной задачей анализа технологических процессов является изучение их точности, которая принадлежит к числу важнейших характеристик современного машиностроительного производства. При исследовании точности, начало которого положено в трудах советских ученых, приходится рассматривать влияние различных факторов на возникновение погрешностей обработки и определять суммарную погрешность последней.

Вторая задача, решаемая в комплексе с первой, заключается в изучении стабильности (устойчивости) технологических процессов, т. е. в изучении их постоянства во времени.

Решение этих задач особенно актуально в условиях крупносерийного и массового производств, где обработка ведется главным образом на настроенных станках, в более или менее стабильных производственных условиях. В этих условиях с достаточным для практических целей приближением оказывается возможным исходить из модели массовых вероятностных процессов.

При решении обеих указанных задач в настоящее время используют главным образом два метода:

1) «расчетно-аналитический» и

2) «статистический».

Первый из них состоит в том, что сначала определяются отдельные составляющие погрешности обработки в зависимости от обусловливающих их появление причин, а затем они складываются по определенным «правилам» с целью получения суммарной погрешности. Факторы, обусловливающие отдельные составляющие общей погрешности обычно подвержены случайным флюктуациям. Поэтому расчет погрешностей зачастую сводится либо к определению «поля рассеивания», т. е. надежных доверительных интервалов для каждой из них, либо к оценке некоторой усредненной их величины, полученной из данных наблюдений на производстве или из специально поставленных экспериментов.

Под «статистическим» методом часто понимают получение из проводимых в цехах наблюдений данных, характеризующих суммарную погрешность, возникающую при обработке в результате взаимодействия ряда причин.

Мы видим, что оба метода взаимно дополняют друг друга. В самом деле, если речь идет о массовых повторяющихся процессах в машиностроении, то вполне естественно при определении «поля рассеивания» отдельных составляющих погрешности, а также при обработке различных и в том числе экспериментальных наблюдений и при суммировании составляющих использовать правила и приемы теории вероятностей и математической статистики. С другой стороны, применение статистических методов вовсе не исключает, а чаще просто предполагает изучение причинных связей между отдельными факторами. Дело лишь

в том, что возможности применения статистических методов к изучению точности и стабильности технологических процессов значительно шире, чем можно было бы предположить на первый взгляд. Мы в дальнейшем постараемся показать это, используя лишь тот материал, который изложен в предыдущих главах настоящей книги.

8.3.2. Анализ точности технологического процесса. Под «статистическим» анализом «суммарной» точности технологического процесса, точнее говоря, каждой отдельной его операции, обычно понимают сопоставление «поля рассеивания» интересующего нас признака качества (чаще всего размера) на данной операции с заданным по технологической карте на эту операцию допуском. «*Полем рассеивания*» называется зона между надлежаще выбранными практически предельными отклонениями, вероятность превышения которых настолько мала, что она может быть принята практически равной нулю. Если зона рассеивания не больше допуска, то суммарная точность операции признается удовлетворительной (или излишней, если допуск намного больше зоны); в противоположном случае точность считается недостаточной. При детальном анализе зона рассеивания строится с учетом погрешности настройки, т. е. с учетом уклонения центра рассеивания от соответствующего допускаемого значения его положения (при симметричном рассеивании допускаемыми положениями будут те, которые лежат в средней части поля допуска).

В ряде случаев учитываются еще и погрешности измерений, накладывающиеся на погрешности обработки и увеличивающие зону рассеивания размеров.

При таком анализе точности технологического процесса, как мы видим, в статистическом отношении задача сводится:

1) к оценке с нужным приближением *закона распределения* интересующего нас признака,

2) к нахождению (с помощью этого закона) *зоны рассеивания*, удовлетворяющей принятой, достаточно близкой к единице, вероятности P нахождения признака в пределах этой зоны и

3) к *сопоставлению* полученной таким образом зоны с допуском.

Говоря о функции распределения признака в совокупности обработанных изделий, обычно различают:

1) «*мгновенное*» *распределение* и

2) *суммарное распределение*.

Под *мгновенным распределением* понимается распределение признака в совокупности, которое имело бы место, если бы действие всех производственных факторов оставалось бы таким (или примерно таким), каким оно является в данный момент времени. (Здесь мы пока оставляем в стороне вопрос о преобразовании с течением времени нашего распределения; этот вопрос будет рассмотрен в следующем разделе данного параграфа.)

Под *суммарным распределением* понимают итоговое распределение изготовленной продукции за некоторый период времени. Оно обычно складывается под действием изменяющихся с течением времени факторов.

Если положение центра настройки непрерывно или систематически контролируется, то зона рассеивания строится на основе параметра мгновенного распределения. При относительно редкой проверке центра настройки часто предпочитают исходить из параметров суммарного распределения.

При оценке закона распределения приходится начинать с выбора числа наблюдений. В **5.3.5** было показано, как выбрать число n_σ наблюдений в зависимости от принятых уровня надежности α и предельной относительной ошибки q_σ в оценке среднего квадратического отклонения σ, в долях которого обычно и выражается упоминавшаяся «зона рассеивания». Заметим лишь, что теперь при выборе q_σ можно использовать то обстоятельство, что допуск δ нам обычно заранее

известен. Чем более узким является допуск и чем напряженнее его выполнение, тем меньшей должна быть выбрана предельная относительная ошибка q_σ, а следовательно, и большее число наблюдений n_σ.

Так, например, если мы хотим, чтобы полученный из наблюдений доверительный интервал с 95%-ной гарантией (95 случаев из 100) покрывал неизвестное нам значение σ, то, выбрав 50 наблюдений, мы будем иметь $q_\sigma \approx 0{,}2$, т. е. ошибка в оценке σ может составить $s - \sigma = \pm 0{,}2\sigma$. Поэтому действительное отношение допуска δ к параметру рассеивания размеров σ вполне может оказаться равным 4,8 в тех случаях, когда мы на практике при 50 наблюдениях получаем отношение δ к $\bar{s}$, равное 6. Следовательно, величина риска выхода размеров изделий за границы допуска (при центре в середине поля допуска) может составить не 0,27% (как это бывает при $\delta = 6\sigma$), а 1,64% и ее никак нельзя будет признать пренебрежимо малой. Отсюда видна практическая важность учета величины доверительного интервала при оценке σ по $\bar{s}$ во время анализа точности технологического процесса.

Пусть теперь число наблюдений n_σ выбрано. Эти наблюдения могут быть произведены двумя способами:

1) подряд за определенный промежуток времени при более или менее неизменных производственных условиях (станок, изделие, настройка, режимы и т. д.),

2) собраны из групп изделий, полученных за разные промежутки времени, при разных настройках, разных обрабатываемых (но все-таки однотипных) изделиях и иногда даже на разных станках одной модели, находящихся в более или менее одинаковом состоянии в смысле изношенности и исправности.

В первом случае, даже если мы можем предполагать, что при обработке n_σ изделий, принадлежащих к одной партии, центр рассеивания a (т. е. размер, на который был в действительности настроен станок) и параметр рассеивания σ оставались практически неизменными во времени, целесообразно все же произвести предварительную проверку «случайности» последовательности полученных нами данных с помощью одного из способов, описанных в **6.5.4** и **6.5.5**. Затем, при положительных результатах такой проверки, следует, как правило, проверить еще гипотезу нормальности в соответствии с процедурой, изложенной в **6.4.1** или в **6.6.1**. После этого мы можем оценить интересующий нас параметр рассеивания так, как это указано в **5.3.4** (при большом числе наблюдений) или в **5.4.2** (при сравнительно малом числе наблюдений), причем в обоих случаях определяем доверительные границы при ранее выбранном уровне надежности α для интересующего нас параметра σ.

Во втором случае мы, оказывается, также можем найти обоснованную оценку интересующего нас параметра рассеивания σ. Пусть у нас имеется m групп изделий с числами изделий $n_1, n_2, \ldots, n_m$ в каждой из них, причем центры $a_1, a_2, \ldots, a_m$, отвечающие нашим группам, могут быть не равны между собой. Здесь мы поступаем следующим образом.

Прежде всего целесообразно проверить «случайность» последовательностей наблюдений внутри каждой группы тем же способом, что и ранее. При отрицательном результате проверки можно разбить группы на более мелкие однородные подгруппы (например, сменные выработки можно разбить на 1—2-часовые).

Последнее замечание относится также и к отрицательным результатам проверки случайности в нашем *первом* случае.

Далее гипотезу о нормальности совокупности мы можем проверить, не строя никаких предположений относительно одинаковости центров a_i и параметров σ_i для наших групп, используя способ, изложенный в **6.6.2**. Еще раз заметим, однако, что при малых численностях $n_1, n_2, \ldots, n_m$ групп эта проверка будет в значительной степени ориентировочной.

В этом случае можно проверить нулевую гипотезу $a_1 = a_2 = \ldots = a_m$ так, как указано в **6.3.3**, и если она подтвердится, то проверку нормальности можно

осуществить также по способу **6.4.1** или **6.6.1**. Параметр σ мы в этом случае можем оценить по формуле (6.3.27).

Если мы располагаем группами с различными центрами рассеивания (что бывает, например, при разных настройках и при значительном износе инструмента), то оценку параметра «мгновенного» распределения мы можем получить по формуле (6.4.28), произведя при этом проверку однородности ряда наших дисперсий $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_m^2$ по способу, описанному в **6.4.3**. Доверительный интервал для общего параметра σ «мгновенного» распределения мы строим на основе объединенного числа наблюдений $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$.

В целях упрощения вычислений иногда еще стремятся оценить параметр σ по совокупности размахов варьирования, полученных по более или менее значительному числу малых выборок (например, по 20 и более). Следует иметь в виду, однако, что, оценивая таким путем σ с помощью, например, табл. XIV приложений, мы получим менее выгодную оценку, чем оценка с помощью $\bar{s}$. Поэтому при пользовании размахом для обеспечения равной надежности оценки потребуется больше наблюдений, трудность производства которых может превысить трудность вычисления $\bar{s}$.

По-разному оценив параметр рассеивания σ в *первом* и во *втором* случаях, мы переходим затем к построению «зоны рассеивания» — A, выполняемому теперь уже единообразно. При нормальном законе распределения принято определять зону рассеивания, исходя из уровня надежности попадания в нее признака (размера), равного $P = 0{,}99730$. Как легко видеть из табл. V приложений, этому уровню отвечает зона $(a - 3\sigma,\ a + 3\sigma)$, где a — центр настройки. Таким образом, величина интересующей нас зоны $A = 6\sigma$.

Тогда оценка зоны будет иметь вид

$$6\beta\bar{s} < A < 6\gamma\bar{s}, \tag{8.3.1}$$

где коэффициенты β и γ, зависящие от принятого для доверительной оценки σ уровня надежности α и от числа n произведенных наблюдений, будут различными при разных способах оценки σ, а именно:

1) при оценке по способу **5.3.4**

$$\beta_1 = 1 - \frac{z_\alpha}{\sqrt{2n}} \quad \text{и} \quad \gamma_1 = 1 + \frac{z_\alpha}{\sqrt{2n}};$$

2) при оценке по способу **5.4.2**

$$\beta_2 = \frac{n-1}{\chi_2\sqrt{n}} \quad \text{и} \quad \gamma_2 = \frac{n-1}{\chi_1\sqrt{n}}.$$

Здесь z_α есть аргумент функции Лапласа, отвечающий вероятности α, $\chi_2 = \sqrt{\chi_2^2}$ и $\chi_1 = \sqrt{\chi_1^2}$, значения χ_1^2 и χ_2^2 берутся из табл. VIII приложений при числе степеней свободы $n - 1$ и вероятностях соответственно $\frac{1+\alpha}{2}$ и $\frac{1-\alpha}{2}$.

При оценке по способу **5.3.4** доверительный интервал выражается через $\bar{R}$.

Окончательную оценку точности операции естественно производить с помощью неравенства

$$\delta \geqslant 6\gamma\bar{s} \tag{8.3.2}$$

или при оценке σ по способу **5.4.2** сравнением δ с правой доверительной границей для величины 6σ.

Если по производственно-конструкторским соображениям при контроле размеров за основу берутся только наибольшие или только наименьшие

значения размера данного проверяемого экземпляра продукции, то допуск δ должен быть уменьшен на величину допускаемого колебания размера по длине или в поперечном сечении изделия (за счет конусности, овальности, биения и т. п.).

Разумеется, рассмотренный здесь прием относится к очень устойчивым технологическим процессам, т. е. к частному случаю, когда смещением во времени центра рассеивания размеров можно пренебречь.

Если подробное (при большом числе наблюдений) исследование точности было произведено лишь на одном станке, то перед распространением полученных результатов на другие станки, настроенные на аналогичную операцию, целесообразно убедиться в законности подобного распространения, использовав прием, описанный в **6.4.4.**

Теперь мы перейдем к анализу стабильности технологического процесса во времени.

8.3.3. Анализ стабильности технологического процесса. Анализируя суммарную точность технологического процесса, мы стремимся определить, в какой мере в данных производственных условиях обеспечивается соблюдение тех или иных качественных признаков продукции, например, надлежащих размеров деталей. При этом нас интересуют, конечно, не изделия, полученные в какой-то момент времени, а вся повседневно вырабатываемая в течение более или менее продолжительного промежутка времени (смены, месяца, года) продукция. Для суждения об этом недостаточно знать «мгновенную» точность операций, но нужно еще знать, как она изменяется во времени под влиянием притупления или, как принято говорить, «размерного износа» инструмента, изменения температурного режима и изменения других производственных условий.

Материалом для анализа стабильности технологического процесса могут послужить те же данные, что и для анализа точности, однако они будут пригодны лишь в том случае, если представляют непрерывные наблюдения, охватывающие достаточный промежуток времени (сутки, смену) или, если они составлены из выборок, отобранных через определенные фиксированные промежутки времени (например, через час или через полчаса по 10—30 штук). Понятно, что наблюдения должны быть зафиксированы в протоколах строго в порядке их осуществления (т. е. в порядке изготовления измеренных изделий). Интервалы между выборками, называемыми в этом случае *«временными пробами»* или просто «пробами», устанавливаются в зависимости от степени наклонности технологического процесса к быстрым разладкам. О выборе общего числа всех произведенных наблюдений уже было сказано ранее; теперь надо только учесть, что информацию о состоянии процесса за данный отрезок времени мы будем получать из отвечающей ему пробы; поэтому численность последней должна быть подвергнута предварительной оценке теми же приемами, что и прежде. Заметим, что в вопросе о выборе численности пробы мы сталкиваемся с противоречием: для надежного и более или менее точного суждения о состоянии процесса в данное время проба должна быть достаточно большой, но увеличение объема пробы ведет к тому, что она все в большей мере включает происходящие с течением времени изменения в процессе и, в частности, изменения центра настройки и характеристики рассеивания, а поэтому проба должна быть возможно меньшей. Выход из этого затруднения находят, знакомясь предварительно с ходом процесса. Мы будем предполагать, что указанные данные о ходе процесса во времени подвергнуты проверке в смысле «случайности» последовательностей в группах и в отношении нормальности мгновенного распределения так, как было указано в предыдущем разделе. После этого, обрабатывая материал по каждой пробе, мы определяем моменты разладок процесса, заключающихся:

1) в смещении центра настройки по формуле (6.3.29) раздела **6.3.3;**

2) в изменении рассеивания по формуле (6.4.33) раздела **6.4.3** и дополнительно еще приемом, изложенным в **6.3.2.**

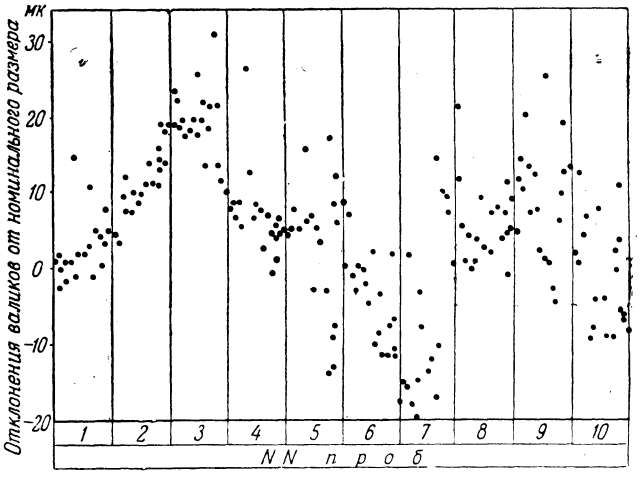
Установив моменты разладок, мы определяем затем наименьший и средний периоды времени, протекающего между двумя разладками;

а) по центру настройки и б) по рассеиванию.

Продолжительность полученных межразладочных периодов и будет характеризовать стабильность технологического процесса. Продолжительность и частота разладок, естественно, также подвержена флюктуациям, но более подробное исследование этих последних требует и более сложного аппарата и поэтому в этой части книги рассматриваться не будет.

В качестве наглядной иллюстрации и дополнительных приемов исследования стабильности технологического процесса могут быть использованы еще: 1) «точечные» диаграммы, 2) «точностные» диаграммы, 3) диаграммы «доверительных интервалов».

На *«точечных»* диаграммах по оси абсцисс откладываются порядковые номера наблюдений за процессом по времени их производства, а по оси ординат — индивидуальные или средние по пробам значения исследуемого признака (обычно

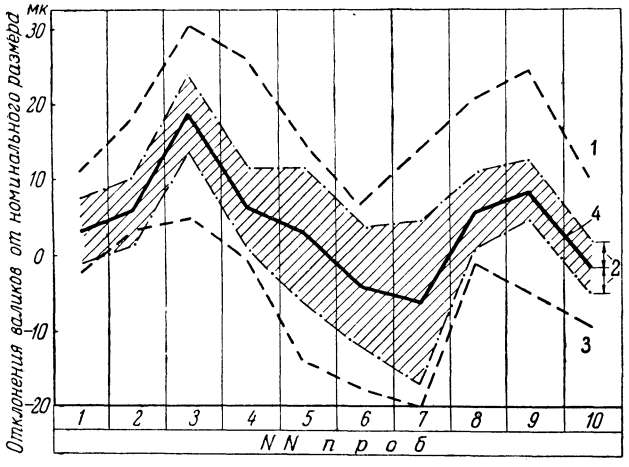


Черт. 106. Точечная диаграмма хода процесса обработки 200 валиков на прецизионном токарном автомате (см. пример 5.2.2).

размера изделия). Через крайние точки такой диаграммы проводят верхнюю и нижнюю линии, а между ними среднюю линию, по которой судят, правда довольно грубо, о поведении признака во времени. Изменение размаха варьирования от пробы к пробе дает возможность еще более грубо судить об изменении рассеивания во времени (черт. 106).

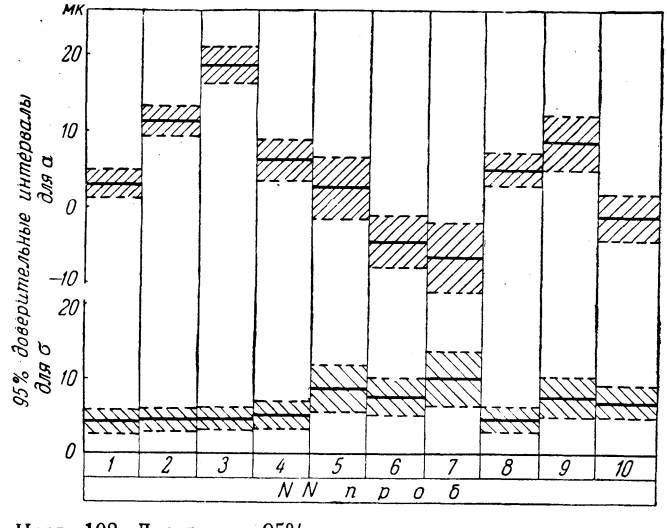
На *«точностные»* диаграммы наносят по оси абсцисс номера проб или время, а по оси ординат — средние арифметические значения признака и крайние значения в пробе. От средних, кроме того, откладывают вверх и вниз отрезки, равные по величине эмпирическому среднему квадратическому отклонению, и через концы этих отрезков проводят штрих-пунктирные линии; промежуток между этими линиями заштриховывают (черт. 107). Направление полученной таким путем полосы уже несколько более отчетливо дает возможность судить о направлении изменения центра настройки, а изменение ширины полосы в известной мере характеризует изменение рассеивания, по крайней мере там, где она достаточно резко уменьшается или увеличивается. Это суждение (хотя и в меньшей степени, чем предыдущее) будет все же оставаться довольно грубым, ибо, как мы знаем из предыдущих глав, эмпирические характеристики (средние и дисперсии) подвержены заметным флюктуациям, и поэтому ни точечный, ни точностный графики не обнаруживают еще действительных изменений в процессе.

Более определенное суждение об изменениях центра и параметра рассеивания можно сделать по диаграмме *«доверительных интервалов»*, по оси абсцисс



Черт. 107. Точностная диаграмма хода процесса обработки 200 валиков на прецизионном токарном автомате (см. пример 5.2.2). На черт.: *1* — линия максимального члена пробы, *2* — эмпирическое среднее квадратическое отклонение $\bar{s}$, *3* — линия минимального члена пробы, *4* — линия среднего арифметического отклонения.

которой откладываются номера проб, а по оси ординат — средние по пробам и отрезки, равные по ширине эмпирическим средним квадратическим отклонениям, так, что середина такого отрезка совпадает с соответствующей средней. Кроме

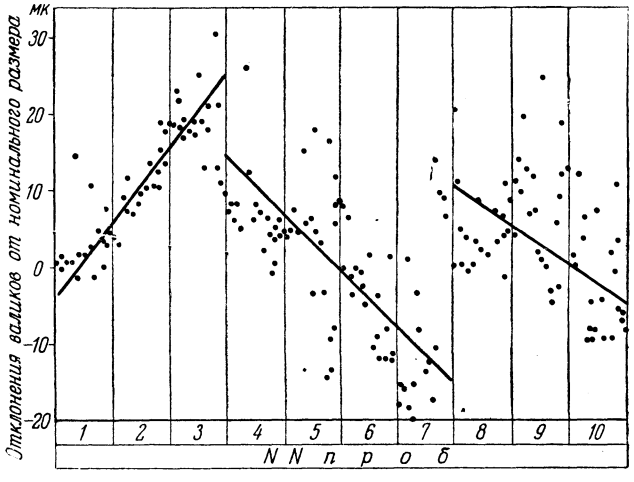


Черт. 108. Диаграмма 95%-ных доверительных интервалов для центров рассеивания a и для среднего квадратического отклонения размеров σ при обработке 200 валиков на прецизионном токарном автомате (см. пример 5.2.2).

того, на диаграмму наносятся доверительные границы для центра и для среднего квадратического отклонения (черт. 108). В тех точках, где доверительные интервалы не перекрываются, можно с надежностью, равной доверительной вероят-

ности, утверждать о наличии разладки центра настройки или рассеивания, смотря по тому, какие доверительные интервалы мы рассматриваем.

Представление о приближенной линейной зависимости положения центра от времени можно получить, обработав данные по пробам по способу наименьших квадратов, изложенному в **7.5.2.** Мы видели в § 5 главы VII, как оценить надежность подобного рода оценки (черт. 109).



Черт. 109. График приближенной линейной зависимости положения центра настройки станка от времени, построенный по способу наименьших квадратов для процесса обработки 200 валиков на прецизионном токарном автомате (см. пример 5.2.2).

В результате проведенного изложенными приемами анализа стабильности технологического процесса мы можем сделать более полное заключение о точности. Так, например, если операционный допуск значительно больше мгновенного рассеивания, то мы можем допустить постепенное смещение центра рассеивания (в результате, например, постепенного износа инструмента) в течение определенного промежутка времени, произведя соответствующую предварительную настройку оборудования (на размер, смещенный от середины допуска в сторону, противоположную направлению происходящего во время работы смещения центра); длину промежутка времени мы определим из графика линейной зависимости положения центра от времени. Это позволит нам увеличить срок службы инструмента и удешевить производство.

Если теперь мы обозначим через $2l_0$ величину смещения центра рассеивания за некоторый экономически обоснованный период времени, то вместо неравенства (8.3.2) мы можем использовать следующее неравенство:

$$\delta \geqslant 6\gamma\bar{s} + 2l_0. \qquad (8.3.2')$$

8.3.4. Анализ взаимосвязей между признаками качества и производственными факторами. В процессе исследования точности, как правило, возникает задача не только установления суммарной погрешности по тому или иному признаку качества (например, по одному из размеров), но также и задача исследования взаимосвязи нескольких признаков качества между собой (например, между несколькими одновременно обрабатываемыми размерами, размерами и чистотой поверхности, овальностью, огранкой и т. д.) и с различными производственными факторами (температурный и силовой режим обработки, подача, скорость, качество заготовки, качество рабочего и вспомогательного инструмента, качество оборудования и приспособлений). Следует отметить, что при подобной постановке вопроса мы далеко не всегда сталкиваемся со строгими зависимостями;

многие связи носят стохастический и, в частности, корреляционный характер. Но почти всегда для суждения о строгих связях мы располагаем только эмпирическими данными, которые отражают наряду с неслучайными зависимостями еще и наложившиеся на них флюктуации измерений и производственных условий. Анализ связей может быть проведен путем проверки нулевой гипотезы о средних двух или нескольких интересующих нас величин с помощью приема, изложенного в **6.3.3**, причем значимость каждого отдельного фактора для общего результата может быть выявлена по приведенным в этом разделе формулам. Одновременный анализ многих факторов, способный иногда значительно сократить время, затрачиваемое на производство наблюдений, требует более сложных приемов дисперсионного анализа, чем те, которые рассматриваются в этой части книги. Двухфакторные и множественные корреляционные связи между признаками могут быть исследованы в отношении их тесноты (силы) и формы (линейности) приемами, изложенными в §§ 3 и 4 главы VII. Заметим здесь, что, установив взаимосвязь между несколькими признаками качества, мы можем часто значительно сократить дальнейшие исследования и, что еще более важно, последующую работу по регулировке и отладке процесса, обоснованно сведя рассмотрение многих признаков к анализу лишь нескольких решающих из них. Последнее замечание относится в равной мере и к исследованию действия многочисленных производственных факторов. В заключение по данному разделу заметим, что для получения расчетных соотношений полученный опытный материал бывает необходимо обработать тем или иным способом, причем одним из обоснованных и проверенных на практике способов в этом случае может послужить способ наименьших квадратов, описанный в § 5 главы VII.

8.3.5. Анализ настройки. С настройкой мы встречаемся в технике во многих практически важных случаях. Одним из наиболее важных примеров из этой области является несомненно наладка (настройка) оборудования на заданную точность, т. е. установка на станке рабочего инструмента относительно заготовки в такое положение, чтобы размер изделия получался в допустимых по техническим условиям пределах (в пределах «поля допуска»). Сюда же примыкают и такие вопросы, как настройка и установка для работы различных, в том числе измерительных, приборов и инструментов (например, установка их в нулевое положение по установочной мере).

Возникает задача выбора такой методики настройки, которая обеспечивала бы заданную точность наиболее короткими и наименее трудными путями. Эта задача при настройке оборудования подразделяется по крайней мере на четыре частные задачи:

1) задачу оценки центра настройки в данный момент времени;

2) задачу формулирования рекомендаций, вытекающих из оценки;

3) задачу оценки точности регулировочных устройств, имеющих деления (например, лимбы);

4) задачу оценки точности настроечной работы в данных производственных условиях.

Все это в какой-то мере относится и к другим видам настройки. Однако в каждом из них находятся свои специфические особенности, требующие особого подхода. Так, например, при настройке оборудования может возникнуть необходимость учета погрешностей измерительных средств, по которым производятся отсчеты результатов настройки; при установке же в нулевое положение универсального измерительного прибора подобная необходимость естественно не возникает, но нередко приходится учитывать точность установочной меры.

Мы рассмотрим здесь лишь некоторые вопросы, относящиеся по преимуществу к настройке оборудования, причем более подробно осветим первую из четырех перечисленных выше частных задач. Для конкретности мы будем иметь в виду в первую очередь настройку на заданный размер.

Вопрос о «настроечном» размере, т. е. о размере, на который надо стремиться настроить оборудование, нами был уже ранее затронут в общем виде. Здесь мы еще раз подчеркнем, что при нормальном распределении размеров и хорошем соответствии зоны рассеивания допуску, т. е. при $\delta \approx A$, настроечный размер должен быть равен среднему допускаемому размеру, т. е.

$$a_н = N + \frac{BO + HO}{2}, \tag{8.3.3}$$

где $a_н$ — центр настройки или настроечный размер, N — номинальный размер по чертежу, BO и HO — верхнее и нижнее отклонения от номинального размера, заданные чертежом, δ — допуск размера ($\delta = BO - HO$), A — зона рассеивания, определяемая согласно **8.3.2**, причем к этому правилу, конечно, относится оговорка, сделанная по поводу формулы (8.3.2).

Если же допуск значительно больше зоны рассеивания, т. е. $\delta \gg A$, то мы можем сместить настроечный размер в сторону, противоположную действию износа инструмента на размер, приблизив центр настройки к границе поля допуска на величину, равную половине зоны рассеивания; таким образом, будем иметь:

1) для наружных размеров

$$a_н = N + HO + \frac{A}{2}, \tag{8.3.4}$$

б) для внутренних размеров

$$a_н = N + BO - \frac{A}{2}. \tag{8.3.5}$$

Если допуск меньше зоны рассеивания, т. е. $\delta < A$, то надо перенести отработку на более точное оборудование или заранее идти на доделки изделий, смотря по тому, что экономически выгоднее. Во втором случае настроечный размер определяется опять-таки по формуле (8.3.4) или (8.3.5).

Пусть теперь настроечный размер задан. Сама настройка оборудования ведется приемами, имеющими некоторое сходство с работой по «методу пробных проходов», заключающемуся в том, что рабочий доводит изделие до заданного размера, последовательно уменьшая размер заготовки все меньшими и меньшими порциями. Настроив предварительно машину по образцовой детали или с помощью настроечного приспособления, настройщик обрабатывает одну (или несколько подряд) заготовку, получает пробное изделие, измеряет его и судит о правильности настройки машины. Если настройка окажется неправильной, то производится регулировка машины в нужном направлении, и процедура повторяется вновь до тех пор, пока настройка не будет признана верной. Характер суждений, которые можно сделать по пробным изделиям, во многом зависит от средств измерения последних, а в качестве таковых на практике применяются:

1) универсальные измерительные средства, позволяющие делать отсчет так называемого «действительного» размера пробного изделия, т. е. размера получаемого (конечно, с той или иной точностью) непосредственным измерением;

2) специальные настроечные предельные калибры, позволяющие судить о нахождении размера пробного изделия в некоторых, более узких, чем допуск, границах (часто зона настройки равна половине допуска);

3) обычные предельные рабочие калибры, позволяющие лишь удостовериться, что действительный размер пробного изделия лежит в пределах допуска.

Легко понять, что лишь первое из этих измерительных средств даст возможность иметь более определенное суждение по пробным изделиям о результатах настройки; с помощью остальных двух средств такое суждение вынести значительно труднее. Поэтому первое средство измерения является предпочтительным для использования при настройке; с него мы и начнем.

Мы уже отмечали ранее, что «истинный» размер, на который настроена в данный момент машина, совпадает с понятием математического ожидания размера, и значит, задачу оценки центра настройки станка в данный момент времени

по размерам пробных изделий можно рассматривать, по существу, как задачу проверки статистической гипотезы о положении центра рассеивания по данным выборочного наблюдения. Эта задача при известном среднем квадратическом отклонении σ интересующего нас размера рассмотрена в **6.2.1.** Параметр σ мгновенного рассеивания размеров на практике всегда можно установить, с той или иной степенью точности, приемами, описанными в **8.3.2.** Тогда можно определить, так, как это было указано в **8.3.2**, интервал рассеивания $\left(a-\frac{A}{2},\ a+\frac{A}{2}\right)$, симметричный относительно центра рассеивания, в котором практически достоверно находится подавляющая масса изделий. Оптимальное положение центра рассеивания (при стабильном процессе), обеспечивающее наилучшее использование допуска, будет в том случае, если центр рассеивания совпадает с настроечным размером, определяемым для различных случаев по формулам (8.3.3), (8.3.4) и (8.3.5). Так как точно отрегулировать положение центра рассеивания можно, только производя достаточно большое число подналадок по очень большому числу пробных изделий, то более приемлемым в данном случае является требование, чтобы центр рассеивания не выходил из некоторого интервала допустимых его положений или просто из «интервала настройки» $(a_н-\bar{\delta}_н,\ a_н+\bar{\delta}_н)$, причем для случая, когда $\delta \approx A$, можно принять $\bar{\delta}_н=\frac{\delta_н}{2}=\frac{\delta-A}{2}$, где $a_н$ — настроечный размер, определяемый по формуле (8.3.3), δ — допуск размера изделия, A — длина интервала рассеивания, $\delta_н$ — длина интервала настройки, $\bar{\delta}_н$ — половина этой длины (очевидно, в случае, когда $\delta \geqslant A$ и настроечный размер определяется по формулам (8.3.4) или (8.3.5), то длина интервала настройки будет равна лишь определяемой из производственных соображений части разности $\delta-A$, а сам он будет располагаться предельно асимметрично относительно соответствующей границы полузоны рассеивания, откладываемой от предельного размера. При настройке станка в этих условиях приходится ограничиваться требованием, чтобы центр рассеивания не выходил из пределов интервала настройки; если оно выполняется, то настройку считают удовлетворительной, в противном случае машина подналаживается.

Мы будем предполагать, что:

1) величина параметра σ рассеивания размеров изделий заранее известна,

2) закон распределения размеров нормален,

3) размеры пробных деталей измеряются с достаточной точностью (параметр рассеивания погрешностей измерения в несколько раз меньше σ),

4) допуск несколько больше длины зоны рассеивания, т. е. $\delta > A$ (но не намного больше).

Положение центра рассеивания a в данном случае естественно оценивать средним арифметическим $\bar{x}$ размером из n пробных изделий. Проверка правильности наладки, т. е. проверка гипотезы H_0, заключающейся в выполнении неравенства

$$a_н-\bar{\delta}_н < a < a_н+\bar{\delta}_н, \qquad (8.3.6)$$

приводится к установлению надлежащей области допустимых значений $\bar{x}$, попадание в которую фактически наблюденного $\bar{x}$ совместимо с гипотезой H_0, и критической области, при попадании в которую нашего $\bar{x}$ мы вынуждены забраковать гипотезу. В качестве области допустимых значений естественно взять интервал $(a_н-h,\ a_н+h)$ с центром в точке $a_н$, отвечающей середине поля допуска, которую мы теперь для удобства примем за начало координат, т. е. будем считать $a_н=0$. Выбором чисел h и n мы распорядимся так, чтобы метод проверки удовлетворял естественным требованиям точности. Мы должны позаботиться о том, чтобы вероятности ошибок первого и второго родов (см. § 7 главы VI) не превышали заданных пределов p, представляющих достаточно малые вероятности.

Чтобы дать наглядное представление о достоинствах и недостатках принятого метода (т. е. выбранных нами значений h и n), мы будем вычислять вероятности $\mathbf{P}(a;\ n;\ h)$ попадания $\bar{x}$ в допустимую область $(-h,\ +h)$ при заданном n и различных a. Каждой паре значений n и h отвечает кривая

$$y = \mathbf{P}(a,\ n,\ h), \tag{8.3.7}$$

называемая «*оперативной*» кривой данного метода. При наших предположениях $\bar{x}$ распределяется по нормальному закону $N\left(a,\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$; следовательно,

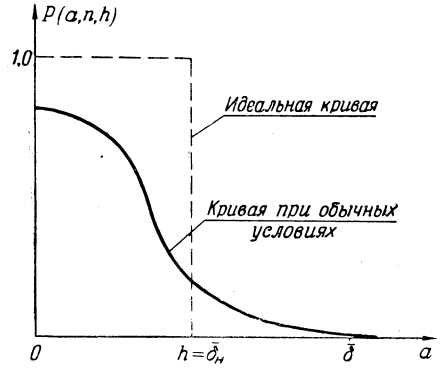
$$\mathbf{P}(a,\ n,\ h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{\bar{x}}} \int_{-h}^{h} e^{-\frac{(\bar{x}-a)^2}{2\sigma_{\bar{x}}^2}}\, d\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-h-a}{\sigma_{\bar{x}}}}^{\frac{h-a}{\sigma_{\bar{x}}}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \Phi\left(\frac{h-a}{\sigma_{\bar{x}}}\right) - \Phi\left(\frac{-h-a}{\sigma_{\bar{x}}}\right)$$

и окончательно

$$\mathbf{P}(a,\ n,\ h) = \Phi\left(\frac{h-a}{\sigma_{\bar{x}}}\right) + \Phi\left(\frac{h+a}{\sigma_{\bar{x}}}\right) = \Phi\left(\frac{a+h}{\sigma_{\bar{x}}}\right) - \Phi\left(\frac{a-h}{\sigma_{\bar{x}}}\right), \tag{8.3.8}$$

где $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Легко убедиться, что $\mathbf{P}(a,\ n,\ h)$ — четная функция и потому можно ограничиться значениями $a > 0$. Так как $\mathbf{P}(a;\ n;\ h)$ представляет площадь под кривой $y = \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ в интервале длины $\frac{2h}{\sigma_{\bar{x}}}$ с центром в точке $\frac{a}{2\sigma_{\bar{x}}}$, то легко видеть, что интересующая нас вероятность достигает максимума при $a = 0$ и монотонно убывает до нуля, когда a пробегает интервал от 0 до $+\infty$. В интервале $\left(0,\ \frac{\delta_н}{2}\right)$ оперативная кривая убывает от своего максимального значения $P_0 = 2\Phi\left(\frac{h}{\sigma_{\bar{x}}}\right)$ до

$$P_1 = \Phi\left(\frac{h-\bar{\delta}_н}{\sigma_{\bar{x}}}\right) + \Phi\left(\frac{h+\bar{\delta}_н}{\sigma_{\bar{x}}}\right) = \Phi\left(\frac{\bar{\delta}_н+h}{\sigma_{\bar{x}}}\right) - \Phi\left(\frac{\bar{\delta}_н-h}{\sigma_{\bar{x}}}\right).$$



Черт. 110. Оперативная кривая метода оценки результата настройки станка ($\mathbf{P}(a,\ n,\ h)$ — вероятность попадания $\bar{x}$ в допустимую область $(-h,\ +h)$, $(-\delta_н,\ +\delta_н)$ — зона допустимых настроек, a — центр рассеивания).

При фиксированных a и n вероятность $\mathbf{P}(a,\ n,\ h)$ возрастает с ростом h; зависимость от n несколько сложнее; если $0 < a < h$, то при возрастании n и при соответствующем уменьшении $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ аргументы $\frac{h-a}{\sigma_{\bar{x}}}$ и $\frac{h+a}{\sigma_{\bar{x}}}$ возрастают и вероятность $\mathbf{P}(a,\ n,\ h)$ может быть сделана как угодно близкой к единице; если же $a > h$, то аргумент $\frac{h-a}{\sigma_{\bar{x}}}$, возрастая по абсолютной величине при уменьшении $\sigma_{\bar{x}}$, отрицателен; поэтому $\Phi\left(\frac{h-a}{\sigma_{\bar{x}}}\right) = -\Phi\left(\frac{a-h}{\sigma_{\bar{x}}}\right)$ стремится к $-\frac{1}{2}$, а $\mathbf{P}(a,\ n,\ h)$ приближается к нулю.

Оперативной кривой, идеально отвечающей задаче точной настройки, была бы штриховая кривая, представленная на черт. 110: ее ордината равняется

единице в промежутке изменений a от 0 до правой границы $\frac{\delta_н}{2} = \bar{\delta}_н$ поля настройки и равна нулю справа от этой точки (слева от оси ординат график должен быть симметрично продолжен). Однако такой кривой мы могли бы добиться при $h = \bar{\delta}_н$ только при неограниченно большом числе n пробных изделий, что невозможно. При конечных же значениях n оперативная кривая в нуле и над всем интервалом $(0, \bar{\delta}_н)$ будет ниже прямой $y = 1$ и потому будут возможны ошибки первого рода (правильная настройка будет оцениваться как неправильная); с другой стороны, справа от точки $\frac{\delta_н}{2}$ ордината кривой может достигать таких размеров, при которых можно опасаться значительных ошибок второго рода (т. е. неправильная настройка будет оцениваться как правильная). Невозможно в то же время подобрать такую систему значений n и h, чтобы над интервалом $\left(0, \frac{\delta_н}{2}\right)$ она не опускалась ниже данного предела $1 - \alpha$, а над дополнительным к предыдущему интервалом $\left(\frac{\delta_н}{2}, \infty\right)$ не поднималась выше заданного предела β $(1 - \alpha > \beta)$. В самом деле, ввиду непрерывного убывания кривой всегда найдется интервал, в котором ордината кривой меньше $1 - \alpha$ и больше β. Поэтому строго говоря, поставленную задачу невозможно разрешить, располагая лишь конечным запасом пробных изделий. Для того чтобы решить ее приближенно, приходится отказаться от строгого разбиения возможных значений $\bar{x}$ на два взаимно дополняющих множества и, кроме области допустимых значений и критической области, приходится ввести еще область «сомнительных» значений, при попадании в которую мы не в состоянии сделать определенное заключение о правильности настройки. В этом случае для получения надлежащего ответа следует увеличить число пробных изделий.

При грубых ошибках в настройке, когда пробные изделия оказываются бракованными, не только необходимо, но и вполне возможно делать заключение о правильности настройки по первому же пробному изделию; когда же пробные изделия будут получаться годными, т. е. с размерами в пределах допуска, то для уточняющих суждений потребуется уже большее число пробных изделий. Однако к этому не может быть серьезных препятствий, поскольку пробные изделия уже не являются бракованными. Вместе с тем, естественно, что в целях сокращения времени, затрачиваемого на настройку и ее проверку, важно и тут суметь обойтись наименьшим числом пробных изделий.

В качестве иллюстрации сформулированных выше положений мы рассмотрим пример. Пусть допуск размера изделия $\delta = 8\sigma$ располагается предельно асимметрично в «минус» относительно номинального размера N (иначе говоря, верхнее отклонение $BO = 0$, а нижнее $HO = -\delta$), причем мгновенное среднее квадратическое отклонение σ нам известно из проведенного ранее анализа точности. Пусть для простоты длина A интервала рассеивания равна $A = 6\sigma$. Так как допуск δ лишь немного больше зоны рассеивания A, то настроечный размер определим по формуле (8.3.3):

$$a_н = N + \frac{0 - \delta}{2} = N - \frac{\delta}{2},$$

а длина интервала настройки будет:

$$\delta_н = \delta - A = 8\sigma - 6\sigma = 2\sigma$$

и, следовательно,

$$\bar{\delta}_н = \frac{\delta_н}{2} = \sigma.$$

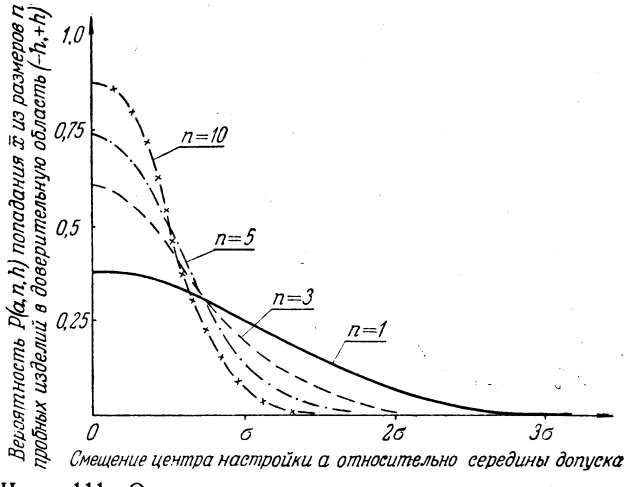
Подсчитаем теперь вероятности $\mathbf{P}(a, n, h)$ попадания средней арифметической $\bar{x}$ из размеров пробных изделий в доверительный интервал

$(a_н - h,\ a_н + h)$, где значения h (половины длины доверительной области) полагаем равными $0{,}5\bar{\delta}_н$, $0{,}75\bar{\delta}_н$ и $1{,}0\bar{\delta}_н$ или, что то же, $h = 0{,}5\sigma$; $0{,}75\sigma$; σ. Для числа n пробных изделий берем значения: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 10, причем действительное положение центра настройки пусть будет $a = a_н$; $a_н + h$; $a_н + \bar{\delta}_н$; $a_н + \bar{\delta}_н + \sigma$; $a_н + \bar{\delta}_н + 2\sigma$; $a_н + \bar{\delta}_н + 3\sigma$; $a_н + \bar{\delta}_н + 4\sigma$; $a_н + \bar{\delta}_н + 5\sigma$.

Если мы перенесем начало отсчета в точку $a_н$, т. е. примем $a_н = 0$, то тогда

$$a = 0;\ h;\ \bar{\delta}_н;\ \bar{\delta}_н + \sigma;\ \bar{\delta}_н + 2\sigma;\ \bar{\delta}_н + 3\sigma;\ \bar{\delta}_н + 4\sigma;\ \bar{\delta}_н + 5\sigma.$$

Вероятность $\mathbf{P}(a, n, h)$ мы будем вычислять по формуле (8.3.8). Результаты наших вычислений расположим в виде табл. 8.3.1 (см. стр. 451).



Черт. 111. Оперативные кривые метода оценки результатов настройки при различных числах n пробных деталей при $\bar{\delta}_н = \sigma$ и $h = 0{,}5\sigma$.

Графики оперативных кривых, отвечающих нашим трем вариантам значений длины h при различных значениях n, представлены на черт. 111, 112 и 113.

Из таблицы и графиков мы видим следующее:

1) при значительных уклонениях действительного центра настройки a от настроечного размера $a_н$ (порядка $(2 \div 3)\ \sigma$) вероятность средней арифметической $\bar{x}$ попасть в доверительную область очень мала, т. е. мала вероятность ошибки второго рода даже *при одном пробном изделии*, следовательно, по одному пробному изделию мы можем с высокой надежностью обнаружить грубые ошибки в настройке;

2) с приближением длины доверительной области к длине интервала настройки вероятность забраковать правильную настройку, т. е. совершить ошибку первого рода, уменьшается при $a = 0$ и увеличивается при $a = \bar{\delta}_н$, одновременно со вторым явлением, естественно, увеличивается вероятность ошибки второго рода;

3) с увеличением числа n вероятности ошибок первого и второго родов уменьшаются.

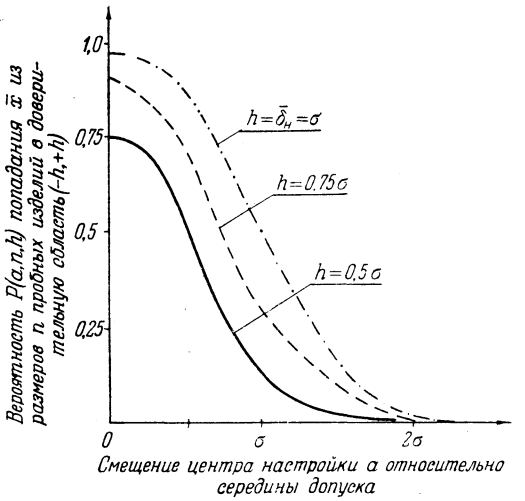
Вычисляя вероятности $\mathbf{P}(a, n, h)$ для более мелких ступеней изменения h и a при различных n мы можем обоснованно выбрать такие их значения, которые наилучшим образом удовлетворяли бы требованиям, предъявляемым к настройке в данных производственных условиях.

Заметим еще, что ранее сказанное сохраняет силу при анализе настройки с помощью эмпирической медианы m_l вместо средней арифметической $\bar{x}$; однако при этом, как видно из (5.3.10), потребуется для получения оценки с той же надежностью в 1,57 раза больше пробных изделий.

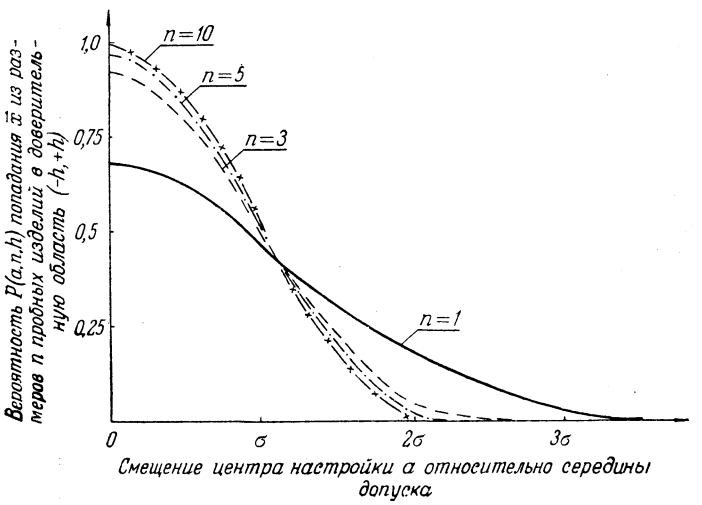
Таблица 8.3.1

Вероятности $\mathbf{P}(a, n, h)$ — в процентах попадания средней арифметической $\bar{x}$ из размеров n пробных изделий в доверительную область $(a_н - h;\ a_н + h)$ при интервале допустимых положений центра настройки $(a_н - \bar{\delta}_н;\ a_н + \bar{\delta}_н)$ для различных значений действительного положения центра настройки a

№ вариантов	Длины половин интервала настройки ($\bar{\delta}_н$) и доверительной области (h)	Действительное положение центра настройки a	Формула для вычисления вероятности $\mathbf{P}(a, n, h)$	Число n пробных изделий							
				1	2	3	4	5	6	8	10
1	$\bar{\delta}_н = \sigma$	$a = 0$	$2\Phi(0{,}5\sqrt{n})$	38,29	52,04	61,35	68,27	73,62	77,94	84,27	88,61
		$a = h = 0{,}5\sigma$	$\Phi(\sqrt{n})$	34,13	42,13	45,84	47,72	48,73	49,28	49,77	49,92
	$h = 0{,}5\sigma$	$a = \bar{\delta}_н = \sigma$	$\Phi(1{,}5\sqrt{n}) - \Phi(0{,}5\sqrt{n})$	24,17	22,29	18,86	15,74	13,15	11,01	7,87	5,70
		$a = \bar{\delta}_н + \sigma = 2\sigma$	$\Phi(2{,}5\sqrt{n}) - \Phi(1{,}5\sqrt{n})$	6,06	1,68	0,47	0,13	0,04	0,01	0	0
		$a = \bar{\delta}_н + 2\sigma = 3\sigma$	$\Phi(3{,}5\sqrt{n}) - \Phi(2{,}5\sqrt{n})$	0,60	0,02	0	0	0	0	0	0
		$a = \bar{\delta}_н + 3\sigma = 4\sigma$	$\Phi(4{,}5\sqrt{n}) - \Phi(3{,}5\sqrt{n})$	0,02	0	0	0	0	0	0	0
2	$\bar{\delta}_н = \sigma$	$a = 0$	$2\Phi(0{,}75\sqrt{n})$	54,68	71,11	80,61	86,64	90,65	93,38	96,61	98,23
		$a = h = 0{,}75\sigma$	$\Phi(1{,}5\sqrt{n})$	43,32	48,30	49,53	49,87	49,96	49,99	50,00	50,00
		$a = \bar{\delta}_н = \sigma$	$\Phi(1{,}75\sqrt{n}) - \Phi(0{,}25\sqrt{n})$	36,12	35,61	33,13	30,83	28,80	27,02	24,17	21,46
	$h = 0{,}75\sigma$	$a = \bar{\delta}_н + \sigma = 2\sigma$	$\Phi(2{,}75\sqrt{n}) - \Phi(1{,}25\sqrt{n})$	10,26	3,76	1,52	0,62	0,26	0,11	0,02	0
		$a = \bar{\delta}_н + 2\sigma = 3\sigma$	$\Phi(3{,}75\sqrt{n}) - \Phi(2{,}25\sqrt{n})$	1,21	0,07	0	0	0	0	0	0
		$a = \bar{\delta}_н + 3\sigma = 4\sigma$	$\Phi(4{,}75\sqrt{n}) - \Phi(3{,}25\sqrt{n})$	0,06	0	0	0	0	0	0	0
		$a = \bar{\delta}_н + 4\sigma = 5\sigma$	$\Phi(5{,}75\sqrt{n}) - \Phi(4{,}25\sqrt{n})$	0	0	0	0	0	0	0	0
3	$\bar{\delta}_н = \sigma$	$a = 0$	$2\Phi(\sqrt{n})$	68,27	84,27	91,67	95,45	97,47	98,57	99,53	99,84
		$a = h = \bar{\delta}_н = \sigma$	$\Phi(2\sqrt{n})$	47,72	49,77	49,97	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00
	$h = \bar{\delta}_н = \sigma$	$a = \bar{\delta}_н + \sigma = 2\sigma$	$\Phi(3\sqrt{n}) - \Phi(\sqrt{n})$	15,74	7,87	4,16	2,28	1,27	0,72	0,23	0,08
		$a = \bar{\delta}_н + 2\sigma = 3\sigma$	$\Phi(4\sqrt{n}) - \Phi(2\sqrt{n})$	2,28	0,23	0,03	0	0	0	0	0
		$a = \bar{\delta}_н + 3\sigma = 4\sigma$	$\Phi(5\sqrt{n}) - \Phi(3\sqrt{n})$	0,13	0	0	0	0	0	0	0
		$a = \bar{\delta}_н + 4\sigma = 5\sigma$	$\Phi(6\sqrt{n}) - \Phi(4\sqrt{n})$	0	0	0	0	0	0	0	0



Черт. 112. Оперативные кривые метода оценки результата настройки при различных величинах h доверительной области при $\bar{\delta}_н = \sigma$ и $n = 5$.



Черт. 113. Оперативные кривые метода оценки результата настройки при различных числах n пробных изделий при $\bar{\delta}_н = h = \sigma$.

Рассмотренный здесь прием анализа настройки с некоторым видоизменением применим также и в том случае, когда при настройке используются не универсальные средства измерения, а настроечные предельные калибры или даже обычные предельные калибры. Однако в этом случае надежность оценок будет еще более пониженной.

§ 4. Статистические методы оценки точности технических измерений

8.4.1. Понятие о точности технических измерений. Измерение заключается в сравнении измеряемого объекта с некоторым его значением, принятым за единицу. Это сравнение осуществляется с помощью различных средств (приборов и инструментов), используемых к тому же различными способами или методами. Измерения на практике сопровождаются ошибками или, иначе говоря, погрешностями, часть которых зависит обычно от лица, производящего измерения.

Единицы, методы и средства измерений изучаются *метрологией*. Под техническими же измерениями понимают измерения длин и углов в машиностроении и приборостроении, которыми сопровождаются конструирование и производство машин и приборов и которые поэтому взаимно связаны с конструированием и производством на основе *взаимозаменяемости*, означающей возможность полной замены без подгонки любой детали или узла из комплекта при соблюдении технических условий на изделие. Принцип взаимозаменяемости, важность которого в современном машиностроении и приборостроении трудно переоценить, предъявляет определенные требования к взаимной увязке точности производства и точности измерений.

Одним из важнейших вопросов всяких измерений является вопрос о их точности. Точность метода или средства измерений служит основным его метрологическим показателем и является главным признаком, характеризующим его собственное качество. При выборе и назначении средств и методов контроля качества продукции в первую очередь учитывается их точность наряду с экономичностью и производительностью.

Степень точности измерений характеризуется предельной величиной их погрешности. Под *погрешностью измерения* понимается разность между его результатом и «истинным» значением измеряемого объекта. Трудность в определении погрешности измерений заключается в том, что оценка «истинного» значения величины на практике добывается из тех же или из других аналогичных измерений, не свободных от некоторых погрешностей в силу несовершенства измерительных инструментов и органов чувств наблюдателя. Поэтому «истинные» значения измеряемых объектов представляется возможным рассматривать лишь теоретически, как некоторую научную абстракцию, и затем производить их оценку надлежащими методами. Последний вопрос самостоятельно изучается, в частности, в специальной части статистики — *теории ошибок*.

При рассмотрении погрешности метода измерения размера обычно различают в ее составе:

1) погрешность показаний средства измерения,

2) погрешность мер, по которым устанавливается средство измерения,

3) погрешность, вызываемую отклонениями температуры измерений от нормальной температуры («температурную» погрешность),

4) погрешность, вызываемую деформацией объекта под действием измерительного усилия и собственного веса,

5) погрешности макро- и микрогеометрической формы объекта, связанные с измеряемым его размером.

При составлении нормативов на предельные погрешности измерения длин в машиностроении практически учитывают лишь первые три «слагаемых».

К погрешностям показаний средства измерения относят погрешности, связанные с его конструктивной схемой, с неточностью изготовления данного

средства и ошибками отсчета по его шкале. Каждое из слагаемых погрешности средства измерения может быть в свою очередь подразделено на более мелкие слагаемые. Так, например, погрешности изготовления могут быть подразделены на погрешности узлов, деталей, отдельных размеров деталей.

Погрешность всякого метода или средства измерения и любого их «слагаемого», кроме того, подразделяется на две «составляющие»:

1) *систематическую* и

2) *случайную*.

Систематическая составляющая будет оставаться постоянной при измерениях, либо изменяться определенным образом в зависимости от изменения определенного, неслучайного фактора. В последнем случае систематическую ошибку можно было бы отнести к категории «функциональных» ошибок (см. **8.2.1**). Систематическая составляющая может получиться, например, за счет погрешностей мер, при установке в исходное положение данного средства измерения и за счет отклонений температуры измеряемого объекта и средства измерения при различных коэффициентах их линейного расширения от нормальной температуры при данной серии измерений. Ошибка, получающаяся от первой причины, будет постоянной, а ошибка от второй причины будет изменяться с изменением отклонений от нормальной температуры.

Случайная составляющая будет меняться от измерения к измерению случайным образом; она будет вызываться многочисленными факторами, действие которых по-разному складывается в повторных измерениях.

Подразделение погрешности измерения на систематическую и случайную составляющие сохраняет определенность только тогда, когда мы точно указываем, к какой именно величине относятся рассматриваемые «составляющие». Если мы берем один конкретный экземпляр из партии измерительных приборов, то рассматриваемая нами величина есть погрешность показаний данного прибора. Можно в других случаях рассматривать погрешность приборов определенного типа, выпускаемых определенным заводом, или, наконец, погрешность множества уже изготовленных или подлежащих изготовлению на различных заводах приборов, объединенных одним проектом. В каждом из этих трех случаев мы математически будем иметь дело с тремя различными величинами. Неудивительно поэтому, что одни и те же факторы будут в одной величине вызывать изменение систематической, а в другой — случайной составляющих.

Вопрос о том, как и какие величины выбирать для рассмотрения, выходит за рамки математики и решается в зависимости от поставленных практических задач.

Центр рассеивания $a_р$ результатов измерения будет обусловливаться положениями центра рассеивания погрешности метода измерения и истинным значением измеряемой величины, но положение центра рассеивания погрешностей измерения и будет характеризовать «истинное» значение систематической составляющей суммарной погрешности метода измерения. Поэтому именно систематическую составляющую погрешности невозможно отделить от «истинного» значения измеряемого размера по одному только ряду измерений. Сравнение результатов, полученных с помощью различных измерительных средств, является наиболее действенным способом выявления систематических ошибок.

Математическое ожидание результатов ряда измерений представляет сумму математического ожидания погрешности измерений и «истинного» значения измеряемой величины. Если же теперь представить неограниченно возрастающее число серий измерений, выполняемых различными методами и средствами со случайным рассеиванием центров их погрешностей, то суммарное математическое их ожидание и можно представить как «истинное» значение измеряемой величины.

При известном заранее «истинном» значении измеряемого объекта систематическую «составляющую» погрешности измерения можно определить как разность

$$a_р - a_0 = a_и, \tag{8.4.1}$$

где a_p — математическое ожидание результатов измерения, a_0 — «истинное» значение измеряемой величины, $a_и$ — систематическая «составляющая» (математическое ожидание) погрешности измерения. Например, при испытаниях с помощью концевых мер или других точных средств точности приборов для линейных измерений оказывается возможным знать заранее с хорошим приближением «истинное» значение «измеряемого» объекта.

Систематические погрешности измерений стремятся всегда тем или иным более или менее тонким приемом механически исключить при измерениях. Сами эти приемы почти всегда во многом зависят от конкретных условий измерения и поэтому рассматриваются обычно в специальных руководствах. Здесь можно лишь указать, например, на исключение с помощью поправочной таблицы погрешностей от неправильно проградуированной шкалы прибора и на определение с той же целью средней арифметической из двух отсчетов при противоположных установках объектов измерения относительно прибора (или прибора относительно объекта), при измерениях шага и половины угла профиля резьбы, при проверке внутреннего конуса и т. п.

Случайная «составляющая» погрешности каждого отдельного возможного измерения в данных условиях по существу может оцениваться как рассчитанное с той или иной надежностью «практически» предельное отклонение от центра рассеивания погрешностей измерений. В **5.3.1** уже указывалось, что на практике с некоторым основанием считают погрешности измерения подчиняющимися нормальному закону.

Учитывая это и принимая надежность в 0,9973, определяют предельную случайную погрешность измерения формулой

$$\Delta_{\lim} = 3\sigma, \tag{8.4.2}$$

где $\Delta_{\lim}$ — практически предельная (или просто предельная) погрешность измерений и σ — среднее квадратическое отклонение погрешности измерения.

При иных законах распределения погрешностей измерения формула практически предельной погрешности принимает вид

$$\Delta_{\lim} = t_\alpha \sigma, \tag{8.4.3}$$

где коэффициент t_α зависит от уровня надежности α и закона распределения погрешностей измерения.

Очень часто на практике исходят из того, что систематические погрешности с достаточным для практики приближением исключены, и тогда практически предельная погрешность оказывается равносильной общей практически предельной погрешности измерения.

Аналогично систематическим погрешностям подлежат безусловному исключению из протокола измерений так называемые «грубые» ошибки или промахи. К этим ошибкам относятся:

1) ошибки в отсчетах показаний средства измерения,
2) ошибки в вычислениях при измерениях,
3) ошибки, созданные неправильным использованием средства измерения,
4) ошибки, возникшие из-за недостатка осторожности у оператора.

Наиболее надежным методом исключения грубых ошибок является *браковка подозрительных измерений в процессе самого измерения*, когда на это имеются достаточные основания в обстановке эксперимента. Если же этот момент упущен или если вообще по тем или иным причинам приходится выявлять грубые ошибки в последующем порядке, то для браковки грубых ошибок рекомендуется использовать подходящий доверительный интервал, например $0{,}1\%$ или $0{,}27\%$ — пределы $\pm 3{,}29\sigma$ или 3σ. Однако на практике обычно не располагают значениями a и σ и поэтому указанные пределы, отвечающие нормальному распределению погрешностей, применимы лишь при больших n ($n > 120$). При малых n можно

пользоваться для установления доверительных пределов табл. XXIV приложений, составленной для распределения величины

$$r = \frac{x_n - \bar{x}}{\bar{s}} \tag{8.4.4}$$

при уровнях значимости 0,025; 0,05; 0,075 и 0,1.

8.4.2. Статистическая оценка точности измерений по их результатам. Поверка точности измерительных приборов и инструментов имеет исключительно важное значение во всех областях техники в разнообразных случаях практики. Сама государственная система сохранения единства мер покоится на применении так называемых «поверочных схем», устанавливающих последовательность передачи размера от мер и измерительных средств наиболее точных к более грубым и далее к изделиям и предусматривающих неуклонное выполнение графиков принудительной поверки измерительных приборов и инструментов, имеющихся на всех машиностроительных и приборостроительных заводах страны.

Не меньшее значение имеет поверка средств измерения при постановке и проведении самых разнообразных физических экспериментов.

Любая из поверок средств измерения заключается в оценке точности каждого данного измерительного прибора и инструмента по результатам проделанных измерений объектов с заранее известными значениями. Поскольку на результатах измерения всегда в той или иной мере сказываются случайные погрешности, то естественно производить по ним оценку точности приборов с помощью статистических приемов, позволяющих в таких случаях делать научно обоснованные выводы.

Мы начнем с обязательной периодической поверки измерительных приборов и инструментов для линейных и угловых измерений, имеющей повсеместное распространение и исключительную практическую важность. Она, в частности, включает *поверку погрешности и стабильности показаний каждого прибора и инструмента*. Поверка погрешности показаний заключается в измерении объектов с известными заранее размерами (*«концевых» мер* определенного «разряда») и в отсчете отклонений показаний поверяемого прибора от размера измеряемого объекта, принимаемого за «истинный» размер. Получаемые таким путем отклонения в определенных, фиксированных для каждого типа приборов точках шкалы (практически эти точки располагаются через $5 \div 20$ делений на шкале) сравниваются с «допустимой» для данного типа и класса приборов погрешностью показаний. Число измерений каждого отдельного объекта (каждого «блока» концевых мер) не регламентировано; практически ограничиваются примерно тремя измерениями, если отклонения значительно меньше предельно допустимых, и доводят число измерений до десяти и более, если отклонения близки к предельно допустимым. Отклонения, как правило, отсчитываются в десятых долях деления на глаз. Иногда при отсчетах применяются лупы с 2—5-кратным увеличением.

Регламентированная стандартами предельно допустимая погрешность показаний $\Delta_{\lim}$ обычно рассматривается как утроенное среднее квадратическое отклонение погрешностей показаний при нормальном законе их распределения, т. е. определяется по формуле

$$\Delta_{\lim} = 3\sigma;$$

иными словами, за предельно допустимую принимается такая погрешность, вероятность P не превысить которую равна 0,9973, т. е.

$$\mathbf{P}(|x| \leqslant \Delta_{\lim}) = 0{,}9973,$$

где x — погрешность показаний (отклонение показаний от истинного значения объекта).

Практически регламентированная предельно допустимая погрешность показаний составляет фиксированную величину, равную у различных типов и классов

приборов от $\frac{1}{4}$ до 1 деления шкалы для всей шкалы прибора, и несколько меньшую величину для «нормированного участка» шкалы, составляющего от 0,1 до 0,6 всей шкалы.

При проверке стабильности показаний определяют отклонения при нескольких повторных измерениях (для каждого типа прибора установлена нижняя граница числа измерений, составляющая для различных приборов от 5 до 20 измерений) в 2 — 3 точках шкалы. Размах варьирования показаний, именуемый часто *«вариацией показаний»*, в каждой из точек не должен превышать определенной нормы (она составляет для различных приборов от $\frac{1}{4}$ до $\frac{1}{2}$ деления шкалы).

В связи с поверкой погрешности и стабильности показаний возникает два вопроса:

1) какова надежность (вероятность) выполнения для данного прибора при последующих измерениях на практике неравенства

$$|x_\alpha| \leqslant \Delta_{\lim}, \tag{8.4.5}$$

где x_α — отклонение от истинного значения, отвечающее заданному уровню вероятности (например, 0,9973), если, произведя поверку прибора так, что через каждые 10 делений шкалы отсчитывались отклонения по три раза $\left(\text{в случае отклонений } x < \frac{\Delta_{\lim}}{2}\right)$ и дополнительно по 10 раз $\left(\text{в случае отклонений } \frac{\Delta_{\lim}}{2} < x < \Delta_{\lim}\right)$, мы убедились в том, что наибольшее отклонение в каждой точке не превышает $\Delta_{\lim}$, т. е.

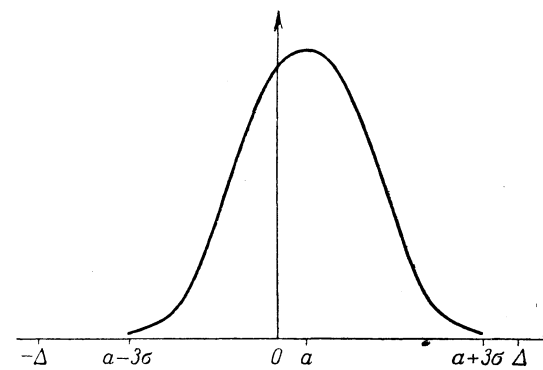
$$|x|_{i,j} \leqslant \Delta_{\lim}, \tag{8.4.6}$$

где индекс i относится к номеру проверяемой точки шкалы ($i = 1, 2, \ldots, k$), а второй индекс ($j = 1, 2, \ldots, n$) обозначает номер измерения, произведенного в этой точке, причем измерения расположены в порядке возрастания полученных в измерениях отклонений от истинного значения измеряемого размера;

2) какими способами (вариантами) следует видоизменять методику поверки прибора, чтобы вероятность выполнения неравенства (8.4.5) была равна заданному уровню P, т. е.

$$\mathbf{P}(|x_\alpha| \leqslant \Delta_{\lim}) = P,$$

где, например, $P = 0{,}9973$.



Черт. 114. К проверке гипотезы H, заключающейся в том, что 99,7%-ный центральный интервал $(a - 3\sigma;\ a + 3\sigma)$ нормального распределения лежит в заданном интервале $(-\Delta, \Delta)$.

Несколько упрощая первую из этих задач, мы рассмотрим надежность применяемой на практике методики оценки погрешности показаний в одной только точке шкалы. Оставляя пока в стороне вопрос о систематических ошибках шкалы и учитывая нормальный закон распределения погрешностей измерения, легко обнаружить, что наименее благоприятный случай будет иметь место при совпадении проверяемой точки шкалы с центром распределения погрешностей. Тогда задача сведется к проверке гипотезы H, заключающейся в том, что 99,7%-ный центральный интервал $(a - 3\sigma;\ a + 3\sigma)$ нормального распределения ляжет целиком в заданном стандартном интервале $(-\Delta, \Delta)$, где a — центр распределения погрешностей измерения, σ — их среднее квадратическое отклонение и Δ — предельно допустимая погрешность измерения (черт. 114).

Иначе говоря, на полуплоскости (a, σ) допустимые значения a и σ лежат в области, ограниченной двумя прямыми:

$$a + 3\sigma = \Delta,$$

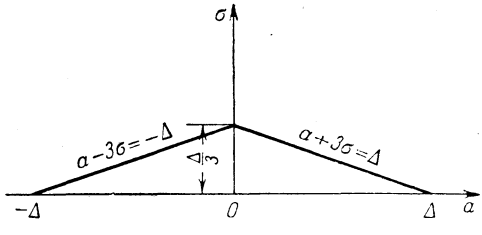
$$a - 3\sigma = -\Delta,$$

изображенной на черт. 115.

Способ испытания гипотезы H состоит в следующем.

1. Производится n_1 испытаний ($n_1 = 3$), причем:

а) если хотя бы одно наблюдение (отклонение показания прибора от «истинного» размера объекта) выходит за пределы $\pm\Delta$, гипотеза H бракуется;



Черт. 115. Область на полуплоскости (a, σ), ограниченная двумя прямыми $a + 3\sigma = \Delta$ и $a - 3\sigma = -\Delta$, в которой лежат допустимые значения a и σ.

б) если все n_1 наблюдений лежат на суженном интервале $(-\Delta_0, \Delta_0)$, где $\Delta_0 < \Delta$, практически $\Delta_0 = \frac{\Delta}{2}$, то гипотеза H принимается;

в) если хотя бы одно из n_1 наблюдений вышло из интервала $(-\Delta_0, \Delta_0)$, но все n_1 наблюдений находятся в интервале $(-\Delta, \Delta)$, то наблюдения продолжаются.

2. В случае «в» производится еще n_2 наблюдений ($n_2 = 10$), причем:

а) если все n_2 наблюдений лежат в интервале $(-\Delta, \Delta)$, то гипотеза H принимается;

б) если хотя бы одно наблюдение выходит из этого интервала, то гипотеза H бракуется.

Найдем *оперативную кривую* для данного метода проверки гипотезы H.

Вероятность принять гипотезу H при параметрах распределения погрешностей измерения a и σ по формуле полной вероятности может быть определена в следующем виде:

$$\mathbf{P}(a, \sigma) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\Delta_0 - a}{\sigma}}^{\frac{\Delta_0 - a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right)^{n_1} +$$

$$+ \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\Delta - a}{\sigma}}^{\frac{\Delta - a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right)^{n_1} - \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\Delta_0 - a}{\sigma}}^{\frac{\Delta_0 - a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right)^{n_1}\right] \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\Delta - a}{\sigma}}^{\frac{\Delta - a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right)^{n_2}.$$

Первый член правой части представляет вероятность того, что n_1 наблюдений попадут в суженный интервал $(-\Delta_0, \Delta_0)$ и тогда гипотеза с вероятностью, равной единице, принимается. Разность в квадратных скобках представляет вероятность того, что хотя бы одно наблюдение выйдет из интервала $(-\Delta_0, \Delta_0)$, но притом все n_1 наблюдений окажутся в интервале $(-\Delta, \Delta)$, в самом деле уменьшаемое представляет вероятность попадания n_1 наблюдений в интервал $(-\Delta, \Delta)$ и она равна сумме двух вероятностей — вероятности того, что все n_1 наблюдений попадут в суженный интервал $(-\Delta_0, \Delta_0)$, и того, что все n_1 наблюдений будут лежать внутри интервала $(-\Delta, +\Delta)$, причем хотя бы одно из них выходит из границ интервала $(-\Delta_0, \Delta_0)$. Последний множитель представляет вероятность того, что n_2 наблюдений попадут в интервал $(-\Delta, \Delta)$.

Полученное, таким образом, выражение для вероятности $\mathbf{P}(a, \sigma)$, пользуясь функцией Лапласа, можно переписать в виде

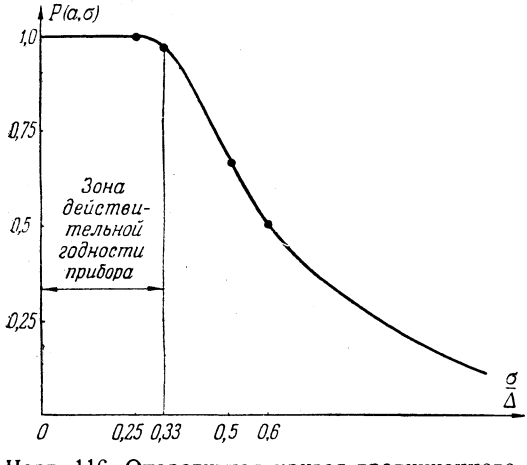
$$\mathbf{P}(a, \sigma) = \left[\Phi\left(\frac{\Delta_0 - a}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{\Delta_0 + a}{\sigma}\right)\right]^{n_1} + \left\{\left[\Phi\left(\frac{\Delta - a}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{\Delta + a}{\sigma}\right)\right]^{n_1} - \left[\Phi\left(\frac{\Delta_0 - a}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{\Delta_0 + a}{\sigma}\right)\right]^{n_1}\right\}\left[\Phi\left(\frac{\Delta - a}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{\Delta + a}{\sigma}\right)\right]^{n_2}. \quad (8.4.7)$$

Приняв, например, $n_1 = 3$ и $n_2 = 10$, мы при $a = 0$ получим следующие значения вероятности $\mathbf{P}(a, \sigma)$ при различных отношениях $\frac{\Delta}{\sigma}$ (табл. 8.4.1).

Таблица 8.4.1.

$\frac{\Delta}{\sigma}$	$\mathbf{P}(a, \sigma)$	$\frac{\sigma}{\Delta}$
4	0,9997	0,25
3	0,98287	0,33
2	0,66437	0,5
1,67	0,49753	0,6

Из табл. 8.4.1 мы видим, что при вышеуказанной методике поверки приборов вероятность забраковать хороший прибор (т. е. сделать ошибку первого рода) достаточно мала: она равна 1,7% при $\Delta = 3\sigma$. Однако вероятность принять плохой прибор (т. е. совершить ошибку второго рода) чрезмерно велика; она равна 49,8% при $\Delta = 1{,}67\sigma$, т. е. в том случае, когда действительная предельная погрешность показаний прибора почти в два раза превышает установленную стандартом предельную погрешность.



Черт. 116. Оперативная кривая традиционного метода поверки измерительных приборов; $\mathbf{P}(a, \sigma)$ — вероятность приемки измерительного прибора, $\frac{\sigma}{\Delta}$ — отношения среднего квадратического отклонения σ погрешностей показаний прибора к стандартной предельной погрешности $\Delta_{\lim}$ показателя прибора.

График оперативной кривой для рассмотренного случая показан на черт. 116.

8.4.3. Ошибки отсчета. В современной технике измерений различают два вида погрешностей, подверженных влиянию случая, — погрешности первого типа составляют случайные ошибки, происходящие, как мы указывали ранее, от вмешательства ряда различных неконтролируемых обстоятельств, сопровождающих процесс измерения и складывающихся по-разному при его повторении.

Наличие случайных ошибок превращает результат измерения в некоторую случайную величину. Центр рассеивания этой величины при отсутствии систематической погрешности и следует считать истинным значением.

В теории случайных ошибок принимается обычно допущение о нормальном их распределении, таким образом, оценка истинного значения и дисперсии случайных ошибок производится по правилам оценки параметров нормальной совокупности по данным наблюдениям путем надлежащего их осреднения.

Менее изучены ошибки второго типа — ошибки отсчета, происходящие от того, что действительные показания на шкале измерительного устройства могут быть фиксированы лишь с ограниченной точностью. Отсчет, прочитанный по шкале, отвечает обычно лишь наиболее мелкому, различаемому наблюдателем делению шкалы, ближайшему к показанию прибора, промежуточные положения указателя не могут быть фиксированы. Происходящая благодаря этому ошибка

при отсчете вносит в окончательный результат измерения погрешность, не превосходящую по абсолютному значению половины шага шкалы (т. е. наиболее мелкого точно учитываемого деления ее).

Ошибку отсчета часто рассматривают как систематическую погрешность, которая не может быть исключена или уменьшена путем осреднения достаточно большого числа наблюдений. Если бы измерения не сопровождались случайными погрешностями или если бы поле рассеивания этих ошибок было бы мало по сравнению с шагом шкалы (что может быть при грубых измерительных приборах), то ошибки отсчета действительно носили бы систематический характер. Однако при наличии достаточно большого рассеивания случайных ошибок ошибки округления в свою очередь приобретают случайный характер и оказывается возможной их взаимная компенсация при осреднении.

Пусть, например, мы измеряем точно определенный отрезок между двумя штрихами, истинная длина которого равна 25,638 *мм*, причем масштабная линейка позволяет точно отсчитывать лишь десятые доли миллиметра. Если левый штрих отрезка каждый раз может быть точно совмещен с некоторым делением шкалы, то мы всегда прочитаем на правом конце 25,6 *мм*. Очевидно, в данном случае совершенно бесполезно повторять измерения — результат их будет одним и тем же, равным образом и среднее из ряда наблюдений будет равно 25,6 *мм* с ошибкой — 0,038 *мм*. Здесь налицо систематическая погрешность, которую можно было бы уменьшить, увеличив точность шкалы, т. е. уменьшив шаг так, чтобы точно отсчитывать сотые доли миллиметра. Однако можно поступить и следующим образом: измеряемый отрезок помещать на совершенно произвольные случайные участки шкалы, прочитывать отсчеты x_1 и x_2, отвечающие положениям начала и конца отрезка, и округлять их до десятых долей миллиметра.

Точные значения x_1 и x_2 (до округления), очевидно, связаны соотношением

$$x_2 = x_1 + 256{,}38.$$

Если при округлении отсчета x_1 до некоторого целого n_1 (десятых долей миллиметра) мы совершаем ошибку θ_1, лежащую между $-0{,}5$ и $+0{,}12$ (той же единицы), то

$$x_2 = n_1 + \theta_1 + 256{,}38 = 256 + n_1 + (\theta_1 + 0{,}38), \qquad (8.4.8)$$

причем последнее слагаемое лежит между $-0{,}12$ и $+0{,}5$. Таким же образом при округлении x_2 мы получаем $n_2 = 256 + n_1$, так что для длины $x_2 - x_1$ мы получим в результате:

$$n_2 - n_1 = (256 + n_1) - n_1 = 256.$$

Если θ_1 лежит между 0,12 и 0,5, то в (8.4.8) мы будем иметь последнее слагаемое заключенным между 0,5 и 0,88, так что в качестве отсчета x_2 будем иметь:

$$n_2 = 256 + n_1 + 1 = 257 + n_1$$

и

$$n_2 - n_1 = 257.$$

Таким образом, вероятность получения большего результата $x_2 - x_1 = 257$ (считая распределение равномерным) будет равна $p = 0{,}5 - 0{,}12 = 0{,}38$, а меньшего $n_2 - n_1 = 256$ будет равна $1 - p = 0{,}62$.

Математическое ожидание результата измерения будет равно $0{,}38 \cdot 257 + 0{,}62 \cdot 256 = 256 + 0{,}38 = 256{,}38$; оно совпадает с истинной длиной отрезка.

Квадратическую ошибку среднего выведенного из n наблюдений легко найти, если рассматривать величину $x - 256$, принимающую два значения 0, 1 с соответствующими вероятностями 0,38 и 0,62. По известной формуле для биномиального распределения будем иметь:

$$\mathrm{D}x = 0{,}38 \cdot 0{,}62,$$

$$\sigma_x = \sqrt{0{,}38 \cdot 0{,}62} = 0{,}49.$$

Поэтому

$$\sigma_{\bar{x}_n} = 0{,}49 \cdot n^{-\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, из 100 наблюдений можно было бы определить длину отрезка со средней ошибкой в 0,05 (десятых долей миллиметра) $= 0{,}005$ *мм* $= 5$ *мк*.

Рассмотрим теперь общую схему образования ошибок отсчета и закон их распределения. Пусть «истинное» значение измеряемой величины будет ξ. Обозначим через δ случайную ошибку, сопровождающую измерение истинного значения ξ. При наличии ошибки δ измерительный прибор покажет искаженное значение $\xi + \delta$. Это «действительное» показание («действительное» значение) будет отсчитываться по шкале с некоторым шагом h. Если отсчеты делаются в значениях величины, соответствующих целым делениям шкалы, то шаг h будет равен цене деления шкалы прибора; если же они делаются в долях цены деления — половинах, четвертях или десятых его долях, то под шагом h будем понимать наименьшую отсчитываемую долю цены деления. Будем в дальнейшем для простоты считать, что отсчеты делаются по целым делениям. Ближайшее к действительному показанию деление шкалы прибора, т. е. целое кратное h, наименее отстоящее от $(\xi + \delta)$ значение, мы условно обозначим через $[\xi + \delta]_h$; это число и будет прочитано по шкале и взято в качестве конечного результата измерения.

Разность

$$\omega = [\xi + \delta]_h - (\xi + \delta) \tag{8.4.9}$$

будет ошибкой отсчета.

Если при некотором целом k

$$kh - \frac{1}{2}h < \xi + \delta < kh + \frac{1}{2}h,$$

то

$$[\xi + \delta]_h = kh \quad \text{и} \quad \omega = kh - (\xi + \delta).$$

Следовательно,

$$|\omega| \leqslant \frac{1}{2}h.$$

Величина

$$\Delta = [\xi + \delta]_h - \xi \tag{8.4.10}$$

называется полной погрешностью измерения. Из (8.4.9) и (8.4.10) следует, что полная ошибка равна сумме ошибки измерения δ и ошибки отсчета ω, т. е.

$$\Delta = \delta + \omega. \tag{8.4.11}$$

Пусть плотность распределения случайных ошибок δ будет $\frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x}{\sigma}\right)$, где σ — некоторый параметр, характеризующий средний «масштаб» ошибок.

Обычно ограничиваются допущением нормальности распределения так, что

$$\frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},$$

причем $a = \mathbf{M}\delta = 0$, так как мы здесь предполагаем, что систематические ошибки отсутствуют. Однако в специальных случаях допускают и иную форму распределения кривой ошибок. Так, например, если распределение ошибок можно считать равномерным, то $\frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x}{\sigma}\right) = \frac{1}{2\sigma}$ при $-\sigma < x < \sigma$ и $\frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x}{\sigma}\right) = 0$ при $|x| > \sigma$, или еще $\frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x}{\sigma}\right) = \frac{\sigma - x}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma}\left(1 - \frac{x}{\sigma}\right)$ при $0 < x < \sigma$ и $\frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x}{\sigma}\right) = \frac{\sigma + x}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma}\left(1 + \frac{x}{\sigma}\right)$ при $-\sigma < x < 0$; в этом последнем случае кривая имеет вид треугольника.

Найдем закон распределения ошибок отсчета при шаге шкалы h

$$\mathbf{P}(\omega < x) = F_\omega(x).$$

Очевидно, $F_\omega(x) = 0$ при $x < -\frac{h}{2}$ и $F_\omega(x) = 1$ при $x > \frac{h}{2}$.

Применяя теорему сложения при $-\frac{h}{2} < x < \frac{h}{2}$, найдем далее:

$$F_\omega(x) = \mathbf{P}(\omega < x) = \mathbf{P}\left(-\frac{h}{2} < \omega < x\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{P}\left[\left(k - \frac{1}{2}\right)h < \xi + \delta < kh + x\right].$$

В самом деле, для того чтобы ошибка округления не превосходила x, нужно, чтобы действительное показание прибора $(\xi + \delta)$ попало в один из промежутков $\left(kh - \frac{1}{2}h,\ kh + \frac{1}{2}h\right)$ и отклонялось при этом от центра этого промежутка kh менее чем на x, т. е. должно выполняться неравенство

$$-\frac{1}{2}h < \xi + \delta - kh < x.$$

Но при постоянной δ

$$\mathbf{P}\left[\left(k - \frac{1}{2}\right)h < \xi + \delta < kh + x\right] =$$

$$= \mathbf{P}\left[\left(k - \frac{1}{2}\right)h - \xi < \delta < kh - \xi + x\right] = \frac{1}{\sigma}\int_{\left(k-\frac{1}{2}\right)h-\xi}^{kh-\xi+x} f\left(\frac{x}{\sigma}\right)dx.$$

Поэтому

$$F_\omega(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma}\int_{\left(k-\frac{1}{2}\right)h-\xi}^{kh-\xi+x} f\left(\frac{x}{\sigma}\right)dx. \tag{8.4.12}$$

Мы будем предполагать, что функция $f\left(\frac{x}{\sigma}\right)$ — непрерывная четная функция, убывающая в обе стороны от начала координат по мере возрастания x и устремляющаяся к нулю при $x \to \infty$.

Дифференцируя ряд (8.4.12) по x (законность чего может быть оправдана при наших предположениях), получим следующее выражение для плотности:

$$F'_\omega(x) = f_\omega\left(\frac{x}{\xi}\right)$$

и ошибки округления

$$f_\omega\left(\frac{x}{\xi}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{kh - \xi + x}{\sigma}\right). \tag{8.4.13}$$

Функция $f_\omega\left(\frac{x}{\xi}\right)$ будет также непрерывной и периодической функцией ξ с периодом, равным h; в самом деле, при замене ξ на $\xi + h$ каждый член ряда (8.4.13)

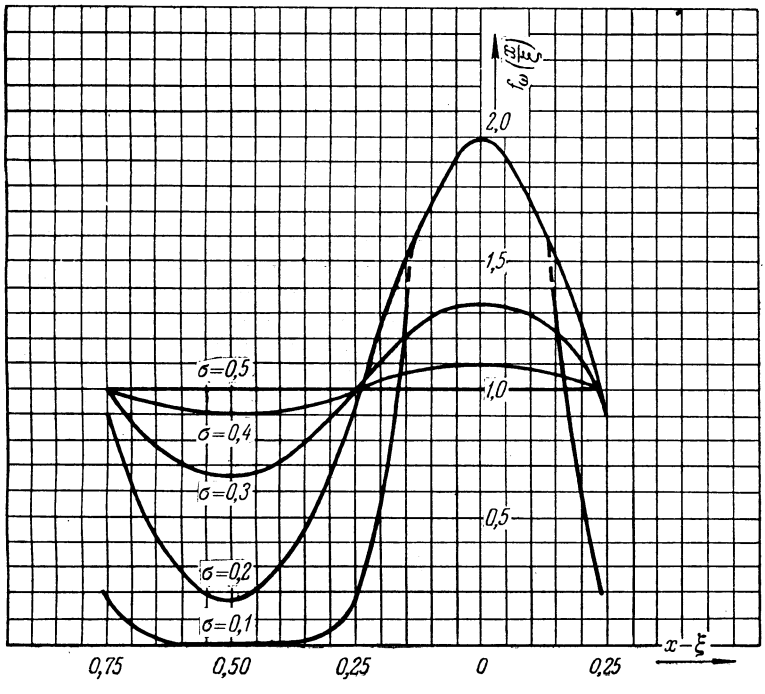
$$u_k = \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{kh - \xi + k}{\sigma}\right)$$

перейдет в предшествующий ему член

$$u_{k-1} = \frac{1}{\sigma} f\left[\frac{(k-1)h - \xi + k}{\sigma}\right],$$

что не изменит суммы ряда. Мы можем поэтому рассматривать значения ξ, лежащие в интервале от $-\frac{h}{2}$ до $\frac{h}{2}$; любое другое значение может быть получено

из некоторого рассматриваемого значения путем прибавления к нему целого числа периодов. На черт. 117 в предположении нормальности функции $\frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x}{\sigma}\right)$ представлены плотности распределения $f_\omega\left(\frac{x}{\xi}\right)$ для различных значений σ; при этом принято $h = 1$ и для определенности $\xi = \frac{1}{4} = 0{,}25$.



Черт. 117. Кривые распределения ошибок $(x - \xi)$ округления для различных значений среднего квадратического отклонения σ погрешностей измерения при истинном значении измеряемой величины $\xi = 0{,}25$ и шаге шкалы $h = 1$.

При малом σ (относительно h) ошибка округления может носить почти систематический характер; кривые $f_\omega\left(\frac{x}{\xi}\right)$ тесно сконцентрированы около значения ξ. По мере возрастания σ кривые $f_\omega\left(\frac{x}{\xi}\right)$ приобретают форму, все более приближающуюся к обычному графику равномерной плотности

$$y = \frac{1}{h} \qquad \text{при } |x| < h.$$

Уже при $\sigma > \frac{1}{2} h$ распределение ошибок округления можно считать практически равномерным.

Кривая $f_\omega\left(\frac{x}{\xi}\right)$ приближенно может быть представлена уравнением

$$f_\omega\left(\frac{x}{\xi}\right) = \frac{1}{h} + \frac{2}{h} e^{-\frac{2\pi^2\sigma^2}{h^2}} \cos\frac{2\pi}{h}(x - \xi). \qquad (8.4.14)$$

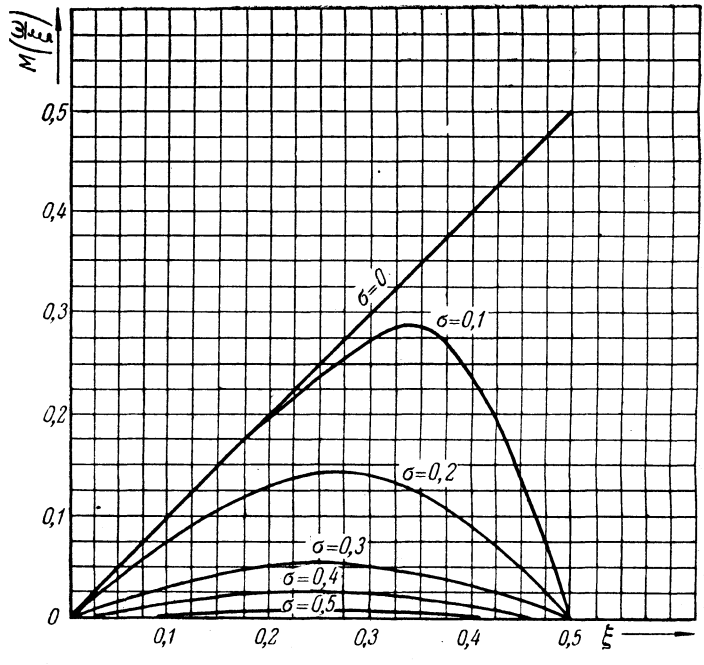
С этим процессом «выравнивания» ошибок округления связано быстрое стремление к нулю их среднего значения при возрастании σ. Для нормального распределения имеем:

$$\mathbf{M}\omega = \frac{h}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}e^{-\frac{2k^2\pi^2\sigma^2}{h^2}}\sin\frac{2k\pi\xi}{h}. \qquad (8.4.15)$$

Для $\sigma > \frac{h}{2}$ приближенно имеем:

$$\mathbf{M}\left(\frac{\omega}{\xi}\right) \approx \frac{h}{\pi}e^{-\frac{2\pi^2\sigma^2}{h^2}}\sin\frac{2\pi\xi}{h}. \qquad (8.4.16)$$

На черт. 118 нанесены кривые (имеющие при больших σ вид синусоид) изображающие математическое ожидание ошибки округления $\mathbf{M}\left(\frac{\omega}{\xi}\right)$ при различных значениях ξ.



Черт. 118. Зависимость средней величины $\mathbf{M}\left(\frac{\omega}{\xi}\right)$ ошибки округления от положения центра рассеивания ξ и средней квадратической погрешностей измерения.

При $\sigma = 0$, очевидно, $\mathbf{M}\left(\frac{\omega}{\xi}\right) = \xi$; при возрастании σ кривые все более и более приближаются к оси ξ. Максимальное значение $\mathbf{M}\left(\frac{\omega}{\xi}\right)$ соответствует приблизительно $\xi = \pm\frac{1}{4}$, равно амплитуде синусоиды (8.4.16) и быстро приближается к нулю при возрастании σ. В табл. XXV приложений приведены значения этого максимума для некоторых значений отношения $m = \frac{\sigma}{h}$.

При $\sigma \geqslant \frac{1}{2}h$ практически можно пренебрегать систематической погрешностью, связанной с округлением. В самом деле, пусть произведено n незави-

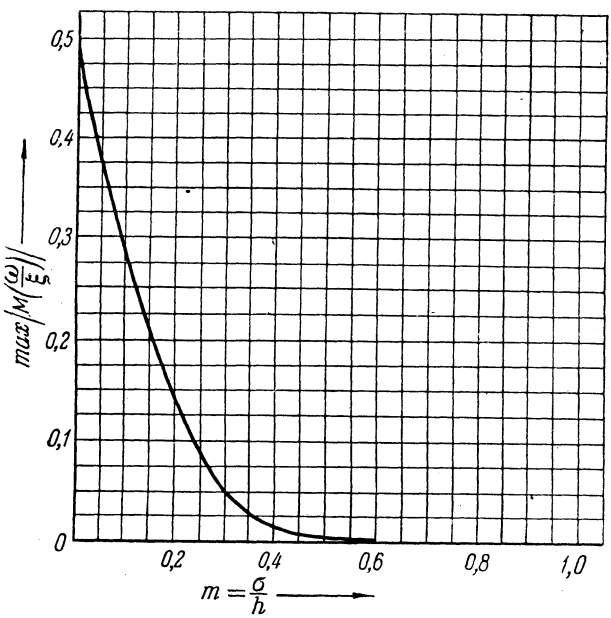
симых измерений и вычислено среднее с целью получения оценки «истинного» значения величины ξ; средние из ошибок, сопровождающих измерения, будут группироваться около их центра (8.4.16). Поэтому, так как случайные ошибки имеют математическое ожидание, равное нулю, результаты измерений будут группироваться около центра $\xi + \mathbf{M}\left(\frac{\omega}{\xi}\right)$. Размах случайных колебаний среднего арифметического мы измеряем, как всегда, средней квадратической ошибкой $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Посмотрим, при каких значениях n смещение $\mathbf{M}\left(\frac{\omega}{\xi}\right)$ центра группирования результатов измерений относительно ξ будет превышать $0{,}1\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Для этого во всяком случае нужно, чтобы

$$0{,}1\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \frac{h}{\pi}e^{-\frac{2\pi^2\sigma^2}{h^2}}.$$

Положим $\sigma = h$. Тогда мы придем к неравенству $\sqrt{n} > 0{,}1\pi e^{2\pi^2}$ или $n > 0{,}01\pi^2 e^{4\pi^2}$, откуда

$$n > 0{,}0987e^{39{,}48} = 1{,}381 \cdot 10^{16} = 1381 \cdot 10^{13}.$$

Таким образом, при обычных числах наблюдений мы с достаточным основанием можем пренебрегать систематическим искажением центра, являющимся



Черт. 119. Максимум средних величин ошибок $\mathbf{M}\frac{\omega}{\xi}$ округления при различных значениях σ.

следствием неточности отсчета, если среднее квадратическое отклонение случайных погрешностей больше шага шкалы h. На черт. 119 представлен график, показывающий убывание максимального возможного значения $\left|\mathbf{M}\left(\frac{\omega}{\xi}\right)\right|$ при возрастании отношения $m = \frac{\sigma}{h}$. Следует, однако, иметь в виду, что это явление связано с такими особенностями нормального распределения, которые не всегда

могут точно оправдываться на практике. При других законах распределения убывание $\left|\mathbf{M}\left(\frac{\omega}{\xi}\right)\right|$ хотя и происходит, но значительно медленнее.

Большого внимания заслуживает то влияние, которое оказывают ошибки округления на точность нашей оценки среднего. В случае нормального закона распределения дисперсия ошибок округления оказывается приближенно равной

$$\mathbf{D}\left(\frac{\omega}{\xi}\right)\approx\frac{h^2}{12}+\frac{h^2}{\pi^2}e^{-\frac{2k^2\pi^2\sigma^2}{h^2}}\cos\frac{2\pi\xi}{h}-\frac{h^2}{\pi^2}e^{-\frac{4k^2\pi^2\sigma^2}{h^2}}\sin^2\frac{2\pi\xi}{h}, \tag{8.4.17}$$

причем двумя последними членами практически можно пренебрегать при $\frac{\sigma}{h}>\frac{1}{2}$ так, что

$$\sigma_\omega^2=\mathbf{D}\left(\frac{\omega}{\xi}\right)\approx\frac{h^2}{12}. \tag{8.4.18}$$

Дисперсия округленных значений, т. е. результатов измерения, искаженных случайными ошибками и ошибками отсчета, приближенно будет равна:

$$\sigma_p^2=\sigma^2+\sigma_\omega^2=\sigma^2+\frac{h^2}{12}\qquad\left(\text{для } m=\frac{\sigma}{h}>\frac{1}{2}\right). \tag{8.4.19}$$

Таким образом, для того чтобы при наличии ошибок от округления иметь ту же точность измерений, что и без них, необходимо увеличить число наблюдений в отношении $\left(1+\frac{m^2}{12}\right):1$. Сказанное относится к тому случаю, когда можно предположить нормальность распределения строго выполненной; в противном случае влияние ошибок округления может значительно усилиться. Так, например, в случае треугольного закона распределения кривая, изображающая этот закон, имеет угловые точки. Это обстоятельство сказывается в том, что равномерность ошибок отсчета, которая при нормальном законе наблюдается уже при небольших отношениях $m=\frac{\sigma}{h}$, в данном случае может быть обнаружена лишь при довольно значительных m. Вместе с тем существенно возрастает и систематическая погрешность отсчета.

С другой стороны, и при наличии нормального распределения мы можем иногда иметь невыгодное соотношение между шагом шкалы и средним квадратическим отклонением (например, при $m<\frac{1}{6}$). В этом случае осреднение результатов наблюдений, принимающих два или три различных между собой (кратных h) значения, не может повысить точности нашего вывода из-за значительной систематической ошибки.

Распределение средних арифметических $\overline{x}_n^{(\omega)}$ из округленных значений, полученных при отсчете по шкале прибора для $\frac{\sigma}{h}>\frac{1}{2}$ при достаточно больших n, можно приближенно считать нормальным с центром в точке ξ, отвечающей истинному значению величины, и с дисперсией

$$\sigma^2_{\overline{x}_n^{\omega}}=\frac{\sigma_1^2}{n}=\frac{\sigma_x^2+\frac{h^2}{12}}{n}=\frac{\sigma_x^2\left(1+\frac{\tau^2}{12}\right)}{n}, \tag{8.4.20}$$

где $\tau=\frac{h}{\sigma}$.

Уточненная эмпирическая дисперсия из округленных значений

$$\left(\overline{s}^{(\omega)}\right)^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}_n^{(\omega)}\right)^2$$

имеет своим математическим ожиданием величину

$$\sigma_1^2 = \sigma^2 + \frac{h^2}{12}. \qquad (8.4.21)$$

Поэтому, чтобы по округленным значениям оценить величину σ^2, следует пользоваться исправленной по Шеппарду характеристикой

$$\bar{s}^2 = \bar{s}^{2}_{(\omega)} - \frac{h^2}{12}. \qquad (8.4.22)$$

В качестве примера, иллюстрирующего рассмотренные в этом разделе положения, мы приведем следующие данные.

Если ориентироваться на стандартные нормы точности приборов для линейных измерений и предположить нормальный закон распределения их погрешностей, то средние значения отношений $m = \frac{\sigma}{h}$ будут равны:

1) для штангенциркулей и других штриховых инструментов, индикаторов часового типа, рычажных скоб и рычажно-винтовых индикаторов . . . . . $m = \frac{1}{3}$,
2) для микрометров и микрокаторов . . . . . $m = \frac{1}{4}$,
3) для миниметров . . . . . $m = \frac{1}{6}$,
4) для оптиметров . . . . . $m = \frac{1}{9}$.

Отсюда можно, например, заключить, что при измерениях с помощью миниметра или оптиметра в целых делениях шкалы мы не можем рассчитывать повысить точность измерений объекта, осредняя результаты нескольких повторных измерений, и эти приборы следует считать измерительными средствами, предназначенными для *единичных* измерений.

Осредняя результаты повторных измерений, произведенных с помощью остальных наиболее распространенных измерительных приборов и инструментов, мы, правда, несколько уменьшаем влияние погрешностей отсчета, однако применяющиеся на практике значения m лежат все еще в пограничной области; следовало бы предпочесть для измерительных приборов единичных измерений значительный переход в сторону уменьшения за значение $m = \frac{1}{3} \div \frac{1}{6}$, тогда как для приборов, предназначенных для аттестации мер и образцов по многократным их измерениям, предпочтительнее, наоборот, измельчение шага шкалы, приводящее к значениям m, существенно превышающим $\frac{1}{2}$ или даже 1, так как в этом случае мы за счет осреднения можем значительно улучшить результаты. Здесь следует учесть еще возможность в ряде случаев довольно уверенно производить отсчеты в долях деления шкалы (например, в десятых долях), что уменьшает шаг h и, следовательно, увеличивает m.

§ 5. Статистические методы текущего предупредительного контроля качества продукции

8.5.1. Общие понятия и основные задачи. Идея применения теории вероятностей и математической статистики для решения вопросов контроля качества продукции была впервые высказана русскими учеными еще в первой половине XIX столетия. Так, например, еще в 1846 г. акад. М. В. Остроградский опубликовал по этому вопросу свою работу в Известиях Академии наук.

Сущность предлагавшихся статистических выборочных методов контроля состояла в том, чтобы по некоторой выборке обоснованно судить о всей совокупности контролируемых объектов, не прибегая к сплошной их проверке; такая постановка дела, естественно, давала возможность облегчить контроль и сократить затрачиваемое на него время, причем вероятность ошибочных суждений о качестве практически не превышала вероятности получения ошибок при сплошном 100%-ном контроле больших партий изделий. Этот вид контроля получил название *приемочного* или *последующего* статистического контроля. В дальнейшем общую идею статистического метода стали использовать для контроля не только непосредственно самого качества уже изготовленной партии объектов, но еще и для того, чтобы на протяжении изготовления такой партии по пробам небольшого объема систематически контролировать ход процесса в смысле обнаружения в нем таких показателей, которые создают угрозу нарушения в конце обработки требуемого совокупного качества продукции. Естественно, что в этой интерпретации статистический контроль предвещал далеко идущие возможности перехода от выявления брака в уже изготовленной партии к *предупреждению* его возникновения на всем протяжении обработки, и дело заключалось лишь в том, чтобы, с одной стороны, метод контроля был четким и надежным и, с другой стороны, чтобы процедура его осуществления была как можно более простой и во всяком случае посильной для контролеров обычной на производстве квалификации. Второй вид контроля получил название *текущего предупредительного* статистического контроля.

Указанные виды контроля оказались мощным средством борьбы за повышение качества продукции при одновременном снижении затрат на контроль и получили широкое распространение на передовых предприятиях страны.

8.5.2. Некоторые варианты статистического текущего предупредительного контроля. Мы опишем сначала некоторые варианты предупредительного контроля, применяющиеся в отечественной промышленности. В частности, в нашем изложении мы затронем:

1) контроль положения центра настройки машины по медиане или средней арифметической,

2) контроль рассеивания размеров по крайним значениям, размаху варьирования или среднему квадратическому отклонению,

3) метод группировок (калибров распределения),

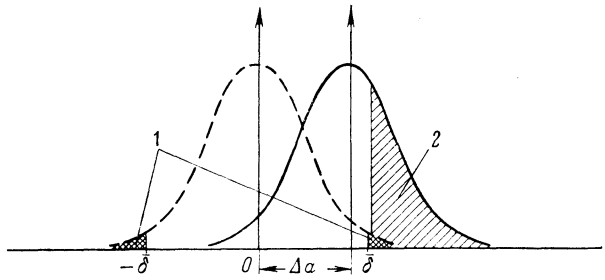
4) метод «заградительных зон»,

5) метод «крайних значений»,

6) метод контроля эксцентриситетов.

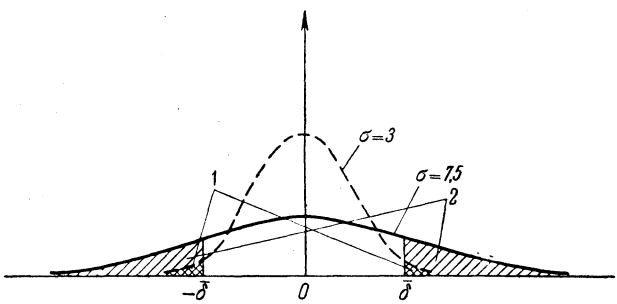
Все перечисленные варианты текущего предупредительного контроля осуществляются на практике в форме ведения так называемых «карт статистического контроля», содержащих «контрольные диаграммы», для которых общим является то, что по оси абсцисс в них откладываются отдельные, отбираемые через более или менее определенные промежутки времени (например, ежечасно) пробы небольшого объема (3—10 штук), по оси ординат же откладываются те специфические показатели, которые положены в основу данного варианта (средняя арифметическая, индивидуальные значения в пробе и т. д.). Обычно параллельно контролируют один и тот же процесс в отношении положения центра настройки и величины рассеивания размеров, причем это делается с помощью двух отдельных диаграмм (например, одной — для средних арифметических значений, а другой — для размахов варьирования) или просто — одной диаграммы, на которой выделяются оба нужных показания (например, медиана и крайние значения). В некоторых случаях, когда колебания величины рассеивания во времени незначительны, ограничиваются лишь контролем положения центра настройки, применяя тот или иной показатель (медиану, среднюю арифметическую и т. п.). Легко заметить, что при данном законе распределения размеров, в частности при нор-

мальном законе, все возможные причины выхода размера за границы допуска, т. е., иными словами, появления «размерного брака», можно свести к двум факторам — смещению центра группирования и увеличению рассеивания. На черт. 120 штриховой линией показано правильное при нормальном законе положение кривой распределения, а сплошной линией — ее положение при смещении центра группирования. Заштрихованные части площади под кривой представляют риск (вероятность) получения размерного брака в первом и втором случае. Влияние увеличения рассеивания на риск получения брака аналогичным образом иллюстрируется черт. 121.



Черт. 120. Увеличение риска q получения брака в результате смещения центра рассеивания на величину Δa, причем: *1* — риск q_0 получения брака при отсутствии смещения центра рассеивания, *2* — риск q_1 получения брака при смещении Δa центра рассеивания.

В качестве примера мы приводим на черт. 122 диаграмму контроля хода технологического процесса одновременно: 1) по центру настройки с помощью *медианы* и 2) по величине рассеивания с помощью *крайних значений*. На этой диаграмме, как мы видим, отведен отдельный столбец для каждой ежечасно отбираемой пробы в объеме 5—7 штук изделий из текущей продукции машины; каждый экземпляр, попавший в пробу, измеряется и его размер заносится в виде точки в данный столбец. Легко обнаруживаемая при этом медиана (точка, оказавшаяся посредине остальных точек) обводится квадратиком или каким-либо иным значком; другим знаком (например, треугольником) обводятся точки, оказавшиеся при этом крайними (самая верхняя и самая нижняя). Для медианы и для крайних значений на диаграмме заранее проводятся две пары границ — так называемых «контрольных границ» (одна пара — для медианы, а другая — для крайних значений). Иногда на диаграмму наносятся также еще и границы допуска контролируемого размера. Контрольные границы откладываются от середины Δ_0 поля допуска или от эмпирически найденного «обычного» центра группирования a_0 (если по производственно-конструкторским соображениям при контроле за основу берутся только наибольшие или только наименьшие значения размера отдельного экземпляра изделия из нескольких измерений в различных сечениях и в различных направлениях в одном сечении):



Черт. 121. Увеличения риска q получения брака в результате возрастания рассеивания, причем: *1* — риск q_0 получения брака при малом рассеивании, *2* — риск q_1 получения брака при увеличении рассеивания.

для медианы на величину

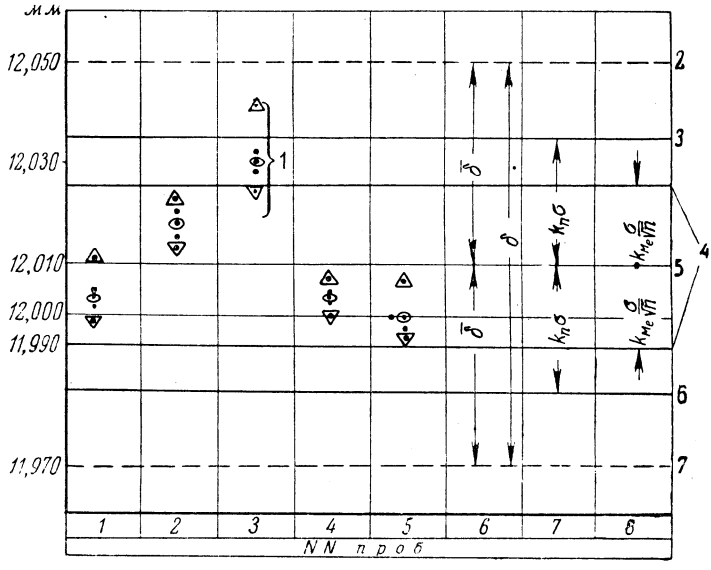
$$\pm k_{m_e} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \tag{8.5.1}$$

для крайних значений на величину

$$\pm k_{n} \sigma \tag{8.5.2}$$

(«+» для верхней границы, «—» для нижней), где σ — среднее квадратическое отклонение контролируемого размера, n — принятый объем контрольной пробы, k_{m_e} и k_n — коэффициенты (обычно $k_{m_e}=2{,}9 \div 3{,}9$ и $k_n = 2{,}0 \div 3{,}0$).

Если медиана или какое-либо из крайних значений в данной пробе окажется вне установленных для нее границ, то подается сигнал о разладке процесса в виде зажигания на данном рабочем месте цветной лампочки или вывешивания цветного флажка (обычно красного цвета). При относительно небольшом числе высокопроизводительных тяжелых машин зажигаемая на рабочем месте цветная лампочка блокируется со световыми экранами в виде планировки данного участка



Черт. 122. Диаграмма контроля положения центра настройки станка по медианам и величины рассеивания по крайним членам пробы ($\sigma = 0{,}01$, $k_{m_e}= 3{,}5$, $k_n = 2{,}5$, $n = 5$): *1* — сигнал о разладке процесса, *2* — граница наибольшего предельного размера, *3* — контрольная граница для максимального члена, *4* — контрольная граница для медианы, *5* — линия среднего допускаемого размера, *6* — контрольная граница для минимального члена, *7* — граница наименьшего предельного размера.

производства, установленными в пунктах управления, так что дежурный инженер узнает о разладке машины в момент возникновения этой разладки.

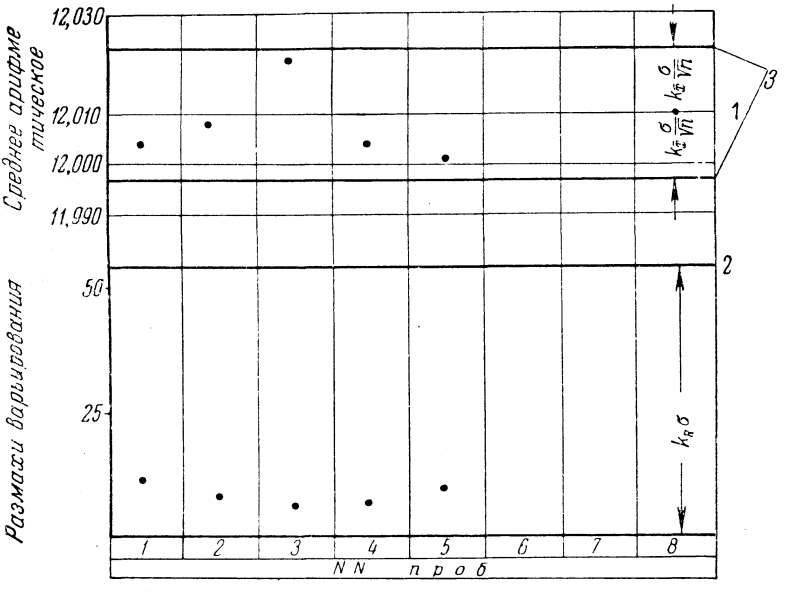
После устранения разладки машины наладчиком проверивший этот факт с помощью внеочередной пробы контролер гасит красную лампочку и зажигает вновь зеленую — признак налаженной работы машины.

Процедура контроля не изменяется, когда пользуются *средней арифметической и размахом варьирования*; только в этом случае, конечно, нет большой надобности наносить на диаграмму индивидуальные значения и, кроме того, практически неудобно бывает объединять на одной диаграмме обе характеристики: среднюю и размах, вследствие чего приходится строить две разные диаграммы на одной карте (черт. 123) или даже заводить две параллельные карты.

При определении положения контрольных границ в этом случае применяются коэффициенты $k_{\bar{x}}$ для средней арифметической, k_R — для размаха, причем обычно $k_{\bar{x}} = 2{,}3 \div 3{,}1$ и $k_R = 4{,}4 \div 6{,}0$ (при $n = 4 \div 10$) и k_R возрастает с увеличением n.

Когда одновременно контролируется несколько признаков качества, то два-три наиболее важных из них наносятся на самостоятельные диаграммы, помещенные, как правило, на одной карте, другие же признаки фиксируются чаще всего просто в виде цифровых данных или особых отметок в специально для этого отведенных строках карты.

Метод группировок допускает применение в качестве измерительных средств калибров со специально рассчитанными размерами («калибров распределения»), причем расчетные размеры меньшего (x^-) и большего (x^+) калибров распределения отклоняются на некоторую величину (обычно на $^1/_4$ допуска) внутрь поля допуска от соответствующих предельных размеров контролируемого размера. Процедура контроля в этом случае состоит в том, что изделия, попавшие в пробу



Черт. 123. Диаграмма контроля положения центра настройки по средним арифметическим и величины рассеивания по размахам варьирования ($\sigma = 0{,}01$, $k_x = 3$, $k_R = 5{,}38$, $n = 5$): *1* — линия среднего допускаемого размера, *2* — верхняя контрольная граница для размаха, *3* — контрольные границы для средней арифметической.

(обычно объема 10 штук), контролируются сначала обычными предельными калибрами и если они все окажутся годными, то сортируются на три группы с помощью калибров распределения на:

1) меньшие x^- (их число обозначается n^-),

2) бо́льшие x^-, но меньшие x^+ (их число — n^0),

3) бо́льшие x^+ (их число — n^+).

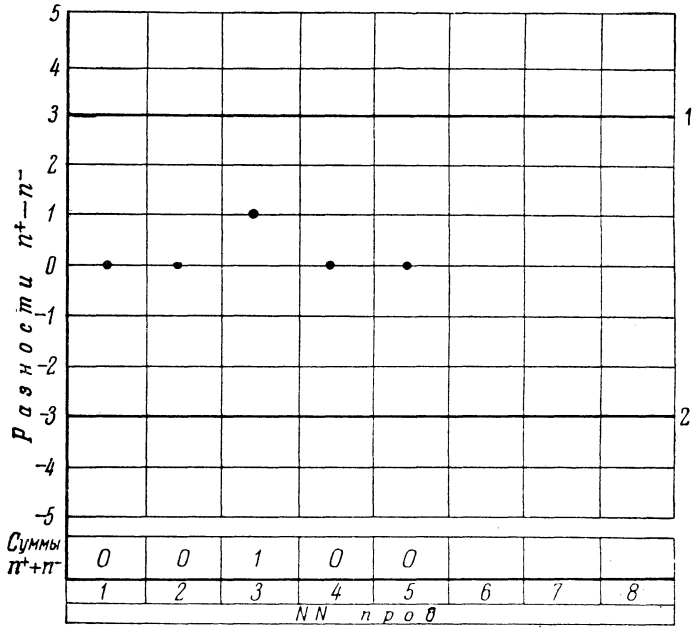
Если из пробы в 10 штук абсолютная величина разности $|n^+ - n^-|$ превысит 3 или сумма $n^+ + n^-$ превысит 5, то подаётся сигнал о разладке процесса, причем разность $n^+ - n^-$ служит характеристикой центра группирования, а сумма $n^+ + n^-$ — характеристикой рассеивания.

Значения разностей и границы для них (± 3) наносятся при этом на обычную контрольную диаграмму, а значения сумм указываются в специальной строке карты, показанной на черт. 124.

Метод «заградительных зон», иногда именуемый методом «индивидуальных значений», заключается в следующем:

1) На обычной контрольной диаграмме индивидуальных значений вблизи верхней и нижней границ поля допуска выделяются верхняя (B) и нижняя (H)

заградительные зоны, положение и ширина которых определяются в зависимости от числа S возможных различных значений результатов измерений в пределах



Черт. 124. Диаграмма контроля центра настройки и величины рассеивания по методу группировки (калибров распределения): *1* — верхняя контрольная граница разностей $n^+ - n^-$; *2* — нижняя контрольная граница разностей $h^+ - h^-$.

поля допуска δ контролируемого размера $\left(S = \frac{\delta}{j}\right.$, где j — цена деления измерительного инструмента$\left.\right)$ по табл. 8.5.1.

Таблица 8.5.1

Число возможных различных значений в поле допуска $S = \frac{\delta}{j}$		5	7	10	12	14	16	18	20
№№ значений (считая снизу), входящие в зону	B	5	7	9, 10	11, 12	13, 14	14—16	15—17	17—19
	H	2	2	2, 3	2, 3	2, 3	2—4	3, 4	3—5

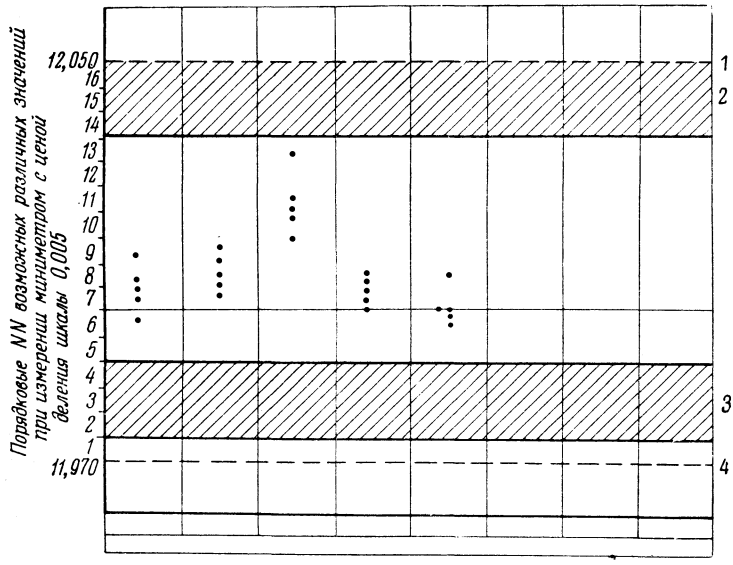
2) Если в пробе из 5 штук хотя бы одна по размеру выйдет за наружные границы любой заградительной зоны или если в обеих зонах вместе окажется по своему размеру более двух изделий, то подается сигнал о разладке процесса.

Заградительные зоны, построенные указанным способом, показаны на черт. 125.

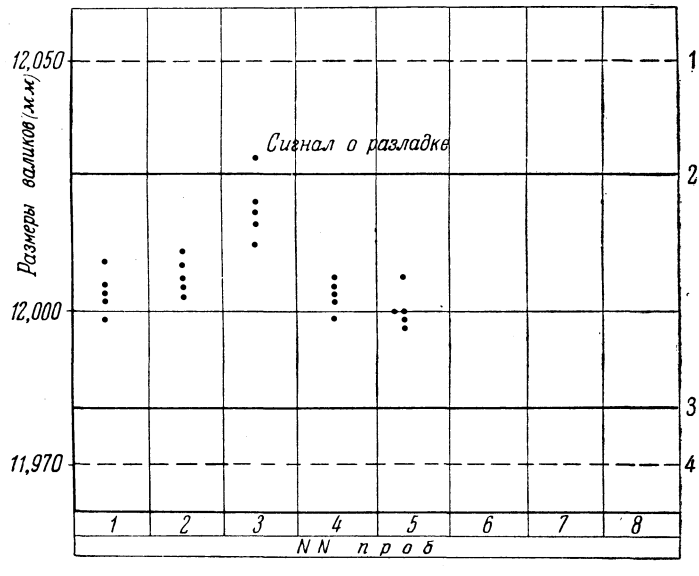
Метод крайних значений заключается в том, что на контрольную диаграмму (черт. 126) наносятся наименьшее x_1 и наибольшее x_n значения в пробе из n штук, причем для них заранее наносятся контрольные границы, положения которых определяются:

для наименьших значений величиной

$$\bar{x}_1 - r_1,$$



Черт. 125. Диаграмма контроля хода процесса по методу «заградительных зон» (средство измерения: миниметр с ценой деления 0,005): *1* — граница наибольшего предельного размера, *2* — верхняя заградительная зона, *3* — нижняя заградительная зона, *4* — граница наименьшего предельного значения.



Черт. 126. Диаграмма контроля хода процесса по крайним значениям в пробе: *1* — граница наибольшего предельного размера, *2* — граница максимального члена $\bar{x}_n + r_n = 12{,}75 + \frac{29}{2} \approx 27$ *мк*, *3* — граница минимального члена $\bar{x}_1 - r_1 = 0{,}22 - \frac{39{,}5}{2} \approx 19$ *мк*, *4* — граница наименьшего предельного размера.

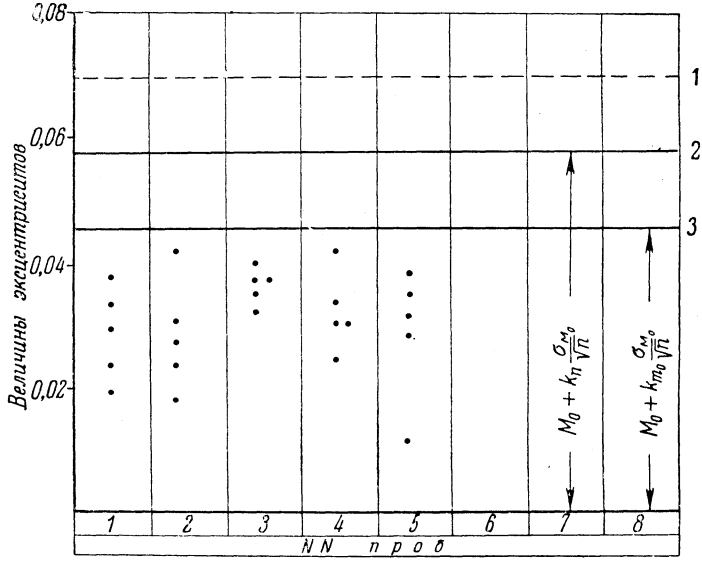
для наибольших значений величиной

$$\bar{x}_n - r_n,$$

где $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_n$ — средние арифметические соответственно из наименьших и наибольших значений, подсчитанные не менее чем по 25 пробам, r_1 и r_2 — половины размахов варьирования соответственно наименьших и наибольших значений в тех же пробах.

Иными словами, например, $\bar{x}_1$ есть деленная на m сумма наименьших значений в m пробах, а r_1 есть половина разности между самым большим и самым маленьким из наименьших значений в тех же пробах. На некоторых предприятиях на диаграммы крайних значений наносятся и все остальные индивидуальные значения в данной пробе из n штук.

При контроле эксцентриситетов, биений, дисбаланса, непараллельности, неперпендикулярности, разнотолщинности и т. п. величин, принимающих только



Черт. 127. Диаграмма контроля эксцентриситетов по медианам и крайним значениям: *1* — граница наибольшего допустимого значения эксцентриситета, *2* — контрольная граница для максимального члена, *3* — контрольная граница для медианы.

положительные значения, контрольные диаграммы ведутся аналогично тому, как и при контроле размеров, но на них, естественно, наносятся лишь верхние контрольные границы для медиан m_e (или средних арифметических $\bar{x}$) и наибольших значений (черт. 127), причем эти границы откладывают от эмпирически оцененной моды M_0 распределения на величины:

для медиан

$$M_0 + k_{m_e} \frac{\sigma_{M_0}}{\sqrt{n}}, \tag{8.5.3}$$

и для наибольших значений

$$M_0 + k_n \frac{\sigma_{M_0}}{\sqrt{n}}, \tag{8.5.4}$$

где k_{m_e}, k_n и n — те же, что в (8.5.1) и (8.5.2), $M_0 \approx m_0$ — эмпирической моде распределения и

$$\sigma_{m_0} \approx s_{m_0} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - m_0)^2}{N}}. \qquad (8.5.5)$$

8.5.3. Понятие о выборе варианта метода контроля и его параметров. Из описанных в **8.5.2** процедур контроля видно, что каждый из его методов по существу представляет метод последовательной во времени проверки статистических нулевых гипотез Ha_i о положении центра a_i настройки и $H\sigma_i$ о величине параметра рассеивания σ_i, где $i = 1, 2, \ldots$ — порядковый номер отбираемой пробы, причем, как и в **8.3.5**, предполагается, что:

1) закон распределения размеров нормален,

2) размеры пробных деталей измеряются с достаточной точностью (параметр рассеивания погрешностей измерения в несколько раз меньше параметра рассеивания погрешностей обработки).

При этом гипотеза Ha_i состоит в том, что $a_i = a_н = \Delta_0$, т. е. что положение центра распределения, оцениваемое по i-й пробе, совпадает с некоторым заданным настроечным размером $a_н$, т. е. практически с серединой допуска; гипотеза же $H\sigma_i$ заключается в том, что $\sigma_i = \sigma$, т. е. параметр рассеивания, оцениваемый на той же пробе, не отличается от исходного, заранее известного значения σ параметра рассеивания размеров. Параметры a_i и σ_i оцениваются каждый по различным выборочным характеристикам в зависимости от принятого метода контроля. Так, например, параметр a_i оценивается с помощью медианы m_e средней арифметической $\bar{x}$ или абсолютного значения разности $n^+ - n^-$ и т. д., а параметр σ_i — посредством крайних членов x_1 и x_n пробы, размаха варьирования R или суммы $n^+ + n^-$ и т. д.

В качестве области допустимых значений проверяемой характеристики, например, центра группирования берется интервал вида $(\Delta_0 - h, \Delta_0 + h)$, где h — отклонение положения соответствующей контрольной границы от среднего допускаемого размера Δ_0, который для удобства дальнейшего рассмотрения мы будем считать равным нулю, т. е. примем за начало отсчета. Как и в **8.3.5**, мы должны выбрать n и h, а также и сам метод контроля таким образом, чтобы вероятности p_{I} и p_{II} ошибок соответственно первого (неправильная браковка верной гипотезы) и второго (неправильная приемка гипотезы, когда на самом деле она должна быть отвергнута) родов были достаточно малы. Ошибка первого рода при текущем контроле означает подачу ошибочного сигнала о разладке процесса, что повлечет за собой вмешательство в процесс и потерю времени на заранее обреченные на неудачу поиски причин «разладки», которой на самом деле нет.

Ошибка второго рода, наоборот, приводит к успокаивающему заключению о нормальном ходе процесса, когда на самом деле он уже разладился; следствием этого является появление через некоторый промежуток времени брака, который просочится в состав годной продукции. Здесь мы будем иметь потери от брака и затраты времени и средств на последующую рассортировку изделий, если только мы сможем заметить в дальнейшем этот пропущенный брак.

Как указывалось в **8.3.5**, наглядное представление о достоинствах и недостатках того или иного метода проверки гипотезы (например, Ha_i или $H\sigma_i$) может быть составлено с помощью оперативных кривых (8.3.7). Соотношение (8.3.8) и выражает зависимость, нужную для построения оперативных кривых, в частности, для метода контроля положения центра настройки по средним арифметическим. Для метода контроля центра настройки по медианам может быть использована приближенная, совершенно аналогичная формула

$$\mathbf{P}_{m_e}(a, \sigma; n, h) = \Phi\left(\frac{a+h}{\sigma_{m_e}}\right) - \Phi\left(\frac{a-h}{\sigma_{m_e}}\right), \qquad (8.5.6)$$

где

$$\sigma_{m_e} = \frac{\sigma}{\sqrt{\frac{2n}{\pi}}}.$$

Вероятность $\mathbf{P}(a, \sigma; n, h)$ представляет вероятность нахождения принятой за основу данного метода выборочной характеристики в контрольных границах, т. е., иначе говоря, вероятность неполучения сигнала о разладке процесса. Практически удобно выражать величины a, σ и h в долях половины допуска, обозначаемой через $\bar{\delta} = \frac{\delta}{2}$, где δ — допуск контролируемого размера.

Приняв обозначения

$$a_\delta = \frac{a}{\bar{\delta}}, \quad \sigma_\delta = \frac{\sigma}{\bar{\delta}} \quad \text{и} \quad h_\delta = \frac{h}{\bar{\delta}},$$

будем обозначать интересующую нас вероятность через

$$\mathbf{P}(a_\delta, \sigma_\delta; n, h_\delta).$$

Когда разладка процесса отсутствует, т. е. a_δ мало отличается от нуля и σ_δ близко к $\frac{1}{3}$ (см. (8.3.1)), желательно, чтобы вероятность $\mathbf{P}(a_\delta, \sigma_\delta; n, h_\delta)$ была как можно ближе к единице, так как неподача сигнала будет в этом случае правильной и, наоборот, подача его будет ошибочной; вероятность подачи сигнала в этих условиях, равная $1 - \mathbf{P}(a_\delta, \sigma_\delta; n, h_\delta)$, будет, следовательно, вероятностью p_{I} ошибки *первого рода*, т. е. вероятностью неправильной браковки нулевой гипотезы. Но как только разладка достигнет существенной величины (a_δ будет существенно отличаться от нуля или σ_δ будет существенно больше $\frac{1}{3}$), необходимо, чтобы вероятность $\mathbf{P}(a_\delta, \sigma_\delta; n, h_\delta)$ быстро уменьшилась до достаточно малой величины, так как неподача сигнала теперь будет угрожать пропуском незамеченного брака, а вероятность $\mathbf{P}(a_\delta, \sigma_\delta; n, h_\delta) = p_{\text{II}}$ будет в данном случае вероятностью *ошибки второго рода*. Таким образом, желательно, чтобы вероятность $\mathbf{P}$ круто падала, как только разладка a_δ или величина σ_δ достигают существенной величины.

Наличие допуска δ контролируемого размера, определяющего границы годности вырабатываемых при данном процессе изделий, позволяет дополнить оперативную кривую еще кривой вероятности q выхода изделий за границы допуска, т. е. вероятности получения брака.

Эта вероятность, как легко понять, определяется формулой

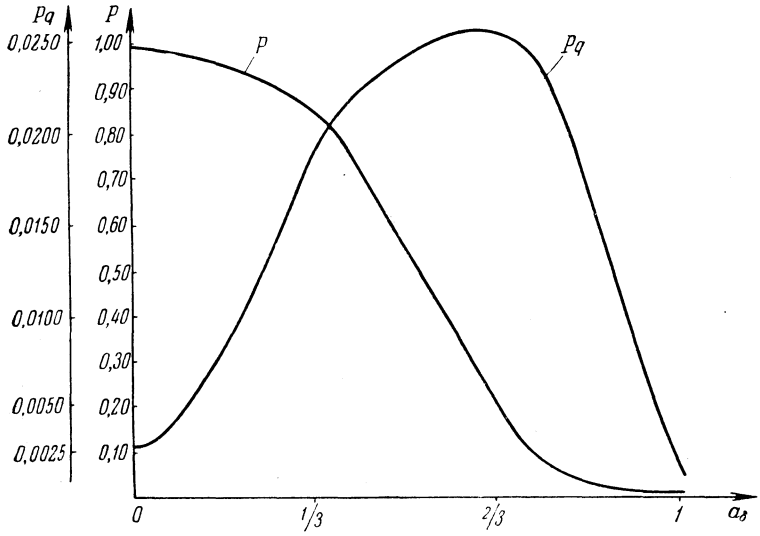
$$q(a_\delta, \sigma_\delta; \delta) = 1 - \Phi\left(\frac{\bar{\delta} + a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\bar{\delta} - a}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1 + a_\delta}{\sigma_\delta}\right) - \Phi\left(\frac{1 - a_\delta}{\sigma_\delta}\right); \quad (8.5.7)$$

она зависит от величин a_δ, σ_δ и δ, но не зависит от объема пробы n и величины h.

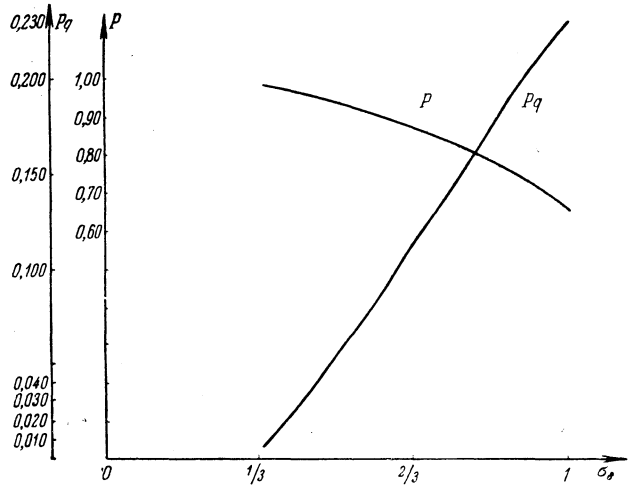
Произведение Pq имеет смысл вероятности получения брака, просочившегося в годную продукцию и оставшегося незамеченным. Обозначим через $\max Pq$ максимальное значение этого произведения. Тогда, естественно, предпочтительными будут тот метод контроля и те его расчетные параметры (n и h), при которых $\max Pq$ будет достаточно малым и удаленным от начала отсчета смещений центра настройки.

На черт. 128 показаны вероятности P и произведения Pq в зависимости от a_δ и на черт. 129 — графики изменения их в зависимости от σ_δ при $n = 4$ и $h = \frac{3}{2}\sigma$. Изменяя n и h, мы получили бы серию таких кривых.

Сравнивая между собой $\max Pq$ при различных методах контроля и при различных значениях расчетных параметров, мы можем выбрать наиболее



Черт. 128. Измерение вероятности P нахождения выборочной характеристики в контрольных границах и произведения Pq, где q — вероятность выхода изделий за границы допуска в зависимости от смещения центра настройки a_δ.



Черт. 129. Изменение вероятности P нахождения выборочной характеристики в контрольных границах и произведения Pq, где q — вероятность выхода изделия за границы допуска в зависимости от изменения σ_δ—характеристики рассеивания размеров.

подходящие из них с точки зрения предъявляемых в данных реальных производственных условиях требований. Следует при этом заметить, однако, что объем пробы, а также и периодичность отбора проб обычно сами по себе определяются производственными условиями — сложностью и трудоемкостью измерений, штатами контрольных работников, производительностью их труда при измерениях и т. п. — и обычно составляют объем пробы 5 штук (гораздо реже $n=2$, 3, 7 и 10), а периодичность — 1 час.

Критерий $\max Pq$ является, конечно, лишь приближенной характеристикой доброкачественности метода контроля. Более детальное суждение требует учета периодичности, характера и величины разладок (скачки размеров с учетом их вероятностей, постепенное нарастание размеров и т. п.), а также таких факторов, как, например, степень точности подналадки после получения сигнала. О всех этих важных обстоятельствах можно получить представление, проведя надлежащий анализ хотя бы с помощью тех приемов, которые были рассмотрены в **8.3.2, 8.3.3** и **8.3.5** и которые позволяют к тому же обоснованно подойти к установлению «периодичности» отбора проб. Заметим лишь при этом, что если разладки процесса вызываются на самом деле периодически действующими факторами, то пробы тогда должны отбираться, естественно, не через строго определенные промежутки времени.

§ 6. Статистические методы приемочного последующего контроля качества продукции

8.6.1. Общие понятия и задачи. Продукция массового производства обычно поступает в виде партий, содержащих большое число N готовых изделий или полуфабрикатов, выпускаемых заводом или передаваемых из одного цеха в другой. Прием такой партии связан с проверкой качества изделий, входящих в партию; в простейших случаях приемки по качественному признаку предполагается, что каждое изделие может удовлетворять предъявляемым к продукции требованиям или не удовлетворять им, т. е. быть годным или негодным. Контроль качества изделий называется *сплошным*, если им охвачены все изделия данной партии. Только такой контроль может гарантировать с полной уверенностью надлежащее качество *всех изделий* данной партии. Сплошной контроль неизбежен во всех тех случаях, когда производимые изделия имеют ответственное назначение и должно быть гарантировано полное отсутствие брака в принятой партии. Это не значит, конечно, что любая сплошная проверка полностью исключает пропуск брака по ошибке. В ряде случаев для гарантии качества прибегают, например, к многократному контролю.

Во многих важных случаях сплошной контроль или невозможен, когда он связан с необходимостью уничтожения или порчи изделия (испытание на разрыв, на продолжительность работы лампочек и т. п.), или экономически невыгоден из-за высокой его стоимости. В то же время на практике мы имеем и такие случаи, когда партия готовых изделий или полуфабрикатов может быть принята при наличии некоторой доли дефектных экземпляров, допустимой без существенного ущерба для потребителя или последующей переработки.

Несомненно, что целесообразность применения *выборочного* контроля определяется в конечном счете различными экономическими факторами, связанными с проблемой приемки, такими, как стоимость контроля одного изделия, ущерба, происходящего от приемки одного негодного изделия, и т. д. Во многих случаях сплошной контроль выгодно комбинировать с выборочным; в частности, выборочный характер, как правило, носит различного рода *инспекционная* перепроверка качества продукции.

Выборочный контроль заключается в том, что на пробу отбирается некоторое число изделий из данной партии и определяется качество каждого из них. По числу или доле дефектных изделий в пробе судят о качестве всей продукции. Задача, возникающая здесь, вполне аналогична проверке гипотезы о величине

вероятности появления брака. Если результат испытания дает основание считать долю брака во всей партии, не превышающей некоторого допустимого предела, — партия принимается без сплошного контроля. Если же проба дала отрицательный результат, то партия подвергается сплошной проверке, причем все обнаруженные бракованные изделия заменяются годными. Существуют различные планы организации выборочного контроля. Мы рассмотрим здесь более подробно простейшую схему так называемой «простой» или «однократной» выборки изделий, предполагая, что испытания качества не наносят вреда изделиям.

8.6.2. Одинарная выборка. Понятие о двойной выборке. Организация контроля по простейшему плану заключается в следующих четырех правилах:

1) проверяется выборка объема n из всей партии большого объема N изделий;

2) если число d дефектных изделий выборки окажется не больше, чем некоторое назначенное число c (приемочное число изделий), $d \leqslant c$, то партия принимается;

3) если число d дефектных изделий в выборке более c, $d \geqslant c+1$, проверяются все $N-n$ оставшиеся в партии изделия;

4) все дефектные изделия, обнаруженные в случае 2) или 3), заменяются на годные.

Задачей теории является обоснование того или иного выбора чисел n и c — основных параметров данной схемы.

Основная цель браковки заключается в том, чтобы гарантировать достаточно малую долю брака в принятой продукции, не вызывая притом излишне частой браковки партии с практически незначительной долей дефектных изделий и не увеличивая чрезмерно объема выборки. Важнейшей характеристикой системы браковки с данными параметрами n и c является условная вероятность принять партию, обладающую некоторой долей брака q, другими словами, вероятность получить $d \leqslant c$ изделий в выборке из n изделий, если во всей партии число дефектных изделий будет равно Nq и, следовательно, число годных $N-Nq$.

Чтобы вычислить эту условную вероятность

$$L(q,\ c,\ n) = \mathbf{P}(d \leqslant c \mid q),$$

мы заметим, что по правилу сложения

$$\mathbf{P}(d \leqslant c \mid q) = \sum_{m=0}^{c} \mathbf{P}(d = m \mid q)$$

и согласно (2.2.3) в случае безвозвратной выборки

$$\mathbf{P}(d = m \mid q) = \frac{C_{Nq}^{m} C_{N-Nq}^{n-m}}{C_N^n} =$$

$$= \frac{n!\,(N-n)!}{m!\,(n-m)!} \cdot \frac{Nq\,(Nq-1)\ldots(Nq-m+1)\;N(1-q)\,[N(1-q)-1]\ldots[N(1-q)-n+m+1]}{N!} =$$

$$= \frac{n!(N-n)!\,N^n}{m!\,(n-m)!N!}\, q\left(q-\frac{1}{N}\right)\ldots\left(q-\frac{m-1}{N}\right)(1-q)\left[(1-q)-\frac{1}{N}\right]\ldots\left(1-q-\frac{n-m-1}{N}\right).$$

Обычно отношение $\frac{n}{N}$ мало, и мы с хорошим приближением можем использовать более простую биномиальную формулу

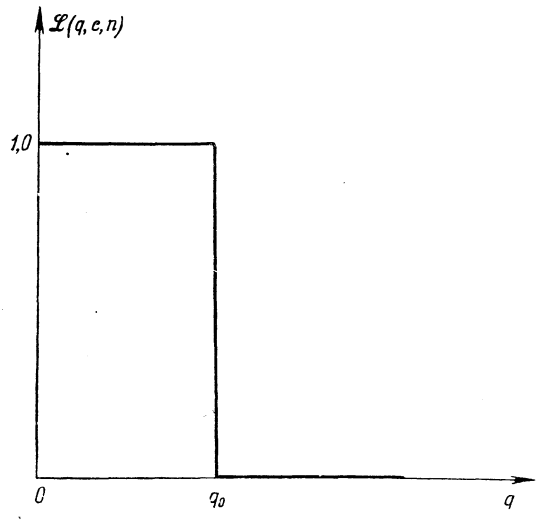
$$\mathbf{P}(d = m \mid q) \approx \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\, q^m (1-q)^{n-m}$$

и

$$L(q,\ c,\ n) \approx \sum_{m=0}^{c} \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\, q^m (1-q)^{n-m}.$$

Основное свойство вероятности $L(q, c, n)$ заключается в том, что она уменьшается с возрастанием q при постоянных c и n, так что риск принять негодную партию тем меньше, чем хуже качество партии, другими словами,

$$L(q', c, n) > L(q'', c, n),$$
если $q' < q''$.



Черт. 130. «Идеальная» оперативная характеристика метода браковки. $L(q, c, n)$ — вероятность принятия партии, обладающей долей брака q при данном приемочном числе c в объеме выборки n.

Кривая, изображающая вероятность $L(q, c, n)$ при данных c и n как функции q, называется «оперативной характеристикой» принятого способа браковки. Если предельная доля брака полагается равной q_0, так что партии с $q < q_0$ считаются еще допустимыми, а партии с $q > q_0$ недопустимыми, то идеальной оперативной характеристикой была бы кривая, изображенная на черт. 130.

Ее уравнение:

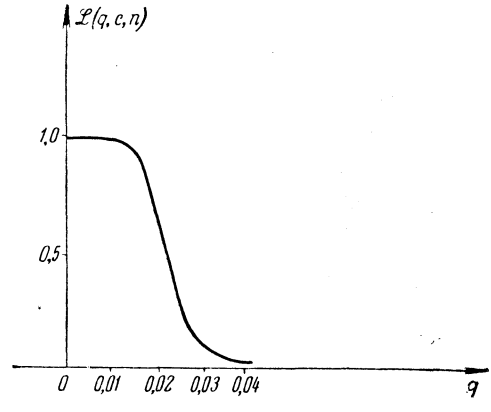
$$L(q, c, n) = 1, \quad q \leqslant q_0,$$
$$L(q, c, n) = 0, \quad q > q_0;$$

q_0 — называется *допускным качестеом.*

В этом случае возможность приема «плохих» партий с $q > q_0$ была бы исключена и вместе с тем «хорошие» партии с $q < q_0$ всегда бы принимались. Но такой формы оперативную характеристику можно было бы получить лишь при $n = N$, т. е. при сплошном контроле. Выборочный контроль, конечно, связан с необходимостью отбраковывать иногда хорошие партии и принимать некоторую долю таких, которые должны бы быть забракованы при сплошном контроле. На практике стараются подбирать такие значения n и c, чтобы оперативная характеристика лишь с некоторым приближением отвечала указанной начальной форме. Для этого приходится при достаточно большом c подбирать n так, чтобы среднее значение числа дефектных изделий в выборке nq_0 приближенно равнялось c (или близкому к нему числу).

На черт. 131 приведена оперативная характеристика для случая $N = 10\,000$, $n = 1000$, $c = 20$ и

$$q_0 \approx \frac{c}{n} = 0{,}02.$$



Черт. 131. Оперативная характеристика метода браковки при объеме партии $N = 10\,000$, объеме выборки $n = 1000$, браковочном числе $c = 20$ и допустимой доле брака $q_0 \approx \frac{c}{n} = 0{,}02$; $L(q, c, n)$ — вероятность принятия партии, обладающей долей брака q при данных n и c.

Область $q > q_0$ — область недопустимо больших значений брака в партии; соответствующие вероятности $L(q, c, n)$ являются вероятностями ошибок «вто-

рого рода» — они измеряют риск для потребителя принять «плохую» партию ($q > q_0$) по «хорошей» выборке, т. е. такой, в которой $d \leqslant c$.

Область $q < q_0$ — область допустимых значений q; в этой области вероятность $L(q)$ должна быть достаточно близка к единице для того, чтобы принятый метод браковки гарантировал от частых ошибок «первого» рода, т. е. браковки «хорошей» партии по «плохой» выборке ($d > c$). Разность $1 - L(q)$ измеряет вероятности этих ошибок. Обычно при нормальном ходе производства среднее значение q, которое мы обозначим через $q_{\text{ср}}$, значительно меньше q_0. Для характеристик риска производителя часто ограничиваются указанием разности $1 - L(q_{\text{ср}})$; аналогично в качестве характеристики вероятности второго рода определяют ординату $L(q_0)$, причем при $q > q_0 \quad L(q) < L(q_0)$.

При заданных значениях q_0 и предельной величины β для вероятностей ошибок второго рода можно подобрать различные комбинации чисел n и c, чтобы приблизительно удовлетворить равенству

$$L(q_0,\ c,\ n) = \beta. \tag{8.6.1}$$

Другими словами, уравнения (8.6.1) еще не достаточно для того, чтобы точно фиксировать числа c и n; поэтому некоторой свободой в их выборе пользуются, чтобы обеспечить наиболее экономный объем инспекции. Если доля брака равна q, то математическое ожидание объема контролируемых изделий легко вычислить: обозначим его через $J(q)$; имеем:

$$J(q) = L(q,\ c,\ n) \cdot h + N \cdot [1 - L(q,\ c,\ n)].$$

Подставляя сюда вместо q среднее его значение $q_{\text{ср}}$, получим величину, характеризующую среднее число обследуемых изделий при принятом методе браковки. Если наряду с уравнением (8.6.1) потребовать, чтобы выполнялось условие $J(q_{\text{ср}}) = \text{minimum}$, то мы получим уже вполне определенную пару n и c, удовлетворяющую этим двум требованиям, обеспечивающим заданный риск β потребителя и минимальное число проверяемых объектов при данных q_0 и $q_{\text{ср}} = \bar{q}$.

Существует другой способ гарантировать интересы потребителя от случайностей, связанных с выборочной проверкой, а вместе с тем и другой способ подбора чисел c и n. Он основан на оценке средней доли дефектных изделий, оставшихся в партиях при их приемке по выборкам.

Вероятность получения m дефектных изделий в выборке объема n при условии, что доля дефектных изделий во всей партии равна q, будет $\mathbf{P}_m(q)$. Если $m < c$, то эти m изделий обмениваются на годные и вся партия принимается: до приемки в партии было qN, а после приемки, очевидно, $qN - m$ дефектных изделий. Следовательно, доля этих изделий уменьшилась до $\left(q - \frac{m}{N}\right)$. Если $m > c$, то последующий сплошной контроль гарантирует 100%-ную годность всех изделий и, следовательно, доля дефектных изделий в этом случае равна нулю. Поэтому, обозначая через $Q(q)$ математическое ожидание доли дефектных изделий в принятой партии, будем иметь:

$$Q(q) = \sum_{m=0}^{c} \mathbf{P}_m(q)\left(q - \frac{m}{N}\right). \tag{8.6.2}$$

Статистический смысл этой формулы заключается в следующем: если мы произведем большое число контрольных выборок с данными n и c из партий с одной и той же долей дефектных изделий q, то средняя доля дефектных во всех партиях, принятых после инспекции, будет равна $Q(q)$. Заметим, что $Q(q)$ является функцией q, определенной для тех значений q, для которых Nq равно

целому положительному числу (или нулю), так что возможными значениями q будут:

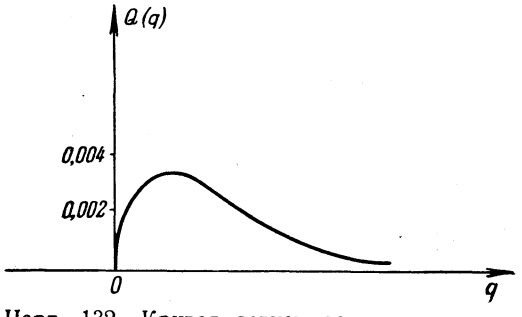
$$q = \frac{0}{N};\ \frac{1}{N};\ \ldots;\ \frac{N-1}{N};\ \frac{N}{N}.$$

При данных c, n и N $Q(q)$ принимает максимальное значение; мы будем обозначать эту величину Q_L:

$$Q_L = \max Q(q), \quad 0 < q < 1. \tag{8.6.3}$$

Пример кривой $Q(q)$, отвечающей случаю $N = 1000$, $c = 1$, приведен на черт. 132. Максимум $Q_L = 0{,}0035$ достигается при $n = 100$ и $d = 2$.

Величина Q_L характеризует наихудшее среднее качество принятой продукции — ее называют также «верхним пределом среднего выходного качества». Можно показать, что чем больше значение q, при котором $Q(q)$ достигает своего максимального значения Q_L, тем меньше само Q_L. Это, конечно, объясняется тем, что чем выше значение q, тем больше вероятность приема партии с 100% инспекцией. Если величины β, n, N и c определены, то Q_L также вполне определено; средняя доля дефектных изделий в принятых партиях при этом никогда не превзойдет Q_L, каковы бы ни были неизвестные нам доли брака в партиях до их приемки.



Черт. 132. Кривая зависимости математического ожидания $Q(q)$ доли q дефектных изделий в принятой партии при $N = 1000$ и $c = 1$ от q. Максимум $Q = 0{,}0035$ достигается при $n = 100$ и $d = 2$.

Если, с другой стороны, задаться величиной Q_L, мы можем искать такую комбинацию чисел n и c, чтобы для нее: 1) приближенно выполнялось равенство (8.6.3) при данном Q_L, 2) объем инспекции $J(\bar{q})$ был минимален.

Рассматривая различные комбинации чисел n и c, отвечающие данному β_L (при первом способе) или данному Q_L (при втором способе), мы можем выделить, вообще говоря, одну комбинацию (n и c) при данных N и $\bar{q}$, для которых $J(\bar{q})$ будет меньше, чем для других.

Первый способ иногда называют приемкой «по допускному» качеству, второй — по среднему выходному, или отправному, качеству.

Обширные таблицы для решения этих задач носят название таблиц Доджа и Ромига (их составителей).

В таблицах Доджа и Ромига предел β риска потребителя принят равным 0,1; для величин допускного качества q_0 от 0,005 до 0,10 (т. е. от 0,5 до 10%), для средней доли брака $\bar{q}$ в пределах от 0,00005 до 0,5 и при N от 1 до 100 000 вычислены оптимальные комбинации n и c (причем все аргументы размещены в надлежащих группировках).

Аналогичные таблицы n и c имеются для различных значений Q_L от 0,001 до 0,10, для N от 1 до 100 000 и $\bar{q}$ в пределах от 0,00002 до 0,10. При вычислениях оказалось во многих случаях возможным использовать пуассоновское приближение к вероятностям $\mathbf{P}_m(q)$ (если q и $\frac{n}{N}$ малы, например меньше 0,1).

Сокращенные таблицы этого типа помещены в приложениях (см. табл. XXVI).

Мы видели, что процедура простой, или одинарной, выборки аналогична испытанию гипотезы $q \leqslant q_0$ при альтернативной гипотезе $q > q_0$. Более сложным

является план инспекции, носящей название *двойной выборки*. Этот план предполагает процедуру, регулируемую следующими семью правилами:

1. Из предложенной для приемки партии берется выборка объема n_1.

2. Если d_1 — число дефектных изделий в этой выборке окажется не более c_1 ($c_1 < n_1$), то партия принимается.

3. Если $d_1 > c_2$, где $c_2 > c_1$ — другое заданное число, то партия подвергается сплошному контролю.

4. Если $c_1 < d_1 \leqslant c_2$, то из партии берется дополнительная выборка объема n_2 (обычно $n_2 < n_1$).

5. Если сумма $d_1 + d_2$ — число дефектных изделий в первой и второй выборке меньше c_2 ($d_1 + d_2 < c_2$), то партия принимается.

6. Если $d_1 + d_2 \geqslant c_2$, то вся партия подвергается сплошному контролю.

7. Все обнаруженные дефектные изделия заменяются годными.

Подбор чисел n_1, n_2, c_1 и c_2 осуществляется, исходя из тех же требований, обеспечивающих данный уровень риска потребителя или выходного качества, а также минимального объема инспекции. К этим требованиям приходится добавлять еще некоторые дополнительные условия, чтобы выбор осуществился однозначно.

Следует отметить, что оба метода требуют сплошной проверки оставшейся части партии; это требование в некоторых случаях является весьма трудно выполнимым или даже бессмысленным в тех случах, когда контроль связан с разрушением изделий; в таких случаях контроль указанным методом неосуществим.

Процедура двойной выборки содержит идею так называемого последовательного анализа. Она имеет некоторое преимущество перед одинарной выборкой. Если сравнить одинарную выборку объема n и двойную с тем же средним объемом $n = n_1 + n_2$, то оперативная характеристика во втором случае будет ближе к «идеальной» оперативной характеристике, чем первая. Другими словами, при одной и той же оперативной характеристике двойная выборка требует в среднем меньшего объема выборки, чем одинарная.

8.6.3. Случай приемочного числа c, равного нулю. Мы рассмотрим здесь более подробно случай приемочного числа, равного нулю: в этом случае можно дать более обозримые и простые оценки, выясняющие различные характеристики принятого метода контроля. В этом случае $L(q)$ — вероятность принятия партии с долей брака q — выражается следующей формулой:

$$L(q) = \mathbf{P}_0(q) = \frac{M(M-1)\dots(M-n+1)}{N(N-1)\dots(N-n+1)}, \tag{8.6.4}$$

причем $M = N(1-q)$ — число годных изделий в партии.

Замечая, что дроби $\frac{M}{N}, \frac{M-1}{N-1}, \dots, \frac{M-n+1}{N-n+1}$ образуют убывающую последовательность, мы легко получим следующее двухстороннее неравенство:

$$(1-q-\lambda)^n \leqslant \left(\frac{M-n+1}{N-n+1}\right)^n < L(q) < \left(\frac{M}{N}\right)^n = (1-q)^n, \tag{8.6.5}$$

где $\lambda = \frac{n}{N}$.

Для среднего выходного качества $Q(q)$, пользуясь (8.6.2), находим:

$$Q(q) = L(q) \cdot q < (1-q)^n q.$$

Легко проверить, что максимум функции, стоящей в правой части, достигается для $q = \frac{1}{n+1}$, и потому

$$\max Q(q) < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

При $n > 20$ можно пользоваться следующей приближенной формулой:

$$\max Q(q) \approx 0{,}3679\left(1 - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{3(n+1)^2}\right). \tag{8.6.6}$$

В табл. XXVII приложений приведены данные, показывающие, как меняется величина $Q(q)$ с ростом n (в процентах), если допустимая доля брака будет q_0, то для вероятности ошибок первого и второго родов мы будем иметь неравенства

$$\alpha = \mathbf{P}(d > 0 \mid q < q_0) \leqslant 1 - (1 - q - \lambda)^n < 1 - (1 - q_0 - \lambda)^n, \tag{8.6.7}$$

$$\beta = \mathbf{P}(d = 0 \mid q > q_0) < (1 - q)^n < (1 - q_0)^n. \tag{8.6.8}$$

Задаваясь величиной β, мы по нему можем легко определить значение $q = q_0$ такое, которое гарантирует достаточную малость вероятности выхода доли брака за пределы $q_{\max}$. Для этого нужно только взять за q_0 величину $1 - \sqrt[n]{\beta}$.

Пользуясь формулой (8.6.6), можно рассчитать необходимый объем пробы n, при котором обеспечивается заданный верхний предел выходного качества δ. Такое n находится из приближенного равенства

$$\max Q(q) \approx \delta.$$

В табл. XXVIII приложений указаны значения объема выборки, отвечающие различным уровням δ — выходного качества.

8.6.4. Последующая оценка результатов приемочного контроля. Рассматриваемые нами варианты приемочного контроля далеко не исчерпывают всего разнообразия применяемых здесь методов. Так, например, в тех случаях, когда проверка годности изделия связана с его уничтожением или порчей и сплошной контроль становится невозможным, процедура контроля должна быть изменена. Если в выборке обнаруживается число дефектных изделий, большее приемочного числа, партия бракуется целиком; при $d \leqslant c$ $N - n$ изделий, оставшихся в партии, принимают. В этом случае значительно труднее оценить эффективность контроля, так как о доле дефектных изделий мы должны судить лишь на основании только выборочных данных. Оценка с помощью оперативной характеристики производится совершенно таким же образом на основании формул, дающих $\mathbf{P}_m(q)$ и $L(q, c, n)$ при заданной величине допустимого значения брака q_0.

Мы уже говорили, что на практике трудно добиться оперативной характеристики, удовлетворительно воспроизводящей идеальную форму этой кривой; для этого пришлось бы значительно увеличить отношение $\frac{n}{N} = \lambda$, что может оказаться экономически невыгодным.

Недостаток всех «априорных» оценок заключается в том, что они принуждены принимать во внимание случаи, которые только весьма редко реализуются на практике; так, величина предельного допускного качества q_0 может значительно превысить среднюю долю брака в обычных условиях.

Поэтому представляется весьма важным дать оценку эффективности данного способа контроля, опираясь уже на фактические результаты его применения в достаточно большом числе прошедших через приемку партий. Основные показатели при этом будут: 1) средний процент брака в партиях, предъявленных к приему (до инспекции), 2) средний процент брака в принятых партиях. Чем меньше по сравнению с единицей отношение второй из этих величин к первой, тем успешнее работает данный метод приемки.

Прием оценки величины брака в принятых партиях по данным контроля разработан акад. А. Н. Колмогоровым; он основывается на развитой им теории несмещенных оценок. Мы не будем рассматривать эту теорию в данной книге, а остановимся лишь на одном способе, имеющем, впрочем, достаточно общее значение.

Будем обозначать через D число дефектных изделий в партии объема N, так что $q = \frac{D}{N}$ — доля брака в партии; через d будем обозначать число дефектных изделий в выборке объема n. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — результаты выборки, причем каждое x_i представляет отметку годности или негодности изделия, обследованного на i-м шагу. Можно, например, придать x_i два возможных значения, полагая $x_i = 0$, если i-е изделие оказалось годным, и $x_i = 1$, если оно оказалось негодным.

Мы предположим, что число n и приемочное число c назначены. Пусть D^* — число дефектных изделий в принятой партии, так что

$$D^* = D - d \text{ в случае приемки партии, т. е. при } d \leqslant c,$$

$$D^* = 0 \text{ при } d > c.$$

Задача заключается в том, чтобы найти оценку величины D^* или $q^* = \frac{D^*}{N}$.

Предположим, что к данным n испытаниям мы добавляем еще $(n+1)$-е испытание с возможным исходом x_{n+1}. Очевидно, что средняя доля дефектных в принятой партии, т. е. $\mathbf{M}q^*$, равна вероятности совмещения двух событий: партия будет принята и x_{n+1} окажется дефектным, т. е. в наших обозначениях

$$\mathbf{M}q^* = \mathbf{P}(d \leqslant c;\ x_{n+1} = 1). \tag{8.6.9}$$

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ — возможные результаты выборки из $(n+1)$ изделий. Из них можно образовать n выборок объема n, выбрасывая по очереди первое наблюдение и беря $x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}$, потом вычеркивая второе и беря оставшиеся $x_1, x_3, x_4, \ldots, x_n, x_{n+1}$, и вообще, выбрасывая k-е наблюдение x_k, мы получим выборку

$$x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n, x_{n+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

В каждой из этих выборок подсчитаем число дефектных. Пусть эти числа будут $d_1, d_2, \ldots, d_n$ — по порядку образованных нами выборок.

Образуем теперь вспомогательную функцию ω_k, полагая $\omega_k = 1$, если $d_k \leqslant c$ и $x_k = 1$, т. е. x_k дефектно; $\omega_k = 0$, если из перечисленных выше условий одно или оба нарушаются.

Если мы возьмем сумму

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k,$$

то эта сумма, очевидно, будет равна числу таких выборок из числа n, которые удовлетворяют условиям приема $(d_k \leqslant c)$ и сопровождаются притом появлением дефектного изделия в не вошедшем в данную выборку наблюдении.

Среднее число выборок, удовлетворяющих указанным условиям, будет, очевидно:

$$\omega = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \omega_k.$$

Очевидно, все величины ω_k совершенно равноправны и распределены одинаково, поэтому

$$\mathbf{M}(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}(\omega_k) = \mathbf{M}(\omega_n) = 1 \cdot \mathbf{P}(\omega_n = 1) + 0 \cdot \mathbf{P}(\omega_n = 0) =$$

$$= \mathbf{P}(\omega_n = 1) = \mathbf{P}(d_n \leqslant c;\ x_{n+1} = 1),$$

и, сравнивая с (8.6.9) (замечая, что $d_n = d$), получим:

$$\mathbf{M}q^* = \mathbf{M}(\omega).$$

Таким образом, ω есть несмещенная оценка величины q^*. Вычисление ω может быть значительно упрощено; оказывается, что для определения ω не всегда необходимо знать результат $(n+1)$-го испытания. В самом деле, разберем три случая:

1. Если $d \leqslant c$, притом какое-либо изделие x_k дефектное, $x_k = 1$; очевидно, что, заменяя x_k на любое изделие, годное или негодное, т. е. будет ли $x_{n+1} = 1$ или $x_{n+1} = 0$, мы не увеличим общего числа дефектных изделий, так что $d_k \leqslant c$ и потому

$$\omega_k = 1, \text{ если } x_k \text{ дефектное},$$

$$\omega_k = 0, \text{ если } x_k \text{ годное}.$$

Поэтому при $d \leqslant c$, каково бы ни было x_{n+1},

$$\omega = \frac{1}{n}\sum \omega_k = \frac{d}{n},$$

так как ровно для d индексов k ω_k окажется равной единице.

2. Если $d > c+1$, то, каково бы ни было x_k, условие обращения ω_k в единицу нарушается, так как в каждой выборке $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n, x_{n+1}$ число дефектных d_k заведомо больше c (оно может уменьшиться только на единицу). Поэтому $\omega_k = 0$ при любом k и, значит, $\omega_k = 0$, каково бы ни было x_{n+1}.

3. Если $d = c+1$, необходимо дополнительное испытание x_{n+1}. При этом, если $x_{n+1} = 1$ (т. е. $n+1$-е изделие дефектно), все числа $d_1, d_2, \ldots, d_n$ будут больше c и, значит, все $\omega_k = 0$; при $x_{n+1} = 0$ ($n+1$-е изделие годное) $\omega_k = 1$ в том и только в том случае, когда соответствующее x_k дефектно.

Таким образом,

$$\omega = \begin{cases} 0, & \text{если } x_{n+1} \text{ дефектное}, \\ \dfrac{d}{n} = \dfrac{c+1}{n}, & \text{если } x_{n+1} \text{ годное}. \end{cases}$$

Таким образом, для определения ω следует привлекать $(n+1)$-е наблюдение лишь в том случае, когда в выборке из n изделий число дефектных окажется равным $(c+1)$, т. е. на единицу больше приемочного числа; во всех остальных случаях дополнительного испытания делать не нужно.

Мы можем определение характеристики ω свести в следующую таблицу:

$$\omega = \begin{cases} \dfrac{d}{n} & \text{при } d \leqslant c, \\ \dfrac{c+1}{n} & \text{при } d = c+1 \text{ и } x_{n+1} = 1 \text{ (дефектное)}, \\ 0 & \text{при } d = c+1 \text{ и } x_{n+1} = 0 \text{ (годное)}, \\ 0 & \text{при } d > c+1. \end{cases}$$

Подсчитывая характеристику ω и осредняя результат по большому числу партий, мы можем оценить среднюю величину брака в принятых партиях и тем самым проверить эффективность принятой методики приемки.

Более обстоятельное изложение приемов оценки пропущенного брака читатель найдет в работах акад. А. Н. Колмогорова [1]).

8.6.5. Процедура последовательного контроля. Мы видели, что испытание качества изделий, составляющих партию, можно рассматривать как задачу проверки гипотезы о величине вероятности брака в обследуемой партии. Эту проверку можно провести методом, который предусматривает особую, так называемую

[1]) А. Н. Колмогоров, Несмещенные оценки, 1950, и А. Н. Колмогоров, Статистический приемочный контроль при допустимом числе дефектных изделий, равном нулю, 1951, Ленинградский дом научно-технической пропаганды.

«последовательную» процедуру проверки. Главная особенность этого метода проверки статистических гипотез заключается в том, что объем выборки заранее не фиксируется — наблюдения ведутся последовательно одно за другим. После каждого наблюдения производятся некоторые вычисления, позволяющие на основании накопленной за все время наблюдений информации принять одно из трех возможных мнений: 1) признать испытуемую гипотезу правильной, 2) признать правильной альтернативную гипотезу, конкурирующую с проверяемой, 3) продолжить наблюдения для получения более определенной информации.

Правила, которые даются для того, чтобы каждый раз остановиться на одном из трех решений, таковы, что проверяемая гипотеза принимается или отбрасывается, как только данные испытания позволяют сделать это с заранее фиксированным уровнем надежности (и не раньше этого момента). В последовательном анализе число наблюдений n считается переменным; самая процедура устанавливается таким образом, чтобы, фиксируя величину вероятностей α и β для ошибок первого и второго рода, обеспечить в среднем минимальное число испытаний для прозерки. В результате этого последовательный прием проверки оказывается при тех же уровнях вероятности α и β более экономичным, так как лучше использует поступающую от одного опыта к другому информацию; выигрыш в числе наблюдений может оказаться весьма значительным. Это обстоятельство имеет практически немаловажное значение в тех случаях, когда стоимость контроля (затрачиваемое время, материал, работа) пропорциональна объему инспекции.

Отправным пунктом последовательной процедуры является вычисление так называемого «отношения правдоподобия», т. е. отношения двух вероятностей $\frac{p_{1,\,n}}{p_{0,\,n}}$, где $p_{0,n}$ — вероятность наблюденных результатов n опытов при правильности проверяемой («нулевой») гипотезы, а $p_{1,\,n}$ — та же вероятность при условии, что верна «альтернативная» гипотеза. После каждого испытания или наблюдения определится отношение правдоподобия, относящееся к результату всех произведенных до данного момента наблюдений. Величина этого отношения дает определенные указания для принятия того или иного из трех возможных решений. Если $\frac{p_{1,\,n}}{p_{0,\,n}}$ превосходит уровень $A=\frac{1-\beta}{\alpha}$ $(A>1)$, наблюдения прекращаются и принимается альтернативная гипотеза, т. е. партия бракуется. Если $\frac{p_{1,\,n}}{p_{0,\,n}}$ не превосходит некоторого другого уровня $\frac{1}{B}=\frac{\beta}{1-\alpha}\left(B=\frac{1-\alpha}{\beta}>1\right)$, наблюдения также прекращаются и принимается нулевая гипотеза, т. е. партия принимается. Наконец, если $\frac{p_{1,\,n}}{p_{0,\,n}}$ падает между A и $\frac{1}{B}$, то результат опыта признается недостаточным, чтобы с необходимой надежностью сделать определенное заключение. Описанная нами процедура характерна для различных приложений последовательного анализа. Обычно следующие друг за другом испытания независимы друг от друга; изменение отношения правдоподобия при переходе от n-го к $(n+1)$-му испытанию заключается в этом случае в умножении отношения правдоподобия, вычисленного для первых n испытаний, на отношение правдоподобия последнего $(n+1)$-го опыта. Если вместо отношения взять его логарифм, то после каждого опыта следует к логарифму прежнего отношения $\lg\frac{p_{1,\,n}}{p_{0,\,n}}$ прибавить $\lg p_1$ и вычесть $\lg p_0$, где p_1 и p_0 относятся к последнему из проделанных опытов. Вместо установленных пределов для отношения правдоподобия удобно пользоваться пределами для его логарифма; $a=\lg A=\lg\frac{1-\beta}{\alpha}$ и $b=\lg B=\lg\frac{1-\alpha}{\beta}$, причем превышение a дает основание для того, чтобы принять альтернативную гипотезу, тогда как в том случае, когда логарифм отношения не превосходит

($-b$), принимается нулевая гипотеза; во всех остальных случаях мы продолжаем серию наблюдений. В частных случаях вычисления $\lg \frac{p_1}{p_0}$ могут быть упрощены.

Пусть требуется проверить гипотезу H_0, заключающуюся в том, что вероятность появления события в каждом из последовательных независимых испытаний равна $p = p_0$; конкурирующая с этой гипотезой альтернатива приписывает той же вероятности значение $p = p_1$.

В этом случае после проведенных n опытов, в которых в определенном порядке d_n раз наблюдалось появление события и $n - d_n$ раз наступало событие, противоположное первому, отношение правдоподобия будет равно:

$$\frac{p_{1,n}}{p_{0,n}} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{d_n} \left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)^{n-d_n},$$

а его логарифм

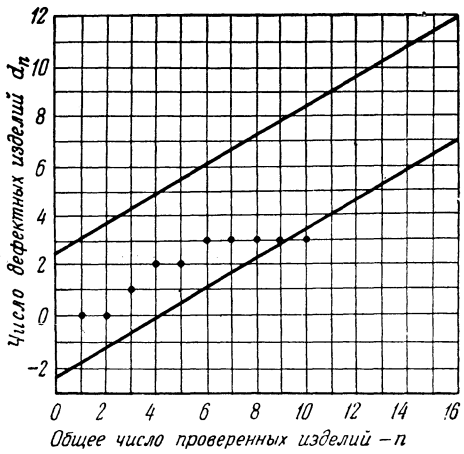
$$\lg \frac{p_{1,n}}{p_{0,n}} = d_n \lg \frac{p_1}{p_0} + (n - d_n) \lg \frac{1-p_1}{1-p_0}. \qquad (8.6.10)$$

Гипотеза $p = p_0$ отбрасывается, а гипотеза $p = p_1$ принимается, если

$$\lg \frac{p_{1,n}}{p_{0,n}} > a = \lg \frac{1-\beta}{\alpha}. \qquad (8.6.11)$$

Принимая во внимание (8.6.10) и решая неравенство (8.6.11) относительно d, получим, что указанное решение принимается, если после n опытов

$$d_n > d_1 = \frac{a + n \lg \frac{1-p_0}{1-p_1}}{\lg \frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)}}. \qquad (8.6.12)$$



Черт. 133. График последовательного контроля для случая, когда на 10-м испытании точка (n, d_n) перешла нижнюю границу и партия была принята.

Относительно n выражение в правой части представляет линейную функцию. Аналогичным образом гипотеза $p = p_0$ принимается, если

$$d_n < d_0 = \frac{-b + n \lg \frac{1-p_0}{1-p_1}}{\lg \frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)}}; \qquad (8.6.13)$$

в правой части (8.6.13) стоит также линейная функция (с тем же угловым коэффициентом).

Для наглядности процедуру выбора решения можно связать с графическим изображением результатов экспериментов. Возьмем в качестве горизонтальной оси ось n и вертикальной — ось d_n. На плоскости (n, d_n) проводят две параллельные прямые d_1 и d_0, уравнения которых будут (8.6.12) и (8.6.13); таким образом, мы получим три области, на которые разобьется вся плоскость. Для каждого номера испытания $n = 1, 2, \ldots$ наносится точка с координатами (n, d_n). Если при каком-нибудь n точка (n, d_n) выходит за пределы полосы между двумя параллельными d_1 и d_0 вверх от прямой $d_n = d_1$, то принимается гипотеза $p = p_1$; при выходе за нижнюю границу полосы принимается гипотеза $p = p_0$ и испытания прекращаются. Если же точка (n, d_n) попадает внутрь полосы, то принимается решение продолжать испытания. На черт. 133 указан случай, когда на десятом испытании точка перешла нижнюю границу; следовательно, после десятого испытания была принята гипотеза $p = p_0$, т. е. партия была принята.

Чтобы использовать метод последовательного контроля для приемки партий, задаются двумя числами q_0 и q_1, измеряющими соответственно доли брака, допустимые в принимаемой партии и недопустимые. Кроме этих двух чисел, следует назначить два числа α и β ($\alpha < 0{,}5$; $\beta < 0{,}5$), измеряющие вероятности ошибок первого и второго рода, т. е. риск изготовителя и потребителя соответственно. Чтобы получить представление о качестве применяемого метода с заданным q_0, q_1, α и β, строят оперативную характеристику. Приближенно график этой кривой $y = L(q)$ строится по следующим данным, позволяющим построить четыре точки графика $L(q)$:

$$\left.\begin{aligned} L(0) &= 1, \\ L(1) &= 0, \\ L(q_0) &= 1-\alpha, \\ L(q_1) &= \beta. \end{aligned}\right\} \qquad (8.6.14)$$

К этим четырем добавляется еще одно равенство

$$L(q') = \frac{\lg A}{\lg A - \lg B}, \qquad (8.6.15)$$

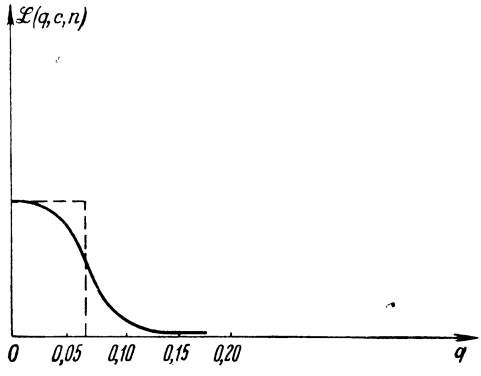
где

$$A = \frac{1-\beta}{\alpha}, \quad B = \frac{\beta}{1-\alpha}$$

и

$$q' = \frac{\lg \dfrac{1-q_0}{1-q_1}}{\lg \dfrac{q_1}{q_0} - \lg \dfrac{1-q_1}{1-q_0}},$$

причем q' лежит всегда между q_0 и q_1.



Черт. 134. Примерный график оперативной кривой для последовательного контроля. $L(q, c, n)$ — вероятность принятия партии с долей брака q.

Средний размер объема всех испытаний зависит от величины доли брака q. Он может быть определен приблизительно по следующей формуле:

$$M(n) \approx \frac{[1-L(q)]\lg A + L(q)\lg B}{q \lg \dfrac{q_1}{q_0} + (1-q)\lg \dfrac{1-q_1}{1-q_0}}. \qquad (8.6.16)$$

Примерный график этой кривой имеет вид, указанный на черт. 134.

Максимальное значение $M(n)$ обычно лежит вблизи точки q', поэтому приближенно максимум может быть определен из соотношения

$$\max M(n) \approx \frac{\lg A \lg B}{\lg \dfrac{q_1}{q_0} \lg \dfrac{1-q_1}{1-q_0}}. \qquad (8.6.17)$$

Пример расчета. Примерная таблица результатов n испытаний (табл. 8.6.1).

Таблица 8.6.1

№ испытаний (n) . .	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Результат одного испытания	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0
d_n	0	0	1	2	2	3	3	3	3	3

Мы видим, что d_n есть «нарастающий итог» определенных результатов испытания (числа дефектных изделий).

Теоретическое обоснование и дальнейшее применение этого метода контроля читатель найдет во второй части этой книги.

Для среднего объема инспекции в данном случае мы имеем:

$$J(q) = nL(q) + N[1 - L(q)] = N - L(q)(N - n). \tag{8.6.18}$$

Принимая во внимание неравенство (8.6.5) для $L(q)$, получим:

$$J(q) < N[1 - (1 - \lambda)(1 - q - \lambda)^n],$$

откуда

$$\frac{J(q)}{N} < 1 - (1 - \lambda)(1 - q - \lambda)^n. \tag{8.6.19}$$

Отсюда можно подсчитать среднюю долю изделий в партии, подвергаемую инспекции. В табл. XXIX приложений даны некоторые подсчеты для верхней границы этой доли в предположении, что λ не больше 0,05, так что его можно положить равным нулю в правой части (8.6.19), не вызвав тем самым значительной погрешности при вычислении.

Из этой таблицы следует, что во всех тех случаях, когда доля фактически предъявляемого брака значительно превышает допустимый, принятый метод браковки почти эквивалентен сплошному контролю и не приносит ощутимой пользы.

Если бы доля брака была известна, то минимальный объем выборки $O_{\min}$, обеспечивающий требуемое выходное качество q_0, может быть оценен из соотношения

$$O_{\min} = \frac{q - q_0}{q}.$$

Принятый план контроля, не предусматривающий заранее известную долю брака q, требует, вообще говоря, несколько большей, чем $O_{\min}$, доли проверенных (в среднем) изделий. Однако, как показывает табл. XXIX приложений, это увеличение незначительно.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица I

Вероятность $P_\lambda(m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$ числа m появлений редкого события, следующего закону Пуассона, где λ — среднее число появлений события (см. 2.4.3)

m	$\lambda = 0{,}1$	$\lambda = 0{,}2$	$\lambda = 0{,}3$	$\lambda = 0{,}4$	$\lambda = 0{,}5$
0	$9{,}0484^{-1}$	$8{,}1873^{-1}$	$7{,}4082^{-1}$	$6{,}7032^{-1}$	$6{,}0653^{-1}$
1	$9{,}0484^{-2}$	$1{,}6375$	$2{,}2225$	$2{,}6813$	$3{,}0327$
2	$4{,}5242^{-3}$	$1{,}6375^{-2}$	$3{,}3337^{-2}$	$5{,}3626^{-2}$	$7{,}5816^{-2}$
3	$1{,}5081^{-4}$	$1{,}0916^{-3}$	$3{,}3337^{-3}$	$7{,}1501^{-3}$	$1{,}2636$
4	$3{,}7702^{-6}$	$5{,}4582^{-5}$	$2{,}5003^{-4}$	$7{,}1501^{-4}$	$1{,}5795^{-3}$
5		$2{,}1833^{-6}$	$1{,}5002^{-5}$	$5{,}7201^{-5}$	$1{,}5795^{-4}$
6				$3{,}8134^{-6}$	$1{,}3163^{-5}$
m	$\lambda = 0{,}6$	$\lambda = 0{,}7$	$\lambda = 0{,}8$	$\lambda = 0{,}9$	
0	$5{,}4881^{-1}$	$4{,}9659^{-1}$	$4{,}4933^{-1}$	$4{,}0657^{-1}$	
1	$3{,}2929$	$3{,}4761$	$3{,}5946$	$3{,}6591$	
2	$9{,}8786^{-2}$	$1{,}2166$	$1{,}4379$	$1{,}6466$	
3	$1{,}9757$	$2{,}8388^{-2}$	$3{,}8343^{-2}$	$4{,}9398^{-2}$	
4	$2{,}9636^{-3}$	$4{,}9679^{-3}$	$7{,}6685^{-3}$	$1{,}1115$	
5	$3{,}5563^{-4}$	$6{,}9551^{-4}$	$1{,}2270$	$2{,}0006^{-3}$	
6	$3{,}5563^{-5}$	$8{,}1143^{-5}$	$1{,}6360^{-4}$	$3{,}0009^{-4}$	
7	$3{,}0483^{-6}$	$8{,}1143^{-6}$	$1{,}8697^{-5}$	$3{,}8584^{-5}$	
8			$1{,}8697^{-6}$	$4{,}3406^{-6}$	
m	$\lambda = 1$	$\lambda = 2$	$\lambda = 3$	$\lambda = 4$	$\lambda = 5$
0	$3{,}6788^{-1}$	$1{,}3534^{-1}$	$4{,}9787^{-2}$	$1{,}8316^{-2}$	$6{,}7379^{-3}$
1	$3{,}6788$	$2{,}7067$	$1{,}4936^{-1}$	$7{,}3263$	$3{,}3690^{-2}$
2	$1{,}8394$	$2{,}7067$	$2{,}2404$	$1{,}4653^{-1}$	$8{,}4224$
3	$6{,}1313^{-2}$	$1{,}8045$	$2{,}2404$	$1{,}9537$	$1{,}4037^{-1}$
4	$1{,}5328$	$9{,}0224^{-2}$	$1{,}6803$	$1{,}9537$	$1{,}7547$
5	$3{,}0657^{-3}$	$3{,}6089$	$1{,}0082$	$1{,}5629$	$1{,}7547$
6	$5{,}1094^{-4}$	$1{,}2030$	$5{,}0409^{-2}$	$1{,}0420$	$1{,}4622$
7	$7{,}2992^{-5}$	$3{,}4371^{-3}$	$2{,}1604$	$5{,}9540^{-2}$	$1{,}0444$
8	$9{,}1240^{-6}$	$8{,}5927^{-4}$	$8{,}1015^{-3}$	$2{,}9770$	$6{,}5278^{-2}$
9	$1{,}0138$	$1{,}9095$	$2{,}7005$	$1{,}3231$	$3{,}6266$
10		$3{,}8190^{-5}$	$8{,}1015^{-4}$	$5{,}2925^{-3}$	$1{,}8133$
11		$6{,}9436^{-6}$	$2{,}2095$	$1{,}9245$	$8{,}2422^{-3}$
12		$1{,}1573$	$5{,}5238^{-5}$	$6{,}4151^{-4}$	$3{,}4342$
13			$1{,}2747$	$1{,}9739$	$1{,}3209$
14			$2{,}7315^{-6}$	$5{,}6397^{-5}$	$4{,}7174^{-4}$
15				$1{,}5039$	$1{,}5725$
16				$3{,}7598^{-6}$	$4{,}9139^{-5}$
17					$1{,}4453$
18					$4{,}0146^{-6}$
19					$1{,}0565$
m	$\lambda = 6$	$\lambda = 7$	$\lambda = 8$	$\lambda = 9$	$\lambda = 10$
0	$2{,}4788^{-3}$	$9{,}1188^{-4}$	$3{,}3546^{-4}$	$1{,}2341^{-4}$	$4{,}5400^{-5}$
1	$1{,}4873^{-2}$	$6{,}3832^{-3}$	$2{,}6837^{-3}$	$1{,}1107^{-3}$	$4{,}5400^{-4}$
2	$4{,}4618$	$2{,}2341^{-2}$	$1{,}0735^{-2}$	$4{,}9981$	$2{,}2700^{-3}$
3	$8{,}9235$	$5{,}2129$	$2{,}8626$	$1{,}4994^{-2}$	$7{,}5667$
4	$1{,}3385^{-1}$	$9{,}1226$	$5{,}7252$	$3{,}3737$	$1{,}8917^{-2}$
5	$1{,}6062$	$1{,}2772^{-1}$	$9{,}1604$	$6{,}0727$	$3{,}7833$
6	$1{,}6062$	$1{,}4900$	$1{,}2214^{-1}$	$9{,}1090$	$6{,}3055$
7	$1{,}3768$	$1{,}4900$	$1{,}3959$	$1{,}1712^{-1}$	$9{,}0079$
8	$1{,}0326$	$1{,}3038$	$1{,}3959$	$1{,}3176$	$1{,}1260^{-1}$
9	$6{,}8838^{-2}$	$1{,}0140$	$1{,}2408$	$1{,}3176$	$1{,}2511$

Продолжение

m	$\lambda = 6$	$\lambda = 7$	$\lambda = 8$	$\lambda = 9$	$\lambda = 10$
10	$4{,}1304^{-2}$	$7{,}0983^{-2}$	$9{,}9262^{-2}$	$1{,}1858^{-1}$	$1{,}2511^{-1}$
11	2,2529	4,5171	7,2190	$9{,}7020^{-2}$	1,1374
12	1,1264	2,6350	4,8127	7,2765	$9{,}4780^{-2}$
13	$5{,}1990^{-3}$	1,4188	2,9616	5,0376	7,2908
14	2,2281	$7{,}0942^{-3}$	1,6924	3,2384	5,2077
15	$8{,}9126^{-4}$	3,3106	$9{,}0260^{-3}$	1,9431	3,4718
16	3,3422	1,4484	4,5130	1,0930	2,1699
17	1,1796	$5{,}9640^{-4}$	2,1238	$5{,}7863^{-3}$	1,2764
18	$3{,}9320^{-5}$	2,3193	$9{,}4389^{-4}$	2,8932	$7{,}0911^{-3}$
19	1,2417	$8{,}5449^{-5}$	3,9743	1,3704	3,7322
20	$3{,}7251^{-6}$	2,9907	1,5897	$6{,}1670^{-4}$	1,8661
21	1,0643	$9{,}9690^{-6}$	$6{,}0561^{-5}$	2,6430	$8{,}8861^{-4}$
22		3,1720	2,2022	1,0812	4,0391
23			$7{,}6598^{-6}$	$4{,}2309^{-5}$	1,7561
24			2,5533	1,5866	$7{,}3173^{-5}$
25				$5{,}7117^{-6}$	2,9269
26				1,9771	1,1257
27					$4{,}1694^{-6}$
28					1,4891

m	$\lambda = 11$	$\lambda = 12$	$\lambda = 13$	$\lambda = 14$	$\lambda = 15$
0	$1{,}6702^{-5}$	$6{,}1442^{-6}$	$2{,}2603^{-6}$		
1	$1{,}8372^{-4}$	$7{,}3731^{-5}$	$2{,}9384^{-5}$	$1{,}1641^{-5}$	$4{,}5885^{-6}$
2	$1{,}0105^{-3}$	$4{,}4238^{-4}$	$1{,}9100^{-4}$	8,1490	$3{,}4414^{-5}$
3	3,7050	$1{,}7695^{-3}$	8,2766	$3{,}8029^{-4}$	$1{,}7207^{-4}$
4	$1{,}0189^{-2}$	5,3086	$2{,}6899^{-3}$	$1{,}3310^{-8}$	6,4526
5	2,2415	$1{,}2741^{-2}$	6,9937	3,7268	$1{,}9358^{-3}$
6	4,1095	2,5481	$1{,}5153^{-2}$	8,6959	4,8395
7	6,4577	4,3682	2,8141	$1{,}7392^{-2}$	$1{,}0370^{-2}$
8	8,8794	6,5523	4,5730	3,0436	1,9444
9	$1{,}0853^{-1}$	8,7364	6,6054	4,7344	3,2407
10	1,1938	$1{,}0484^{-1}$	8,5870	6,6282	4,8611
11	1,1938	1,1437	$1{,}0148^{-1}$	8,4359	6,6287
12	1,0943	1,1437	1,0994	9,8418	8,2859
13	$9{,}2595^{-2}$	1,0557	1,0994	$1{,}0599^{-1}$	9,5607
14	7,2753	$9{,}0489^{-2}$	1,0209	1,0599	$1{,}0244^{-1}$
15	5,3352	7,2391	$8{,}8475^{-2}$	$9{,}8923^{-2}$	1,0244
16	3,6680	5,4293	7,1886	8,6558	$9{,}6034^{-2}$
17	2,3734	3,8325	5,4972	7,1283	8,4736
18	1,4504	2,5550	3,9702	5,5442	7,0613
19	$8{,}3971^{-3}$	1,6137	2,7164	4,0852	5,5747
20	4,6184	$9{,}6820^{-3}$	1,7657	2,8597	4,1810
21	2,4192	5,5326	1,0930	1,9064	2,9865
22	1,2096	3,0178	$6{,}4589^{-3}$	1,2132	2,0362
23	$5{,}7849^{-4}$	1,5745	3,6507	$7{,}3846^{-3}$	1,3280
24	2,6514	$7{,}8725^{-4}$	1,9775	4,3077	$8{,}2938^{-3}$
25	1,1666	3,7788	1,0283	2,4123	4,9799
26	$4{,}9357^{-5}$	1,7441	$5{,}1414^{-4}$	1,2989	2,8730
27	2,0109	$7{,}7513^{-5}$	2,4755	$6{,}7352^{-4}$	1,5961
28	$7{,}8998^{-6}$	3,3220	1,1493	3,3676	$8{,}5506^{-4}$
29	2,9965	1,3746	$5{,}1522^{-5}$	1,6257	4,4227
30	1,0987	$5{,}4985^{-6}$	2,2326	$7{,}5868^{-5}$	2,2114
31		2,1284	$9{,}3625^{-6}$	3,4263	1,0700
32			3,8035	1,4990	$5{,}0157^{-5}$
33			1,4984	$6{,}3594^{-4}$	2,2799
34				2,6186	1,0058
35				1,0474	$4{,}3107^{-6}$
36					1,7961

Продолжение

m	$\lambda = 16$	$\lambda = 17$	$\lambda = 18$	$\lambda = 19$	$\lambda = 20$
0					
1	$1{,}8006^{-6}$				
2	$1{,}4405^{-5}$	$5{,}9822^{-6}$	$2{,}4673^{-6}$	$1{,}0113^{-6}$	
3	7,6824	$3{,}3899^{-5}$	$1{,}4804^{-5}$	6,4049	$2{,}7482^{-6}$
4	$3{,}0730^{-4}$	$1{,}4407^{-4}$	6,6616	$3{,}0423^{-5}$	$1{,}3741^{-5}$
5	9,8335	4,8984	$2{,}3982^{-4}$	$1{,}1561^{-4}$	5,4964
6	$2{,}6223^{-3}$	$1{,}3879^{-3}$	7,1945	3,6610	$1{,}8321^{-4}$
7	5,9937	3,3706	$1{,}8500^{-3}$	9,9369	5,2347
8	$1{,}1987^{-2}$	7,1625	4,1625	$2{,}3600^{-3}$	$1{,}3087^{-3}$
9	2,1311	$1{,}3529^{-2}$	8,3251	4,9822	2,9082
10	3,4098	2,3000	$1{,}4985^{-2}$	9,4662	5,8163
11	4,9597	3,5545	2,4521	$1{,}6351^{-2}$	$1{,}0575^{-2}$
12	6,6129	5,0355	3,6782	2,5889	1,7625
13	8,1389	6,5849	5,0929	3,7837	2,7116
14	9,3016	7,9960	6,5480	5,1351	3,8737
15	9,9218	9,0621	7,8576	6,5044	5,1649
16	9,9218	9,6285	8,8397	7,7240	6,4561
17	9,3381	9,6285	9,3597	8,6327	7,5954
18	8,3006	9,0935	9,3597	9,1123	8,4394
19	6,9899	8,1363	8,8671	9,1123	8,8835
20	5,5920	6,9159	7,9804	8,6567	8,8835
21	4,2605	5,5986	6,8403	7,8323	8,4605
22	3,0986	4,3262	5,5966	6,7642	7,6914
23	2,1555	3,1976	4,3800	5,5878	6,6881
24	1,4370	2,2650	3,2850	4,4237	5,5735
25	$9{,}1969^{-3}$	1,5402	2,3652	3,3620	4,4588
26	5,6596	1,0070	1,6374	2,4569	3,4298
27	3,3539	$6{,}3406^{-3}$	1,0916	1,7289	2,5406
28	1,9165	3,8497	$7{,}0176^{-3}$	1,1732	1,8147
29	1,0574	2,2567	4,3558	$7{,}6864^{-3}$	1,2515
30	$5{,}6393^{-4}$	1,2788	2,6135	4,8680	$8{,}3435^{-3}$
31	2,9106	$7{,}0128^{-4}$	1,5175	2,9836	5,3829
32	1,4553	3,7255	$8{,}5359^{-4}$	1,7715	3,3643
33	$7{,}0561^{-5}$	1,9192	4,6559	1,0200	2,0390
34	3,3205	$9{,}5961^{-5}$	2,4649	$5{,}6998^{-4}$	1,1994
35	1,5179	4,6609	1,2677	3,0942	$6{,}8537^{-4}$
36	$6{,}7464^{-6}$	2,2010	$6{,}3383^{-5}$	1,6330	3,8076
37	2,9174	1,0113	3,0835	$8{,}3859^{-5}$	2,0582
38	1,2284	$4{,}5241^{-6}$	1,4606	4,1930	1,0833
39		1,9720	$6{,}7413^{-6}$	2,0427	$5{,}5551^{-5}$
40			3,0336	$9{,}7030^{-6}$	2,7776
41			1,3318	4,4965	1,3549
42				2,0341	$6{,}4520^{-6}$
43					3,0009
44					1,3641

Пример. Требуется определить вероятность того, что событие A появится 6 раз, если $\lambda = 7$.

Имеем:

$$P_7(6) = 1{,}4900^{-1} = 0{,}14900.$$

Примечание. В этой таблице показатель степени при числе, определяющем вероятность $P_\lambda(m)$, относится к множителю 10. Так, например, при $\lambda = 7$ и $m = 2$ вероятность $P_7(2) = 2{,}2341^{-2} = 2{,}2341 \cdot 10^{-2} = 0{,}022341$. Если у числа показатель степени отсутствует, то им будет показатель степени у ближайшего вышестоящего числа. Например, при $\lambda = 19$ и $m = 24$ вероятность

$$P_{19}(24) = 4{,}4237^{-2} = 0{,}044237.$$

Таблица II

Интегральные вероятности $P_\lambda(m \geqslant k) = \sum_{m=k}^{\infty} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$ **редкого события, следующего закону Пуассона, где** m **— число появлений события,** λ **— среднее число появлений события (см. 2.4.3)**

k	$\lambda = 0{,}1$	$\lambda = 0{,}2$	$\lambda = 0{,}3$	$\lambda = 0{,}4$	$\lambda = 0{,}5$
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1	$9{,}5163^{-2}$	$1{,}8127^{-1}$	$2{,}5918^{-1}$	$3{,}2968^{-1}$	$8{,}9347^{-1}$
2	$4{,}6788^{-3}$	$1{,}7523^{-2}$	$3{,}6936^{-2}$	$6{,}1552^{-2}$	$9{,}0204^{-2}$
3	$1{,}5465^{-4}$	$1{,}1485^{-3}$	$3{,}5995^{-3}$	$7{,}9263^{-3}$	1,4388
4	$3{,}8468^{-6}$	$5{,}6840^{-5}$	$2{,}6581^{-4}$	$7{,}7625^{-4}$	$1{,}7516^{-3}$
5		$2{,}2592^{-6}$	$1{,}5785^{-5}$	$6{,}1243^{-5}$	$1{,}7212^{-4}$
6				$4{,}0427^{-6}$	$1{,}4165^{-5}$
7					$1{,}0024^{-6}$

k	$\lambda = 0{,}6$	$\lambda = 0{,}7$	$\lambda = 0{,}8$	$\lambda = 0{,}9$	
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
1	$4{,}5119^{-1}$	$5{,}0341^{-1}$	$5{,}5067^{-1}$	$5{,}9343^{-1}$	
2	1,2190	1,5580	1,9121	2,2752	
3	$2{,}3115^{-2}$	$3{,}4142^{-2}$	$4{,}7423^{-2}$	$6{,}2857^{-2}$	
4	$3{,}3581^{-3}$	$5{,}7535^{-3}$	$9{,}0799^{-3}$	1,3459	
5	$3{,}9449^{-4}$	$7{,}8554^{-4}$	1,4113	$2{,}3441^{-3}$	
6	$3{,}8856^{-5}$	$9{,}0026^{-5}$	$1{,}8434^{-4}$	$3{,}4349^{-4}$	
7	$3{,}2931^{-6}$	$8{,}8836^{-6}$	$2{,}0747^{-5}$	$4{,}3401^{-5}$	
8			$2{,}0502^{-6}$	$4{,}8172^{-6}$	

k	$\lambda = 1$	$\lambda = 2$	$\lambda = 3$	$\lambda = 4$	$\lambda = 5$
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1	$6{,}3212^{-1}$	$8{,}6466^{-11}$	$9{,}5021^{-1}$	$9{,}8168^{-1}$	$9{,}9326^{-1}$
2	2,6424	5,9399	8,0085	9,0842	9,5957
3	$8{,}0301^{-2}$	3,2332	5,7681	7,6190	8,7535
4	1,8988	1,4288	3,5277	5,6653	7,3497
5	$3{,}6598^{-3}$	$5{,}2653^{-2}$	1,8474	3,7116	5,5951
6	$5{,}9418^{-4}$	1,6564	$8{,}3918^{-2}$	2,1487	3,8404
7	$8{,}3241^{-5}$	$4{,}5328^{-3}$	3,3509	1,1067	2,3782
8	1,0249	1,0967	1,1905	$5{,}1134^{-2}$	1,3337
9	$1{,}1252^{-6}$	$2{,}3745^{-4}$	$3{,}8030^{-3}$	2,1363	$6{,}8094^{-2}$
10		$4{,}6498^{-5}$	1,1025	$8{,}1322^{-3}$	3,1828
11		$8{,}3082^{-6}$	$2{,}9234^{-4}$	2,8398	1,3695
12		1,3646	$7{,}1387^{-5}$	$9{,}1523^{-4}$	$5{,}4531^{-3}$
13			1,6149	2,7372	2,0189
14			$3{,}4019^{-6}$	$7{,}6328^{-5}$	$6{,}9799^{-4}$
15				1,9932	2,2625
16				$4{,}8926^{-6}$	$6{,}9008^{-5}$
17				1,1328	1,9869
18					$5{,}4163^{-6}$
19					1,4017

k	$\lambda = 6$	$\lambda = 7$	$\lambda = 8$	$\lambda = 9$	$\lambda = 10$
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1	$9{,}9752^{-1}$	$9{,}9909^{-1}$	$9{,}9966^{-1}$	$9{,}9988^{-1}$	$9{,}9995^{-1}$
2	9,8265	9,9270	9,9698	9,9877	9,9950
3	9,3803	9,7036	9,8625	9,9377	9,9723
4	8,4880	9,1823	9,5762	9,7877	9,8966
5	7,1494	8,2701	9,0037	9,4504	9,7075
6	5,5432	6,9929	8,0876	8,8431	9,3291
7	3,9370	5,5029	6,8663	7,9322	8,6986
8	2,5602	4,0129	5,4704	6,7610	7,7978
9	1,5276	2,7091	4,0745	5,4435	6,6718

Продолжение

k	$\lambda = 6$	$\lambda = 7$	$\lambda = 8$	$\lambda = 9$	$\lambda = 10$
10	$8{,}3924^{-2}$	$1{,}6950^{-1}$	$2{,}8338^{-1}$	$4{,}1259^{-1}$	$5{,}4207^{-1}$
11	4,2621	$9{,}8521^{-2}$	1,8411	2,9401	4,1696
12	2,0092	5,3350	1,1192	1,9699	3,0322
13	$8{,}8275^{-3}$	2,7000	$6{,}3797^{-2}$	1,2423	2,0844
14	3,6285	1,2811	3,4181	$7{,}3851^{-2}$	1,3554
15	1,4004	$5{,}7172^{-3}$	1,7257	4,1466	$8{,}3458^{-2}$
16	$5{,}0910^{-4}$	2,4066	$8{,}2310^{-3}$	2,2036	4,8740
17	1,7488	$9{,}5818^{-4}$	3,7180	1,1106	2,7042
18	$5{,}6917^{-5}$	3,6178	1,5943	$5{,}3196^{-3}$	1,4278
19	1,7597	1,2985	$6{,}5037^{-4}$	2,4264	$7{,}1865^{-3}$
20	$5{,}1802^{-6}$	$4{,}4402^{-5}$	2,5294	1,0560	3,4543
21	1,4551	1,4495	$9{,}3968^{-5}$	$4{,}3925^{-4}$	1,5883
22		$4{,}5263^{-6}$	3,3407	1,7495	$6{,}9965^{-4}$
23		1,3543	1,1385	$6{,}6828^{-5}$	2,9574
24			$3{,}7255^{-6}$	2,4519	1,2012
25			1,1722	$8{,}6531^{-6}$	$4{,}6949^{-5}$
26				2,9414	1,7680
27					$6{,}4229^{-6}$
28					2,2535

k	$\lambda = 11$	$\lambda = 12$	$\lambda = 13$	$\lambda = 14$	$\lambda = 15$
0	1,0000	1,0000			
1	$9{,}9998^{-1}$	$9{,}9999^{-1}$	1,0000	1,0000	
2	9,9980	9,9992	$9{,}9997^{-1}$	$9{,}9999^{-1}$	1,0000
3	9,9879	9,9948	9,9978	9,9991	$9{,}9996^{-1}$
4	9,9508	9,9771	9,9895	9,9953	9,9979
5	9,8490	9,9240	9,9626	9,9819	9,9914
6	9,6248	9,7966	9,8927	9,9447	9,9721
7	9,2139	9,5418	9,7411	9,8577	9,9237
8	8,5681	9,1050	9,4597	9,6838	9,8200
9	7,6801	8,4497	9,0024	9,3794	9,6255
10	6,5949	7,5761	8,3419	8,9060	9,3015
11	5,4011	6,5277	7,4832	8,2432	8,8154
12	4,2073	5,3840	6,4684	7,3996	8,1525
13	3,1130	4,2403	5,3690	6,4154	7,3239
14	2,1871	3,1846	4,2696	5,3555	6,3678
15	1,4596	2,2798	3,2487	4,2956	5,3435
16	$9{,}2604^{-2}$	1,5558	2,3639	3,3064	4,3191
17	5,5924	1,0129	1,6451	2,4408	3,3588
18	3,2191	$6{,}2966^{-2}$	1,0954	1,7280	2,5114
19	1,7687	3,7416	$6{,}9833^{-2}$	1,1736	1,8053
20	$9{,}2895^{-3}$	2,1280	4,2669	$7{,}6505^{-2}$	1,2478
21	4,6711	1,1598	2,5012	4,7908	$8{,}2972^{-3}$
22	2,2519	$6{,}0651^{-3}$	1,4081	2,8844	5,3106
23	1,0423	3,0474	$7{,}6225^{-3}$	1,6712	3,2744
24	$4{,}6386^{-4}$	1,4729	3,9718	$9{,}3276^{-3}$	1,9465
25	1,9871	$6{,}8563^{-4}$	1,9943	5,0199	1,1165
26	$8{,}2050^{-5}$	3,0776	$9{,}6603^{-4}$	2,6076	$6{,}1849^{-3}$
27	3,2693	1,3335	4,5190	1,3087	3,3119
28	1,2584	$5{,}5836^{-5}$	2,0435	$6{,}3513^{-4}$	1,7158
29	$4{,}6847^{-6}$	2,2616	$8{,}9416^{-5}$	2,9837	$8{,}6072^{-4}$
30	1,6882	$8{,}8701^{-6}$	3,7894	1,3580	4,1845
31		3,3716	1,5568	$5{,}9928^{-5}$	1,9731
32		1,2432	$6{,}2052^{-6}$	2,5665	$9{,}0312^{-5}$
33			2,4017	1,0675	4,0155
34				$4{,}3154^{-6}$	1,7356
35				1,6968	$7{,}2978^{-6}$
36					2,9871
37					1,1910

Продолжение

k	$\lambda = 16$	$\lambda = 17$	$\lambda = 18$	$\lambda = 19$	$\lambda = 20$
0					
1					
2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
3	$9{,}9998^{-1}$	$9{,}9999^{-1}$	$9{,}9998^{-1}$	$9{,}9999^{-1}$	1,0000
4	9,9991	9,9996	9,9992	9,9996	$9{,}9998^{-1}$
5	9,9960	9,9982	9,9968	9,9985	9,9993
6	9,9862	9,9933	9,9896	9,9948	9,9974
7	9,9599	9,9794	9,9711	9,9849	9,9922
8	9,9000	9,9457	9,9294	9,9613	9,9791
9	9,7801	9,8740	9,8462	9,9114	9,9500
10	9,5670	9,7388	9,6963	9,8168	9,8919
11	9,2260	9,5088	9,4511	9,6533	9,7861
12	8,7301	9,1533	9,0833	9,3944	9,6099
13	8,0688	8,6498	8,5740	9,0160	9,3387
14	7,2545	7,9913	7,9192	8,5025	8,9514
15	6,3247	7,1917	7,1335	7,8521	8,4349
16	5,3320	6,2855	6,2495	7,0797	7,7893
17	4,3404	5,3226	5,3135	6,2164	7,0297
18	3,4066	4,3598	4,3776	5,3052	6,1858
19	2,5765	3,4504	3,4908	4,3939	5,2974
20	1,8775	2,6368	2,6928	3,5283	4,4091
21	1,3183	1,9452	2,0088	2,7450	3,5630
22	$8{,}9227^{-2}$	1,3853	1,4491	2,0687	2,7939
23	5,8241	$9{,}5272^{-2}$	1,0111	1,5098	2,1251
24	3,6686	6,3296	$6{,}8260^{-2}$	1,0675	1,5677
25	2,2315	4,0646	4,4608	$7{,}3126^{-2}$	1,1218
26	1,3119	2,5245	2,8234	4,8557	$7{,}7887^{-2}$
27	$7{,}4589^{-3}$	1,5174	1,7318	3,1268	5,2481
28	4,1051	$8{,}8335^{-3}$	1,0300	1,9536	3,4334
29	2,1886	4,9838	$5{,}9443^{-3}$	1,1850	2,1818
30	1,1312	2,7272	3,3308	$6{,}9819^{-3}$	1,3475
31	$5{,}6726^{-4}$	1,4484	1,8133	3,9982	$8{,}0918^{-3}$
32	2,7620	$7{,}4708^{-4}$	$9{,}5975^{-4}$	2,2267	4,7274
33	1,3067	3,7453	4,9416	1,2067	2,6884
34	$6{,}0108^{-5}$	1,8260	2,4767	$6{,}3674^{-4}$	1,4890
35	2,6903	$8{,}6644^{-5}$	1,2090	3,2732	$8{,}0366^{-4}$
36	1,1724	4,0035	$5{,}7519^{-5}$	1,6401	4,2290
37	$4{,}9772^{-6}$	1,8025	2,6684	$8{,}0154^{-5}$	2,1708
38	2,0599	$7{,}9123^{-6}$	1,2078	3,8224	1,0875
39		3,3882	$5{,}3365^{-6}$	1,7797	$5{,}3202^{-5}$
40		1,4162	2,3030	$8{,}0940^{-6}$	2,5426
41				3,5975	1,1877
42				1,5634	$5{,}4252^{-6}$
43					2,4243
44					1,0603
45					

Пример. Требуется определить вероятность того, что событие A появится не менее трех раз, если $\lambda = 7$.

Имеем:

$$\mathbf{P}_7 (m \geqslant 3) = 9{,}7036^{-1} = 0{,}97036.$$

Примечание. В этой таблице показатель степени при числе, определяющем вероятность $\mathbf{P}_\lambda (m \geqslant k)$, относится к множителю 10. Так, например, при $\lambda = 0{,}2$ и $k = 2$ вероятность $\mathbf{P}_{0,2} (m \geqslant 2) = 1{,}7523^{-2} = 1{,}7523 \cdot 10^{-2} = 0{,}017523$. Если у числа показатель степени отсутствует, то им будет показатель степени ближайшего вышестоящего числа. Например, при $\lambda = 20$ и $k = 17$ вероятность $\mathbf{P}_{20} (m \geqslant 17) = 7{,}7893^{-1} = 0{,}77893$.

Таблица III

Плотность вероятности $n(z; 0, 1) = N'(z; 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$ нормированного нормального распределения (см. 4.3.1)

z	Сотые доли для z									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	3989^{-4}	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970^{-4}	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910^{-4}	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814^{-4}	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683^{-4}	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521^{-4}	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332^{-4}	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123^{-4}	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897^{-4}	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661^{-4}	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420^{-4}	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179^{-4}	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942^{-4}	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714^{-4}	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497^{-4}	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295^{-4}	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109^{-4}	1092	1074	1057	1040	1023	1006	9893^{-5}	9728	9566
1,7	9405^{-5}	9246	9089	8933	8780	8628	8478	8329	8183	8038
1,8	7895^{-5}	7754	7614	7477	7341	7206	7074	6943	6814	6687
1,9	6562^{-5}	6438	6316	6195	6077	5959	5844	5730	5618	5508
2,0	5399^{-5}	5292	5186	5082	4980	4879	4780	4682	4586	4491
2,1	4398^{-5}	4307	4217	4128	4041	3955	3871	3788	3706	3626
2,2	3547^{-5}	3470	3394	3319	3246	3174	3103	3034	2965	2898
2,3	2883^{-5}	2768	2705	2643	2582	2522	2463	2406	2349	2294
2,4	2239^{-5}	2186	2134	2083	2033	1984	1936	1888	1842	1797
2,5	1753^{-5}	1709	1667	1625	1585	1545	1506	1468	1431	1394
2,6	1358^{-5}	1323	1289^{-6}	1256	1223	1191	1160	1130	1100	1071
2,7	1042^{-5}	1014	9871	9606	9347	9094	8846	8605	8370	8140
2,8	7915^{-6}	7697	7483	7274	7071	6873	6679	6491	6307	6127
2,9	5953^{-6}	5782	5616	5454	5296	5143	4993	4847	4705	4567
3,0	4432^{-6}	4301	4173	4049	3928	3810	3695	3584	3475	3370
3,1	3267^{-6}	3167	3070	2975	2884	2794	2707	2623	2541	2461
3,2	2384^{-6}	2309	2236	2165	2096	2029	1964	1901	1840	1780
3,3	1723^{-6}	1667	1612	1560	1508	1459	1411	1364^{-7}	1319	1275
3,4	1232^{-6}	1191	1151	1112	1075	1038	1003	9689	9358	9037
3,5	8727^{-7}	8426	8135	7853	7581	7317	7061	6814	6575	6343
3,6	6119^{-7}	5902	5693	5490	5294	5105	4921	4744	4573	4408
3,7	4248^{-7}	4093	3944	3800	3661	3526	3396	3271	3149	3032
3,8	2919^{-7}	2810	2705	2604	2506	2411	2320	2232	2147	2065
3,9	1987^{-7}	1910	1837	1766	1698	1633	1569	1508	1449	1393
4,0	1338^{-7}	1286	1235	1186	1140	1094	1051	1009	9687^{-8}	9299
4,1	8926^{-8}	8567	8222	7890	7570	7263	6967	6683	6410	6147
4,2	5894^{-8}	5652	5418	5194	4979	4772	4573	4382	4199	4023
4,3	3854^{-8}	3691	3535	3386	3242	3104	2972	2845	2723	2606
4,4	2494^{-8}	2387	2284	2185	2090	1999	1912	1829	1749	1672

Продолжение

z	Сотые доли для z									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4,5	1598^{-8}	1528^{-8}	1461	1396	1334	1275	1218	1164	1112	1062
4,6	1014^{-8}	9684^{-9}	9248	8830	8430	8047	7681	7331	6996	6676
4,7	6370^{-9}	6077	5797	5530	5274	5030	4796	4573	4360	4156
4,8	3961^{-9}	3775	3598	3428	3267	3112	2965	2824	2690	2561
4,9	2439^{-9}	2322	2211	2105	2003	1907	1814	1727	1643	1563

Пример. Требуется определить ординату нормальной кривой распределения в точке $z = 1{,}85$.

Имеем:

$$n(1{,}85;\ 0,\ 1) = 7206^{-2} = 0{,}07206.$$

Примечание. В этой таблице показатель степени при числе, определяющем плотность вероятности $n(z;\ 0,\ 1)$, относится к множителю 10. Например, при $z = 0{,}9$ плотность вероятности $n(0{,}9;\ 0,\ 1) = 2661^{-4} = 0{,}2661$. Если у числа показатель степени отсутствует, то им будет показатель степени у ближайшего слева числа, имеющего этот показатель. Например, при $z = 2{,}78$ имеем: $n(2{,}78;\ 0,\ 1) = 8370^{-6} = 0{,}008370$.

Таблица IV

Нормированная функция Лапласа $\Phi(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^z e^{-\frac{v^2}{2}}\, dv$ **(см. 4.3.3)**

z	Сотые доли для z									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
00	0,0 000	040	080	120	160	199	239	279	319	359
0,1	398	438	478	517	557	596	636	675	714	753
0,2	793	832	871	910	948	987	·026	·064	·103	·141
0,3	0,1 179	217	255	293	331	368	406	443	480	517
0,4	554	591	628	664	700	736	772	808	844	879
0,5	915	950	985	·019	·054	·088	·123	·157	·190	·224
0,6	0,2 257	291	324	357	389	422	454	486	517	549
0,7	580	611	642	673	703	734	764	794	823	852
0,8	881	910	939	967	995	·023	·051	·078	·106	·133
0,9	0,3 159	186	212	238	264	289	315	340	365	389
1,0	413	437	461	485	508	531	554	577	599	621
1,1	643	665	686	708	729	749	770	790	810	830
1,2	849	869	888	907	925	944	962	980	997	·015
1,3	0,4 032	049	066	082	099	115	131	147	162	177
1,4	192	207	222	236	251	265	279	292	306	319
1,5	332	345	357	370	382	394	406	418	429	441
1,6	452	463	474	484	495	505	515	525	535	545
1,7	554	564	573	582	591	599	608	616	625	633
1,8	641	649	656	664	671	678	686	693	699	706
1,9	713	719	726	732	738	744	750	756	761	767
2,0	772	778	783	788	793	798	803	808	812	817
2,1	821	826	830	834	838	842	846	850	854	857
2,2	860	864	867	871	874	877	880	883	886	889
	996	474	906	263	545	755	894	962	962	893
2,3	892	895	898	900	903	906	908	911	913	915
	759	559	296	969	581	133	625	060	437	758
2,4	918	920	922	924	926	928	930	932	934	936
	025	237	397	506	564	572	531	493	309	128

Продолжение

z	Сотые доли для z									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,5	0,4 937	939	941	942	944	946	947	949	950	952
	903	634	323	969	574	139	664	151	600	012
2,6	953	954	956	957	958	959	960	962	963	964
	388	729	035	308	547	754	930	074	189	274
2,7	965	966	967	968	969	970	971	971	972	973
	330	358	359	333	280	202	099	972	821	646
2,8	974	975	975	976	977	978	978	979	980	980
	449	229	988	726	443	140	818	476	116	738
2,9	981	981	982	983	983	984	984	985	985	986
	342	920	498	052	589	111	618	110	588	051
3,0	986	986	987	987	988	988	988	989	989	989
	501	938	361	772	171	558	933	297	650	992
3,1	990	990	990	991	991	991	992	992	992	992
	324	646	957	260	553	836	112	378	636	886
3,2	993	993	993	993	994	994	994	994	994	994
	129	363	590	810	024	230	429	623	810	991
3,3	995	995	995	995	995	995	996	996	996	996
	166	335	499	658	811	959	103	242	376	505
3,4	996	996	996	996	997	997	997	997	997	997
	631	752	869	982	091	197	299	398	493	585
3,5	997	997	997	997	997	998	998	998	998	998
	674	759	842	922	999	074	146	215	282	347
3,6	998	998	998	998	998	998	998	998	998	998
	409	469	527	583	637	689	739	787	834	879
3,7	998	998	999	999	999	999	999	999	999	999
	922	964	004	043	080	116	150	184	216	247
3,8	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999
	274	305	333	359	385	409	433	456	478	499
3,9	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999
	519	539	557	575	593	609	625	641	655	670
4,0	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999
	683	696	709	721	733	744	755	765	775	784
4,1	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999
	793	802	811	819	826	834	841	848	854	861
4,2	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999
	867	872	878	883	888	893	898	902	907	911
4,3	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999
	915	918	922	925	929	932	935	938	941	943
4,4	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999
	946	948	951	953	955	957	959	961	963	964
4,5	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999
	966	968	969	971	972	973	974	976	977	978
5,0	999									
	997									

Пример. Требуется определить вероятность того, что нормально распределенная нормированная величина z примет значение в интервале от 0 до 3,28.

Имеем:

$$P(0 < z < 3{,}28) = \Phi(3{,}28) = 0{,}4994810.$$

Примечание. В таблице записаны лишь три последних десятичных знака из четырех; первый из них написан в графе «0» данной строки или выше данной. Если перед последними тремя десятичными знаками стоит точка, то это означает, что первый десятичный знак надо смотреть в графе «0» следующей строки. Например, при $z = 0{,}53$ имеем: $\Phi(z) = 0{,}2019$ (а не 0,1019).

Значения функции $\Phi(z)$ приведены в таблице с четырьмя десятичными знаками. Кроме того, для значений $2{,}2 \leqslant z \leqslant 5{,}0$ под основными цифрами даются мелким шрифтом еще три десятичных знака. Так, например, при $z = 3{,}51$ находим $\Phi(z) = 0{,}4997$, т. е. $\Phi(z) = 0{,}4997759$.

Таблица V

Удвоенная нормированная функция Лапласа

$$2\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{v^2}{2}}\, dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z}^{z} e^{-\frac{v^2}{2}}\, dv \quad \text{(см. 4.3.3)}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0 0000	0798	1596	2393	3191	3988	4784	5581	6376	7171
0,1	7966	8759	9552	·0343	·1134	·1924	·2712	·3499	·4285	·5069
0,2	0,1 5852	6633	7413	8191	8967	9741	·0514	·1284	·2052	·2818
0,3	0,2 3582	4344	5103	5860	6614	7366	8115	8862	9605	·0346
0,4	0,3 1084	1819	2552	3280	4006	4729	5448	6164	6877	7587
0,5	8292	8995	9694	·0389	·1080	·1768	·2452	·3132	·3809	·4481
0,6	0,4 5149	5814	6474	7131	7783	8431	9075	9714	·0350	·0981
0,7	0,5 1607	2230	2848	3461	4070	4675	5275	5870	6161	7047
0,8	7629	8206	8778	9346	9909	·0468	·1021	·1570	·2114	·2653
0,9	0,6 3188	3718	4243	4763	5278	5789	6294	6795	7291	7783
1,0	8269	8750	9227	9699	·0166	·0628	·1086	·1538	·1986	·2429
1,1	0,7 2867	3300	3729	4152	4571	4986	5395	5800	6200	6595
1,2	6986	7372	7754	8130	8502	8870	9233	9592	9945	·0295
1,3	0,8 0640	0980	1316	1648	1975	2298	2617	2931	3241	3547
1,4	3849	4146	4439	4728	5013	5294	5571	5844	6113	6378
1,5	6639	6696	7149	7398	7644	7886	8124	8358	8589	8817
1,6	9040	9260	9477	9690	9899	·0106	·0309	·0508	·0704	·0897
1,7	0,9 1087	1273	1457	1637	1814	1988	2159	2327	2492	2655
1,8	2814	2970	3124	3275	3423	3569	3711	3852	3989	4124
1,9	4257	4387	4514	4639	4762	4882	5000	5116	5230	5341
2,0	5450	5557	5662	5764	5865	5964	6060	6155	6247	6338
2,1	6427	6514	6599	6683	6765	6844	6923	6999	7074	7148
2,2	7219	7289	7358	7425	7491	7555	7618	7679	7739	7798
2,3	7855	7911	7966	8019	8072	8123	8172	8221	8269	8315
2,4	8360	8405	8448	8490	8531	8571	8611	8649	8686	8723
2,5	8758	8793	8826	8859	8891	8923	8953	8983	9012	9040
2,6	9068	9095	9121	9146	9171	9195	9219	9241	9263	9285
2,7	9307	9327	9347	9367	9386	9404	9422	9439	9456	9473
2,8	9489	9505	9520	9535	9549	9563	9576	9590	9602	9615
2,9	9627	9639	9650	9661	9672	9682	9692	9702	9712	9721
3,0	9730	9739	9747	9755	9763	9771	9779	9786	9793	9800
3,1	9806	9813	9819	9825	9831	9837	9842	9848	9853	9858
3,2	9863	9867	9872	9876	9880	9885	9889	9892	9896	9900
3,3	9903	9907	9910	9913	9916	9919	9922	9925	9928	9930
3,4	9933	9935	9937	9940	9942	9944	9946	9948	9950	9952
3,5	9953	9955	9957	9958	9960	9961	9963	9964	9966	9967
3,6	9968	9969	9971	9972	9973	9974	9975	9976	9977	9978
3,7	9978	9979	9980	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985
3,8	9986	9986	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9990	9990
3,9	9990	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993	9993

Пример. Требуется определить вероятность того, что нормально распределенная нормированная величина z примет значение в интервале от $-3{,}28$ до $+3{,}28$. Имеем $\mathbf{P}(-3{,}28 < Z < +3{,}28) = 2\Phi(3{,}28) = 0{,}99896$.

Примечание. В графе без номера приведены значения z через 0,1; соответствующие сотые доли записаны в первой строке. Значения $2\Phi(z)$ даются с пятью знаками после запятой, причем в соответствующей графе записаны лишь четыре последние из них, а первый находится в графе с номером 0 в данной же строке или выше ее. Так, например, при $z = 0{,}82$ находим $2\Phi(0{,}82) = 0{,}58778$. Если же перед четырьмя цифрами стоит точка, то это означает, что первую цифру надо взять из графы с номером 0 одной строчкой ниже. Например, для $z = 0{,}87$ имеем $2\Phi(0{,}87) = 0{,}61570$.

Таблица VI

Вероятность $Q_z = \mathrm{P}(|X-a|>z_q\sigma) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-z_q}^{z_q} e^{-\frac{v^2}{2}}\,dv$ **того, что нормально распределенная случайная величина** X **отклонится от центра** a **ее распределения больше, чем на взятое** z_q **раз ее среднее квадратическое отклонение** σ **(см. 4.3.3)**

z_q	Q_z	Δ	z_q	Q_z	Δ	z_q	Q_z
0,0	1,0000	797	3,0	0,0027	8	6	$2\cdot10^{-9}$
0,1	0,9203	788	3,1	0019	5	7	$3\cdot10^{-12}$
0,2	8415	773	3,2	0014	4	8	$1\cdot10^{-15}$
0,3	7642	750	3,3	0010		9	$2\cdot10^{-19}$
0,4	6892	721	3,4	00067		10	$27\cdot10^{-23}$
0,5	6171	686	3,5	00047		15	$1\cdot10^{-50}$
0,6	5485	646	3,6	00032		20	$5\cdot10^{-89}$
0,7	4839	602	3,7	00022		25	$6\cdot10^{-138}$
0,8	4237	556	3,8	00014		30	$1\cdot10^{-197}$
0,9	3681	508	3,9	00010			
1,0	0,3173	460	4,0	0,000063			
1,1	2713	412	4,1	000041			
1,2	2301	365	4,2	000027			
1,3	1936	321	4,3	000017			
1,4	1615	279	4,4	0000108			
1,5	1336	240	4,5	0000068			
1,6	1096	205	4,6	0000042			
1,7	0891	172	4,7	0000026			
1,8	0719	145	4,8	0000016			
1,9	0574	119	4,9	00000096			
2,0	0,0455	98	5,0	0,00000057			
2,1	.0357	79	5,1	00000034			
2,2	0278	64	5,2	00000020			
2,3	0214	50	5,3	00000012			
2,4	0164	40	5,4	00000007			
2,5	0124	31	5,5	00000004			
2,6	0093	24	5,6	00000002			
2,7	0069	18					
2,8	0051	14					
2,9	0037	10					

Пример. Требуется определить вероятность того, что нормально распределенная величина X отклонится от центра a ее распределения больше, чем на $2{,}7\sigma$ (σ — параметр распределения величины X).

Имеем: $\mathrm{P}(|X-a|>2{,}7\sigma) = 0{,}0069 = 0{,}69\%$.

Примечание. В графе Δ проставлена разность между данным значением и следующим значением. Так, например, при $z_q = 2{,}8$ имеем: $\Delta = 0{,}0051 - 0{,}0037 = 14\cdot10^{-4}$.

Таблица VII

q-процентные значения нормального отклонения z_q и вероятности

$$q = 100\,\mathrm{P}(|X-a|>z_q\sigma) = 100\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-z_q}^{+z_q} e^{-\frac{v^2}{2}}dv\right)$$

нормального распределения (см. 4.3.3)

z_q как функция от q		q как функция от z_q	
$q = 100\,Q$	z_q	z_q	$q = 100\,Q$
100	0,0000	0,0	100,000
95	0,0627	0,2	84,148
90	0,1257	0,4	68,916
85	0,1891	0,6	54,851
80	0,2533	0,8	42,371
75	0,3186	1,0	31,731
70	0,3853	1,2	23,014
65	0,4538	1,4	16,151
60	0,5244	1,6	10,960
55	0,5978	1,8	7,186
50	0,6745	2,0	4,550
45	0,7554	2,2	2,781
40	0,8416	2,4	1,640
35	0,9346	2,6	0,932
30	1,0364	2,8	0,511
25	1,1503	3,0	0,270
20	1,2816	3,2	0,137
15	1,4395	3,4	0,067
10	1,6449	3,6	0,032
5	1,9600	3,8	0,014
1	2,5758	4,0	0,006
0,27	3,0000		
0,1	3,2905		
0,01	3,8906		

Примеры: 1. Требуется определить отклонение нормально распределенной нормированной величины Z, вероятность превышения которого равна 15%, или 0,15.

Имеем:

$$z_{15} = 1{,}4395.$$

2. Требуется определить вероятность того, что нормально распределенная нормированная величина Z отклонится от центра, равного 0, больше чем на 1,4.

Имеем:

$$\mathrm{P}(|Z|>1{,}4) = \frac{16{,}151}{100} = 0{,}16151.$$

Таблица VIII

Значения χ_q^2 в зависимости от вероятности

$$\mathrm{P}(\chi^2>\chi_q^2) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\cdot 2^{\frac{k}{2}}}\int_{\chi_q^2}^{\infty}(x)^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}dx$$

и числа k степеней свободы χ^2-распределения (см. 4.5.4)

Число степеней свободы k	Вероятность $\mathrm{P}(\chi^2>\chi_q^2)$							
	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30
1	0,00016	0,0006	0,0039	0,016	0,064	0,148	0,455	1,07
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,41
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,66
4	0,30	0,43	0,71	1,06	1,65	2,19	3,36	4,9

Продолжение

Число степеней свободы k	Вероятность $P(\chi^2 > \chi_q^2)$							
	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30
5	0,55	0,75	1,14	1,61	2,34	3,00	4,35	6,1
6	0,87	1,13	1,63	2,20	3,07	3,83	5,35	7,2
7	1,24	1,56	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,4
8	1,65	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,5
9	2,09	2,53	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34	10,7
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34	11,8
11	3,1	3,6	4,6	5,6	7,0	8,1	10,3	12,9
12	3,6	4,2	5,2	6,3	7,8	9,0	11,3	14,0
13	4,1	4,8	5,9	7,0	8,6	9,9	12,3	15,1
14	4,7	5,4	6,6	7,8	9,5	10,8	13,3	16,2
15	5,2	6,0	7,3	8,5	10,3	11,7	14,3	17,3
16	5,8	6,6	8,0	9,3	11,2	12,6	15,3	18,4
17	6,4	7,3	8,7	10,1	12,0	13,5	16,3	19,5
18	7,0	7,9	9,4	10,9	12,9	14,4	17,3	20,6
19	7,6	8,6	10,1	11,7	13,7	15,4	18,3	21,7
20	8,3	9,2	10,9	12,4	14,6	16,3	19,3	22,8
21	8,9	9,9	11,6	13,2	15,4	17,2	20,3	23,9
22	9,5	10,6	12,3	14,0	16,3	18,1	21,3	24,9
23	10,2	11,3	13,1	14,8	17,2	19,0	22,3	26,0
24	10,9	12,0	13,8	15,7	18,1	19,9	23,3	27,1
25	11,5	12,7	14,6	16,5	18,9	20,9	24,3	28,2
26	12,2	13,4	15,4	17,3	19,8	21,8	25,3	29,3
27	12,9	14,1	16,2	18,1	20,7	22,7	26,3	30,3
28	13,6	14,8	16,9	18,9	21,6	23,6	27,3	31,4
29	14,3	15,6	17,7	19,8	22,5	24,6	28,3	32,5
30	15,0	16,3	18,5	20,6	23,4	25,5	29,3	33,5

Число степеней свободы k	Вероятность $P(\chi^2 > \chi_q^2)$							
	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
1	1,64	2,7	3,8	5,4	6,6	7,9	9,5	10,83
2	3,22	4,6	6,0	7,8	9,2	11,6	12,4	13,8
3	4,64	6,3	7,8	9,8	11,3	12,8	14,8	16,3
4	6,0	7,8	9,5	11,7	13,3	14,9	16,9	18,5
5	7,3	9,2	11,1	13,4	15,1	16,3	18,9	20,5
6	8,6	10,6	12,6	15,0	16,8	18,6	20,7	22,5
7	9,8	12,0	14,1	16,6	18,5	20,3	22,6	24,3
8	11,0	13,4	15,5	18,2	20,1	21,9	24,3	26,1
9	12,2	14,7	16,9	19,7	21,7	23,6	26,1	27,9
10	13,4	16,0	18,3	21,2	23,2	25,2	27,7	29,6
11	14,6	17,3	19,7	22,6	24,7	26,8	29,4	31,3
12	15,8	18,5	21,0	24,1	26,2	28,3	31	32,9
13	17,0	19,8	22,4	25,5	27,7	29,8	32,5	34,5
14	18,2	21,1	23,7	26,9	29,1	31	34	36,1
15	19,3	22,3	25,0	28,3	30,6	32,5	35,5	37,7
16	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	34	37	39,2
17	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	35,5	38,5	40,8
18	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	37	40	42,3
19	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	38,5	41,5	43,8
20	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	40	43	45,3
21	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9	41,5	44,5	46,8
22	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3	42,5	46	48,3
23	28,4	32,0	35,2	39,0	41,6	44,0	47,5	49,7
24	29,6	33,2	36,4	40,3	43,0	45,5	48,5	51,2
25	30,7	34,4	37,7	41,6	44,3	47	50	52,6

Продолжение

Число степеней свободы k	Вероятность $P(\chi^2 > \chi_q^2)$							
	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
26	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	48	51,5	54,1
27	32,9	36,7	40,1	44,1	47,0	49,5	53	55,5
28	34,0	37,9	41,3	45,4	48,3	51	54,5	56,9
29	35,1	39,1	42,6	46,7	49,6	52,5	56	58,3
30	36,3	40,3	43,8	48,0	50,9	54	57,5	59,7

Пример. Требуется для случайной величины, следующей закону χ^2, с числом степеней свободы, равным 7, определить такое отклонение, вероятность превышения которого равна 0,05.

Имеем: $\chi_q^2 = 14{,}1$.

Таблица IX

Вероятность $P(\chi^2 > \chi_q^2) = \dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) 2^{\frac{k}{2}}} \int\limits_{\chi_q^2}^{\infty} (x)^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}\, dx$ **в зависимости от значений** χ_q^2 **и числа** k **степеней свободы** χ^2**-распределения (см. 4.5.4)**

χ_q^2 \ k	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,3173	0,6065	0,8013	0,9098	0,9626	0,9856	0,9948	0,9982
2	1574	3679	5724	7358	8491	9197	9598	9810
3	0833	2231	3916	5578	7000	8088	8850	9344
4	0455	1353	2615	4060	5494	6767	7798	8571
5	0254	0821	1718	2873	4159	5438	6600	7576
6	0143	0498	1116	1991	3062	4232	5398	6472
7	0081	0302	0719	1359	2206	3208	4289	5366
8	0047	0183	0460	0916	1562	2381	3326	4335
9	0027	0111	0293	0611	1091	1736	2527	3423
10	0016	0067	0186	0404	0752	1247	1886	2650
11	0009	0041	0117	0266	0514	0884	1386	2017
12	0005	0025	0074	0174	0348	0620	1006	1512
13	0003	0015	0046	0113	0234	0430	0721	1119
14	0002	0009	0029	0073	0146	0296	0512	0818
15	0001	0006	0018	0047	0104	0203	0360	0591
16	0001	0003	0011	0030	0068	0138	0251	0424
17	0000	0002	0007	0019	0045	0093	0174	0301
18		0001	0004	0012	0029	0062	0120	0212
19		0001	0003	0008	0019	0042	0082	0149
20		0000	0002	0005	0013	0028	0056	0103
21		0000	0001	0003	0008	0018	0038	0071
22		0000	0001	0002	0005	0012	0025	0049
23		0000	0000	0001	0003	0008	0017	0034
24		0000	0000	0001	0002	0005	0011	0023
25		0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0003	0,0008	0,0016
26		0000	0000	0000	0001	0002	0005	0010
27		0000	0000	0000	0001	0001	0003	0007
28		0000	0000	0000	0000	0001	0002	0005
29		0000	0000	0000	0000	0001	0001	0003
30		0000	0000	0000	0000	0000	0001	0002

Продолжение

χ_q^2 \ k	9	10	11	12	13	14	15
1	0,9994	0,9998	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	9915	9963	9985	0,9994	0,9998	0,9999	1,0000
3	9643	9814	9907	9955	9979	9991	9996
4	9114	9473	9699	9834	9912	9955	9977
5	8343	8912	9312	9580	9752	9858	9921
6	7399	8153	8734	9161	9462	9665	9797
7	6371	7254	7991	8576	9022	9347	9576
8	5341	6288	7133	7851	8436	8893	9238
9	4373	5321	6219	7029	7729	8311	8775
10	3505	4405	5304	6160	6939	7622	8197
11	2757	3575	4433	5289	6108	6860	7526
12	2133	2851	3626	4457	5276	6063	6790
13	1626	2237	2933	3690	4478	5265	6023
14	1223	1730	2330	3007	3738	4497	5255
15	0909	1321	1825	2414	3074	3782	4514
16	0669	0996	1411	1912	2491	3134	3821
17	0487	0744	1079	1496	1993	2562	3189
18	0352	0550	0816	1157	1575	2068	2627
19	0252	0403	0611	0885	1231	1649	2137
20	0179	0293	0453	0671	0952	1301	1719
21	0126	0211	0334	0504	0729	1016	1368
22	0089	0151	0244	0375	0554	0786	1078
23	0062	0107	0177	0277	0417	0603	0841
24	0043	0076	0127	0203	0311	0458	0651
25	0030	0053	0091	0148	0231	0346	0499
26	0020	0037	0065	0107	0170	0259	0380
27	0014	0026	0046	0077	0124	0193	0287
28	0010	0018	0032	0055	0090	0142	0216
29	0006	0012	0023	0039	0065	0104	0161
30	0004	0009	0016	0028	0047	0076	0119

χ_q^2 \ k	16	17	18	19	20	21	22
1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0,9998	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	9989	9995	0,9998	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000
5	9958	9978	9989	9994	0,9997	0,9999	0,9999
6	9881	9932	9962	9979	9989	9994	9997
7	9783	9835	9901	9942	9967	9981	9990
8	9489	9665	9786	9867	9919	9951	9972
9	9134	9403	9597	9735	9829	9892	9933
10	8666	9036	9319	9539	9682	9789	9863
11	8095	8566	8944	9238	9462	9628	9747
12	7440	8001	8472	8856	9161	9396	9574
13	6728	7362	7916	8386	8774	9086	9332
14	5987	6671	7291	7837	8305	8696	9015
15	5246	5955	6620	7226	7764	8230	8622
16	4530	5238	5925	6573	7166	7696	8159
17	3856	4544	5231	5899	6530	7111	7634

Продолжение

k / χ_q^2	16	17	18	19	20	21	22
18	3239	3888	4557	5224	5874	6490	7060
19	2687	3285	3918	4568	5218	5851	6453
20	2202	2742	3328	3946	4579	5213	5830
21	1785	2263	2794	3368	3971	4589	5207
22	1432	1847	2320	2843	3405	3995	4599
23	1137	1493	1906	2373	2888	3440	4017
24	0895	1194	1550	1962	2424	2931	3472
25	0698	0947	1249	1605	2014	2472	2971
26	0540	0745	0998	1302	1658	2064	2517
27	0415	0581	0790	1047	1353	1709	2112
28	0316	0449	0621	0834	1094	1402	1757
29	0239	0345	0484	0660	0878	1140	1449
30	0180	0263	0374	0518	0699	0920	1185

k / χ_q^2	23	24	25	26	27	28	29
1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
7	9995	9997	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000
8	9984	9991	9995	9997	0,9999	0,9999	1,0000
9	9960	9976	9986	9992	9995	9997	0,9999
10	9913	9945	9967	9980	9988	9993	9996
11	9832	9890	9929	9955	9972	9983	9990
12	9705	9799	9866	9912	9943	9964	9977
13	9520	9661	9765	9840	9892	9929	9954
14	9269	9466	9617	9730	9813	9872	9914
15	8946	9208	9414	9573	9694	9784	9850
16	8553	8881	9148	9362	9529	9658	9755
17	8093	8487	8818	9091	9311	9486	9622
18	7575	8030	8429	8758	9035	9261	9443
19	7012	7520	7971	8364	8700	8981	9213
20	6419	6968	7468	7916	8308	8645	8929
21	5811	6387	6926	7420	7863	8253	8591
22	5203	5793	6357	6887	7374	7813	8202
23	4608	5198	5776	6329	6850	7330	7765
24	4038	4616	5194	5760	6303	6815	7289
25	3503	4058	4624	5190	5745	6278	6782
26	3009	3532	4076	4631	5186	5730	6255
27	2560	3045	3559	4093	4638	5182	5717
28	2158	2600	3079	3585	4110	4644	5179
29	1803	2201	2639	3111	3609	4125	4651
30	1494	1848	2243	2676	3142	3632	4140

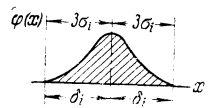
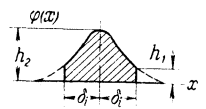
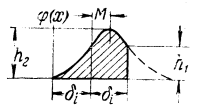
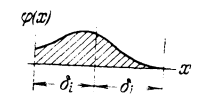
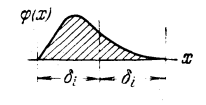
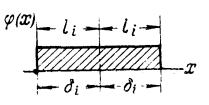
Пример. Требуется определить вероятность того, что случайная величина, следующая закону χ^2, с числом степеней свободы, равным 7, отклонится от начала отсчета на величину, не меньшую 14.

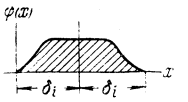
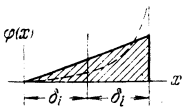
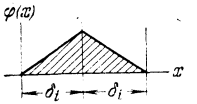
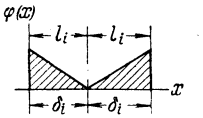
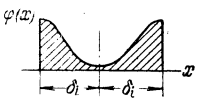
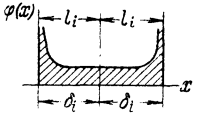
Имеем:

$$\mathbf{P}(\chi^2 > 14) = 0{,}0512.$$

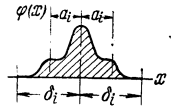
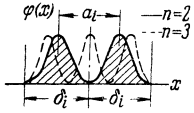
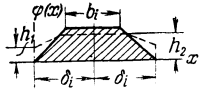
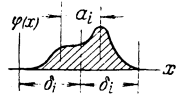
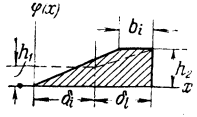
Таблица X

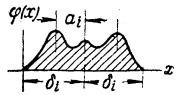
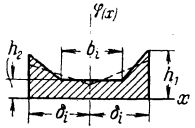
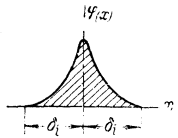
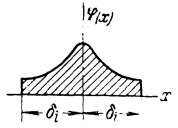
Значения коэффициентов относительной асимметрии (α_i) и относительного рассеивания (k_i) при различных законах распределения (см. 4.6.2)

№ типа	Характеристика закона распределения	Эскиз кривой распределения	Параметры кривой распределения			Коэффициенты		Примечания
1	2	3	4	5	6	7	8	9
I	Кривая Гаусса (совпадающая значениями $\pm 3\sigma$ с границами допуска)					α_i	k_i	δ_i — половина поля допуска
						0	1	
II	Кривая Гаусса, симметрично выходящая за обе границы поля допуска		A_i	h_1/h_2		α_i	k_i	A_i — неисправимый брак (в %)
			1	0,07		0	1,21	
			3	0,17		0	1,26	
			5	0,26		0	1,44	
			10	0,44		0	1,55	
III	Кривая Гаусса, односторонне выходящая за одну границу поля допуска		B_i	h_1/h_2	μ	α_i	k_i	B_i — дополнительная обработка (в %) μ — относительное смещение моды исходной кривой
			5	0,26	+0,30	+0,25	1,17	
			10	0,44	+0,40	+0,31	1,18	
			25	0,80	+0,64	+0,40	1,20	
			50	1	+1,0	+0,47	1,21	
IV	Законы распределения существенно положительных величин: а) при одномерном исходном рассеивании		a/σ	$\sigma/M(x)$		α_i	k_i	a — смещение от нуля моды исходного рассеивания
			0,5	0,74		−0,46	1,22	
			1,0	0,69		−0,38	1,27	
			2,0	0,48		−0,16	1,21	
IV *A*	б) при двумерном исходном рассеивании (кривая Максвелла)					α_i	k_i	
						−0,28	1,14	
V	Закон равной вероятности (равномерное распределение)					α_i	k_i	
						0	1,73	

VI	Композиция закона Гаусса и закона равной вероятности		$l/3\sigma$		α_i	k_i	l и 3σ — параметры составляющих законов
			2/3		0	1,10	
			1		0	1,19	
			2		0	1,38	
			3		0	1,49	
VII VII *A*	Равномерно (—) или ускоренно (- - - -) возрастающее распределение		n		α_i	k_i	n — показатель степени апроксимирующей параболы $x = f(t)$
			2		+0,33	1,41	
			3		+0,50	1,16	
			5		+0,67	0,85	
VIII VIII *A*	Композиция закона Гаусса и равномерно (—) или ускоренно (- - - -) возрастающего распределения		n	$l/3\sigma$	α_i	k_i	
			2	1	+0,19	1,03	
			2	3	+0,29	1,21	
			5	1	+0,45	0,77	
			5	3	+0,63	0,75	
IX	Закон Симпсона				α_i	k_i	
					0	1,22	
X	Антимодальное распределение: а) из отрезков прямых				α_i	k_i	
					0	2,12	
X*B*	Антимодальное распределение: б) из ветвей кривой Гаусса				α_i	k_i	
					0	2,28	
XI	Закон арксинуса (арккосинуса)				α_i	k_i	
					0	2,12	

Продолжение

№ типа	Характеристика закона распределения	Эскиз кривой распределения	Параметры кривой распределения			Коэффициенты		Примечания
1	2	3	4	5	6	7	8	9
XII	Симметричное одновершинное распределение при смешении нескольких партий		n	$F_{2,3}/F_1$	$\alpha_i/3\sigma_i$	α_i	k_i	F_i — величины составляющих партий; n — число их
			3	1/4	1	0	1,0	
			3	1/3	1	0	1,07	
			3	1/2	1	0	1,17	
			3	1/4	2/3	0	0,92	
			3	1/2	3/4	0	1,07	
XIII	Симметричное многовершинное распределение при смешении нескольких партий		n	$F_{2,3}/F_1$	$\alpha_i/3\sigma_i$	α_i	k_i	То же
			2	1	2	0	1,58	
			2	1	1	0	1,20	
			3	1	2	0	1,68	
			3	1	1	0	1,33	
XIV	Схематизированное модальное симметричное распределение при большом числе партий		b_i/δ_i	h_1/h_2		α_i	k_i	
			1/2	1/2		0	1,54	
			1/2	0		0	1,26	
			1	0		0	1,37	
			3/2	0		0	1,52	
			1	1/2		0	1,57	
XV	Несимметричное одновершинное распределение при смешении нескольких партий		n	F_i/F_1	$\alpha_i/3\sigma_i$	α_i	k_i	То же, что в XII
			2	1/4	2/3	+0,15	0,96	
			2	1/4	1	+0,20	1,03	
			2	1/3	1	+0,17	1,09	
			2	1/2	1	+0,11	1,15	
			3	1/4	1	+0,25	1,25	
XVI	Схематизированное несимметричное распределение при смешении большого числа партий		b_i/δ_i	h_1/h_2		α_i	k_i	
			1/2	0		+0,30	1,41	
			1	0		+0,22	1,44	
			3/2	0		+0,12	1,55	
			0	1/2		+0,13	1,77	
			0	1/3		+0,22	1,75	

XVII	Антимодальное распределение при смещении трех партий		n	$F_{1,2}/F_3$	$\alpha_i/3\sigma_i$	α_i	k_i	То же, что в XII
			3	2	1	0	1,43	
			3	3	1	0	1,47	
XVIII	Схематизированное антимодальное распределение при смещении большого числа партий		h_1/h_2	b_i/δ_i		α_i	k_i	
			2	1		0	1,92	
			2	0		0	1,87	
			3	1		0	2,03	
			3	0		0	1,94	
XIX	Островершинное распределение при уменьшающемся переменном рассеивании		$\frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$	$\frac{l_s}{\sigma_0}$	n	α_i	k_i	l_s — диапазон изменения σ; σ_0 — значение σ в середине диапазона
XIX*A*	То же при смещении партий		$1/9$	0,8	непрер.	0	0,80	
			$3/7$	0,4	»	0	0,84	
			$1/4$	—	3	0	0,66	
			$1/4$	—	2	0	0,75	
			$1/2$	—	2	0	0,79	
XX	Распределение при увеличивающемся переменном рассеивании		$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}$	A_i	n	α_i	k_i	
XX*A*	То же при смещении партий		9	14,5	непрер.	0	1,37	
			$7/3$	14,0	»	0	1,54	
			4	14,5	2	0	1,31	
			4	12,0	3	0	1,38	

Пример. Требуется определить для равномерно распределенного звена размерной цепи коэффициент относительной асимметрии и коэффициент относительного рассеивания. Имеем:

$$\alpha = 0 \quad \text{и} \quad k = 1{,}73,$$

Таблица XI

Ориентировочное число a единиц допуска $0{,}5\sqrt[3]{d_{ср}}$ по классам точности системы допусков и посадок ОСТ (см. 4.6.2)

Класс точности		1	2	2а	3	3а	4	5	7	8	9
Число удвоенных единиц допуска	Для основного отверстия (А)	10	16	25	30	64	100	200	400	640	1000
	Для основного вала (В)	7	10	16	30	64	100	200	400	640	1000

Пример. Требуется определить единый для всех составляющих звеньев класс точности, если по расчету число удвоенных единиц допуска оказалось равным 30.

Имеем: третий класс точности.

Таблица XII

Ориентировочное число a единиц допуска $0{,}5\sqrt[3]{d_{ср}}$ по посадкам классов точности диаметральных размеров по ОСТ (см. 4.6.2)

Число единиц допуска	Посадки изделий	
	отверстия	валы
7		$Г_1 - Т_1 - Н_1 - П_1 - С_1 - В_1 - Д_1 - ПР1_1 - ПР2_1$
10	$А_1 — Г_1 — Т_1 — Н_1 — П_1 — С_1 — Д_1$	ПР — Пл — Г — Т — Н — П — С — Д — В
16	А — Пр — Пл — Г — Т — Н — П — С — Д	$Гр — Г_{2а} — Т_{2а} — Н_{2а} — П_{2а} — С_{2а} — В_{2а}$
21	Гр — Х	Л
25	$Г_{2а} — Т_{2а} — Н_{2а} — П_{2а} — С_{2а} — А_{2а}$	Ш
27	Л	—
30	$А_2 — Ш — С_3$	$ПР1_3 — ПР2_3 — ПР3_3 — С_3 — ПР_4 — В_3$
40	$Х_3$	$Х_3$
50	$Ш_3$	$Ш_3$
64	$А_{3а} — С_{3а}$	$В_{3а} — С_{3а}$
100	$А_4 — С_4 — Х_4 — Л_4 — Ш_4$	$В_4 — С_4 — Х_4 — Л_4 — Ш_4$
200	$А_5 — С_5 — Х_5$	$С_5 — Х_5 — В_5$
400	$А_7$	$В_7$
640	$А_8$	$В_8$
1000	$А_9$	$В_9$

Пример. Требуется определить посадку и класс точности составляющих звеньев, если по расчету число единиц допуска оказалось равным 21.

Имеем: а) для охватывающих деталей (отверстия) — посадки Гр и Х, б) для охватываемых деталей (валы) — посадку Л.

Таблица XIII

Значения t_p p-процентных пределов для отклонения максимального члена u_{nn} выборки из нормальной совокупности от центра распределения (см. 5.3.10)

n \ p	90,0	95,0	97,0	98,0	99,0	99,9
1	1,282	1,645	1,881	2,054	2,326	3,090
2	1,632	1,955	2,167	2,325	2,575	3,291
3	1,812	2,120	2,323	2,472	2,712	3,475
4	1,943	2,234	2,428	2,573	2,806	3,486
5	2,037	2,319	2,508	2,650	2,877	3,540
6	2,111	2,386	2,572	2,709	2,935	3,594
7	2,172	2,442	2,625	2,761	2,981	3,647
8	2,223	2,490	2,669	2,804	3,021	3,683
9	2,269	2,531	2,708	2,842	3,054	3,701
10	2,309	2,568	2,744	2,875	3,090	3,719
11	2,345	2,601	2,775	2,904	3,118	3,753
12	2,376	2,631	2,802	2,933	3,142	3,788
13	2,405	2,657	2,828	2,958	3,168	3,788
14	2,432	2,682	2,838	2,981	3,187	3,822
15	2,457	2,705	2,873	3,000	3,208	3,822
16	2,480	2,727	2,894	3,021	3,226	3,857
17	2,502	2,747	2,913	3,039	3,244	3,857
18	2,522	2,765	2,930	3,057	3,260	3,857
19	2,541	2,782	2,948	3,073	3,275	3,891
20	2,559	2,799	2,964	3,087	3,291	3,891
25	2,635	2,871	3,031	3,153	3,353	3,984
30	2,696	2,927	3,084	3,208	3,400	4,078
35	2,748	2,976	3,131	3,249	3,443	4,078
40	2,790	3,014	3,172	3,291	3,486	4,172
45	2,828	3,052	3,204	3,323	3,518	4,172
50	2,863	3,084	3,235	3,353	3,540	4,172
55	2,892	3,112	3,265	3,377	3,576	4,172
60	2,920	3,135	3,286	3,400	3,594	4,172
65	2,944	3,160	3,322	3,424	3,612	4,172
70	2,968	3,183	3,328	3,443	3,647	4,265
75	2,988	3,204	3,347	3,464	3,665	4,265
80	3,008	3,221	3,369	3,486	3,665	4,265
85	3,026	3,238	3,385	3,497	3,683	4,265
90	3,044	3,255	3,400	3,518	3,701	4,265
95	3,059	3,270	3,416	3,529	3,701	4,265
100	3,076	3,281	3,432	3,540	3,719	4,265
150	3,194	3,400	3,540	3,647	3,822	4,265
200	3,275	3,475	3,630	3,719	3,891	4,417
250	3,334	3,540	3,683	3,788	3,984	4,501
300	3,393	3,594	3,719	3,822	4,078	4,669
400	3,475	3,665	3,788	3,891	4,172	4,669
500	3,530	3,719	3,851	3,984	4,172	4,669
600	3,576	3,788	3,891	4,078	4,172	4,669
700	3,630	3,822	3,984	4,078	4,265	4,753
800	3,665	3,857	3,984	4,172	4,265	4,753
900	3,692	3,857	4,078	4,172	4,265	4,753
1000	3,700	3,891	4,078	4,172	4,265	4,753

Пример. Требуется определить отклонение максимального члена выборки объема $n = 5$ от центра распределения, вероятность не превысить которое равна 0,97.
Имеем: $t_{97} = 2{,}508$ (долей параметра σ исходного распределения).

Таблица XIV

q-процентные пределы для отношения выборочного размаха R_n к параметру σ исходного распределения; математическое ожидание $\mathbf{M}\left(\frac{R_n}{\sigma}\right)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma_{\frac{R_n}{\sigma}}$ этого же отношения в долях параметра σ исходного распределения (см. 5.3.10)

n	$\mathbf{M}\left(\frac{R_n}{\sigma}\right)$ α_n	$\sigma\left(\frac{R_n}{\sigma}\right)$ β_n	$\frac{\sigma\left(\frac{R_n}{\sigma}\right)}{\mathbf{M}\left(\frac{R_n}{\sigma}\right)}$ γ_n	Вероятность в процентах								
				0,05	0,1	0,5	1,0	2,5	5,0	10,0	20,0	30,0
2	1,128	0,853	0,756	0,00	0,00	0,01	0,02	0,04	0,09	0,18	0,36	0,55
3	1,693	0,888	0,525	0,04	0,06	0,13	0,19	0,30	0,43	0,62	0,90	1,14
4	2,059	0,880	0,427	0,16	0,20	0,34	0,43	0,59	0,76	0,98	1,29	1,53
5	2,326	0,864	0,371	0,31	0,37	0,55	0,66	0,85	1,03	1,26	1,57	1,82
6	2,534	0,848	0,335	0,47	0,54	0,75	0,87	1,06	1,25	1,49	1,80	2,04
7	2,704	0,833	0,308	0,61	0,69	0,92	1,05	1,25	1,44	1,68	1,99	2,22
8	2,847	0,820	0,288	0,75	0,83	1,08	1,20	1,41	1,60	1,83	2,14	2,38
9	2,970	0,808	0,272	0,88	0,96	1,21	1,34	1,55	1,74	1,97	2,28	2,51
10	3,078	0,797	0,259	1,00	1,08	1,33	1,47	1,67	1,86	2,09	2,39	2,62
11	3,173	0,787	0,248	1,10	1,20	1,45	1,58	1,78	1,97	2,20	2,50	2,72
12	3,258	0,778	0,239	1,21	1,30	1,55	1,68	1,88	2,07	2,30	2,59	2,82
13	3,336	0,770	0,231	1,30	1,39	1,64	1,77	1,97	2,16	2,39	2,68	2,90
14	3,407	0,762	0,224	1,38	1,48	1,72	1,86	2,06	2,24	2,47	2,75	2,97
15	3,472	0,755	0,217	1,46	1,56	1,80	1,93	2,14	2,32	2,54	2,83	3,04
16	3,532	0,749	0,212	1,53	1,63	1,88	2,01	2,21	2,39	2,61	2,89	3,11
17	3,588	0,743	0,207	1,60	1,69	1,94	2,07	2,27	2,45	2,67	2,95	3,17
18	3,640	0,738	0,203	1,66	1,75	2,01	2,14	2,34	2,51	2,73	3,01	3,22
19	3,689	0,733	0,199	1,72	1,82	2,07	2,20	2,39	2,57	2,79	3,06	3,27
20	3,735	0,729	0,195	1,78	1,88	2,12	2,25	2,45	2,63	2,84	3,11	3,32

n	Вероятность в процентах											
	40,0	50,0	60,0	70,0	80,0	90,0	95,0	97,5	99,0	99,5	99,9	99,95
2	0,74	0,95	1,20	1,47	1,81	2,33	2,77	3,17	3,64	3,97	4,65	4,92
3	1,36	1,59	1,83	2,09	2,42	2,90	3,31	3,68	4,12	4,42	5,06	5,31
4	1,76	1,98	2,21	2,47	2,78	3,24	3,63	3,98	4,40	4,69	5,31	5,56
5	2,04	2,26	2,48	2,73	3,04	3,48	3,86	4,20	4,60	4,89	5,48	5,72
6	2,26	2,47	2,69	2 94	3,23	3,66	4,03	4,36	4,76	5,03	5,62	5,86
7	2,44	2,65	2,86	3,10	3,39	3,81	4,17	4,49	4,88	5,15	5,73	5,96
8	2,59	2,79	3,00	3,24	3,52	3,93	4,29	4,61	4,99	5,26	5,82	6,04
9	2,71	2,92	3,12	3,35	3,63	4,04	4,39	4,70	5,08	5,34	5,90	6,12
10	2,83	3,02	3,23	3,46	3,73	4,13	4,47	4,79	5,16	5,42	5,97	6,19
11	2,93	3,12	3,32	3,55	3,82	4,21	4,55	4,86	5,23	5,49	6,04	6,25
12	3,01	3,21	3,41	3,63	3,90	4,29	4,62	4,92	5,29	5,54	6,09	6,31
13	3,09	3,29	3,48	3,70	3,97	4,35	4,69	4,99	5,35	5,60	6,14	6,36
14	3,17	3,36	3,55	3,77	4,03	4,41	4,74	5,04	5,40	5,65	6,19	6,40
15	3,23	3,42	3,62	3,83	4,09	4,47	4,80	5,09	5,45	5,70	6,23	6,45
16	3,30	3,48	3,67	3,89	4,14	4,52	4,85	5,14	5,49	5,74	6,28	6,49
17	3,35	3,54	3,73	3,94	4,19	4,57	4,89	5,18	5,54	5,79	6,32	6,52
18	3,41	3,59	3,78	3,99	4,24	4,61	4,93	5,22	5,57	5,82	6,35	6,56
19	3,46	3,64	3,83	4,03	4,29	4,65	4,97	5,26	5,61	5,86	6,38	6,59
20	3,51	3,69	3,87	4,08	4,33	4,69	5,01	5,30	5,65	5,89	6,41	6,62

Пример. Требуется определить для выборки объема $n = 10$ математическое ожидание размаха R_n, его среднее квадратическое отклонение и вероятность того, что размах не превысит 4,79 σ. Из таблицы находим: $\mathbf{M}\, R_n = 3{,}078\,\sigma$; $\sigma_{R_n} = 0{,}797\,\sigma$ и вероятность $\mathbf{P}\,(I_n < 4{,}79\,\sigma) = 0{,}975 = 97{,}5\%$.

Таблица XV

Нижние z_1 и верхние z_2 границы доверительного интервала $z_1 s < \sigma < z_2 s$ (см. 5.4.2)

n \ ω	Доверительные вероятности											
	0,999		0,998		0,99		0,98		0,95		0,90	
	z_1	z_2	z_1	z_2	z_1	z_2	z_1	z_2	z_1	z_2	z_1	z_2
2	0,287		0,329		0,356		0,388	79,750	0,446	31,623	0,510	16,013
3	0,363	44,721	0,380	31,623	0,434	14,142	0,466	10,000	0,521	6,287	0,578	4,406
4	0,411	14,003	0,430	11,111	0,483	8,468	0,514	5,110	0,566	3,727	0,620	3,008
5	0,447	7,906	0,465	6,637	0,519	4,394	0,549	3,671	0,599	2,875	0,649	2,429
6	0,476	5,625	0,494	4,880	0,546	3,484	0,576	3,004	0,624	2,453	0,672	2,090
7	0,499	4,477	0,517	3,968	0,569	2,979	0,597	2,623	0,644	2,202	0,690	1,916
8	0,519	3,799	0,536	3,422	0,588	2,660	0,616	2,435	0,661	2,035	0,705	1,797
9	0,536	3,356	0,553	3,056	0,604	2,440	0,631	2,204	0,675	1,916	0,718	1,711
10	0,551	3,043	0,568	2,794	0,618	2,274	0,644	2,120	0,688	1,826	0,729	1,645
15	0,609	2,279	0,622	2,146	0,669	1,853	0,693	1,733	0,732	1,577	0,769	1,460
20	0,643	1,967	0,658	1,874	0,702	1,666	0,725	1,578	0,760	1,460	0,794	1,370
25	0,670	1,795	0,685	1,723	0,726	1,558	0,747	1,487	0,781	1,391	0,812	1,316
30	0,691	1,684	0,705	1,625	0,744	1,487	0,765	1,426	0,796	1,344	0,826	1,280
40	0,722	1,548	0,736	1,503	0,772	1,397	0,790	1,349	0,819	1,284	0,845	1,232
50	0,745	1,466	0,758	1,429	0,791	1,341	0,809	1,301	0,835	1,246	0,859	1,202
60	0,763	1,411	0,775	1,379	0,806	1,303	0,823	1,268	0,848	1,220	0,870	1,180
70	0,777	1,370	0,788	1,342	0,818	1,274	0,834	1,243	0,857	1,200	0,879	1,164
80	0,789	1,339	0,800	1,314	0,828	1,252	0,843	1,224	0,865	1,184	0,885	1,152
90	0,799	1,314	0,809	1,291	0,837	1,235	0,851	1,209	0,872	1,172	0,891	1,142
100	0,807	1,294	0,817	1,273	0,844	1,220	0,858	1,196	0,878	1,162	0,896	1,134
200	0,856	1,193	0,864	1,180	0,885	1,147	0,895	1,131	0,911	1,109	0,921	1,102

Пример. Требуется при доверительной вероятности 0,95 и объеме выборки $n=15$ штук определить доверительные границы для оценки параметра σ генеральной совокупности по эмпирическому среднему квадратическому отклонению s. Имеем:

$$z_1 = 0{,}732;\ z_2 = 1{,}577,$$

а потому доверительный интервал будет:

$$0{,}732\, s < \sigma < 1{,}577\, s.$$

Таблица XVI

Вероятность $P_t = B_k \int\limits_{-\infty}^{t} \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} dt$ **для распределения Стьюдента в зависимости от** t **и числа** k **степеней свободы (см. 5.4.4)**

t \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,0	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500
0,1	532	535	537	537	538	538	538	539	539	539
0,2	563	570	573	574	575	576	576	577	577	577
0,3	593	604	608	610	612	613	614	614	614	615
0,4	621	636	642	645	647	648	650	650	651	651
0,5	648	667	674	678	681	683	684	685	686	686
0,6	672	695	705	710	713	715	716	717	718	719
0,7	694	722	733	739	742	745	747	748	749	750
0,8	715	746	759	766	770	773	775	777	778	779
0,9	733	768	783	790	795	799	801	803	804	805
1,0	0,750	789	804	813	818	822	825	827	828	830
1,1	765	807	824	834	839	843	846	848	850	851
1,2	779	824	842	852	858	862	865	868	870	871
1,3	791	838	858	868	875	879	883	885	887	889
1,4	803	852	872	883	890	894	898	900	902	904
1,5	813	864	885	896	903	908	911	914	916	918
1,6	822	875	896	908	915	920	923	926	928	930
1,7	831	884	906	918	925	930	934	936	938	940
1,8	839	893	915	927	934	939	943	945	947	949
1,9	846	901	923	935	942	947	950	953	955	957
2,0	0,852	908	930	942	949	954	957	960	962	963
2,2	864	921	942	954	960	965	968	970	972	974
2,4	874	931	952	963	969	973	976	978	980	981
2,6	883	938	960	970	976	980	982	984	986	987
2,8	891	946	966	976	981	984	987	988	990	991
3,0	898	952	971	980	985	988	990	992	992	993
3,2	904	957	975	984	988	991	992	994	995	995
3,4	909	962	979	986	990	993	994	995	996	997
3,6	914	965	982	989	992	994	996	996	997	998
3,8	918	969	984	990	994	996	997	997	998	998
4,0	922	971	986	992	995	996	997	998	998	999
4,2	926	974	988	993	996	997	998	998	999	999
4,4	929	976	989	994	996	998	998	999	999	999
4,6	932	978	990	995	997	998	999	999	999	1,000
4,8	935	980	991	996	998	998	999	999	1,000	
5,0	937	981	992	996	998	999	999	1,000		
5,2	940	982	993	997	998	999	999			
5,4	942	984	994	997	998	999	1,000			
5,6	944	985	994	998	999	999				
5,8	946	986	995	998	999	999				
6,0	947	987	995	998	999	1,000				

Продолжение

t \ k	11	12	13	14	15	16	17	18	19	∞
0,0	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,50000
0,1	539	539	539	539	539	539	539	539	539	53983
0,2	577	578	578	578	578	578	578	578	578	57926
0,3	615	615	616	616	616	616	616	616	616	61791
0,4	652	652	652	652	653	653	653	653	653	65542
0,5	686	687	687	688	688	688	688	688	689	69146
0,6	720	720	721	721	721	722	722	722	722	72575
0,7	751	751	752	752	753	753	753	754	754	75804
0,8	780	780	781	782	782	782	783	783	783	78814
0,9	806	807	808	808	809	809	810	810	810	81594
1,0	831	832	832	833	833	834	834	835	835	84134
1,1	853	854	854	855	856	856	857	857	858	86433
1,2	872	873	874	875	876	876	877	877	878	88493
1,3	890	891	892	893	893	894	894	895	895	90320
1,4	906	907	908	908	909	910	910	911	911	91924
1,5	919	920	921	922	923	924	924	924	925	93319
1,6	931	932	933	934	935	935	936	936	937	94520
1,7	941	943	944	945	945	946	946	947	947	95543
1,8	950	952	952	953	954	955	955	956	956	96407
1,9	958	959	960	961	962	962	963	963	964	97128
2,0	965	967	967	967	968	969	969	970	970	97725
2,2	975	976	977	977	978	979	979	979	980	98610
2,4	982	983	984	985	985	986	986	986	987	99180
2,6	988	988	989	990	990	990	991	991	991	99534
2,8	0,991	0,992	0,992	0,993	0,993	0,994	0,994	0,994	0,994	0,99744
3,0	994	994	995	995	996	996	996	996	996	99865
3,2	996	996	996	997	997	997	997	998	998	99931
3,4	997	997	998	998	998	998	998	998	998	99966
3,6	998	998	998	999	999	999	999	999	999	99984
3,8	998	999	999	999	999	999	999	999	999	99993
4,0	999	999	999	999	999	1,000	1,000	1,000	1,000	99997
4,2	999	999	1,000	1,000	1,000					99999
4,4	1,000	1,000								99999

Пример. Требуется определить вероятность P_t того, что при выборке объема 15 штук отклонение выборочной средней $\bar{x}$ от генеральной средней a не превысит $1{,}5\frac{\bar{s}}{\sqrt{n}}$, если параметр σ приближенно оценивается по уточненному эмпирическому среднему квадратическому отклонению $\bar{s}$ той же выборки.

Имеем:

$$P_t = 0{,}922.$$

Таблица XVII

Вероятность $\frac{q}{100} = 1 - 2B_k \int_0^t \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} dt$ для распределения Стьюдента в зависимости от t и числа k степеней свободы (см. 5.4.7)

t \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,1	0,937	0,929	0,927	0,925	0,924	0,924	0,923	0,923	0,923	0,922
0,2	874	860	854	851	849	848	847	846	846	845
0,3	814	792	784	779	776	774	773	772	771	770
0,4	758	728	716	710	706	703	701	700	698	698

Продолжение

t \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,5	705	667	651	643	638	635	632	631	629	628
0,6	656	609	591	581	575	570	567	565	563	562
0,7	611	556	534	523	515	510	507	504	502	500
0,8	570	508	482	469	460	454	450	447	444	442
0,9	533	463	434	419	409	403	398	394	392	389
1,0	500	423	391	374	363	356	351	347	343	341
1,1	470	386	352	333	321	313	308	303	300	297
1,2	442	353	316	296	284	275	269	264	261	258
1,3	417	323	284	263	250	241	235	230	226	223
1,4	395	296	256	234	220	211	204	199	195	192
1,5	374	272	231	208	194	184	177	172	168	165
1,6	356	251	208	185	170	161	154	148	144	141
1,7	339	231	188	164	150	140	133	128	123	120
1,8	323	214	170	146	132	122	115	110	105	102
1,9	308	198	154	130	116	106	099	094	090	087
2,0	295	184	139	116	102	092	086	081	077	073
2,1	283	171	127	104	090	080	074	069	065	062
2,2	272	159	115	093	079	070	064	059	055	052
2,3	261	148	105	083	070	061	055	050	047	044
2,4	251	138	096	074	062	053	047	043	040	037
2,5	0,242	0,130	0,088	0,067	0,054	0,047	0,041	0,037	0,034	0,031
2,6	234	122	080	060	048	041	035	032	029	026
2,7	226	114	074	054	043	036	031	027	024	022
2,8	218	107	068	049	038	031	027	023	021	019
2,9	211	101	063	044	034	027	023	020	018	016
3,0	205	095	058	040	030	024	020	017	015	013
3,1	199	090	053	036	027	021	017	015	013	011
3,2	193	085	048	033	024	019	015	013	011	009
3,3	187	081	045	030	021	016	013	011	009	008
3,4	182	077	042	027	019	014	011	009	008	007
3,5	177	073	039	025	017	013	010	008	007	006
3,6	172	069	037	023	016	011	009	007	006	005
3,7	168	066	034	021	014	010	008	006	005	004
3,8	164	063	032	019	013	009	007	005	004	003
3,9	160	060	030	018	011	008	006	005	004	003
4,0	156	057	028	016	010	007	005	004	003	003
4,1	152	055	026	015	009	006	005	003	003	002
4,2	149	052	025	014	008	006	004	003	002	002
4,3	145	050	023	013	008	005	004	003	002	002
4,4	142	048	022	012	007	005	003	002	002	001
4,5	139	046	020	011	006	004	003	002	001	001
4,6	136	044	019	010	006	004	002	002	001	001
4,7	133	042	018	009	005	003	002	002	001	001
4,8	131	041	017	009	005	003	002	001	001	001
4,9	128	039	016	008	004	003	002	001	001	001
5,0	126	038	015	007	004	002	002	001	001	001
5,2	121	035	014	007	003	002	001	001	001	000
5,4	117	033	012	006	003	002	001	001	000	
5,6	112	030	011	005	003	001	001	001		
5,8	109	028	010	004	002	001	001	000		
6,0	105	027	009	004	002	001	001			

Продолжение

t \ k	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	∞
0,0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,0000
0,1	0,922	0,922	0,922	0,922	0,922	0,922	0,922	0,921	0,921	0,921	0,9203
0,2	845	845	845	844	844	844	844	844	844	844	8415
0,3	770	769	769	769	768	768	768	768	767	767	7642
0,4	697	696	696	695	695	694	694	694	694	693	6892
0,5	627	626	625	625	624	624	623	623	623	623	6171
0,6	561	560	559	558	557	557	556	556	556	555	5485
0,7	498	497	496	495	495	494	493	493	492	492	4839
0,8	441	439	438	437	436	435	435	434	434	433	4237
0,9	387	384	384	383	382	381	381	380	379	379	3681
1,0	339	337	336	334	333	332	331	331	330	329	3173
1,1	295	293	291	290	289	288	287	286	285	284	2713
1,2	255	253	252	250	249	248	247	246	245	244	2301
1,3	220	218	216	215	213	212	211	210	209	208	1936
1,4	189	187	185	183	182	181	179	179	178	177	1615
1,5	162	159	158	156	154	153	152	151	150	149	1336
1,6	138	136	134	132	130	129	128	127	126	125	1096
1,7	117	115	113	111	110	108	107	106	105	105	0891
1,8	099	097	095	093	092	091	090	089	088	087	0719
1,9	084	082	080	078	077	076	075	074	073	072	0574
2,0	071	069	067	065	064	063	062	061	060	059	0455
2,1	060	058	056	054	053	052	051	050	049	049	0357
2,2	050	048	046	045	044	043	042	041	040	040	0278
2,3	042	040	039	037	036	035	034	034	033	032	0214
2,4	035	034	032	031	030	029	028	027	027	026	0164
2,5	0,030	0,028	0,027	0,025	0,024	0,024	0,023	0,022	0,022	0,021	0,0124
2,6	025	023	022	021	020	019	019	018	018	017	0093
2,7	021	019	018	017	016	016	015	015	014	014	0069
2,8	017	016	015	014	013	013	012	012	011	011	0051
2,9	014	013	012	012	011	010	010	010	009	009	0037
3,0	012	011	010	010	009	008	008	008	007	007	0027
3,1	010	009	008	008	007	007	006	006	006	005	0019
3,2	008	008	007	006	006	006	005	005	005	004	0014
3,3	007	006	006	005	005	005	004	004	004	004	0010
3,4	006	005	005	004	004	004	003	003	003	003	0007
3,5	005	004	004	004	003	003	003	003	002	002	0004
3,6	004	004	003	003	003	002	002	002	002	002	0003
3,7	004	003	003	002	002	002	002	002	002	001	0002
3,8	003	003	002	002	002	002	001	001	001	001	0001
3,9	002	002	002	002	001	001	001	001	001	001	0001
4,0	002	002	002	001	001	001	001	001	001	001	0001
4,1	002	001	001	001	001	001	001	001	001	001	0000
4,2	001	001	001	001	001	001	001	001	000	000	
4,3	001	001	001	001	001	001	000	000			
4,4	001	001	001	001	001	000					
4,5	001	001	001	000	000						
4,6	001	001	000								
4,7	001	001									
4,8	001	000									
4,9	000										

Пример. Требуется определить вероятность $\frac{q}{100}$ того, что отклонение выборочной средней x от генеральной средней a по абсолютной величине превысит $1{,}5\frac{\bar{s}}{\sqrt{n}}$, если объем выборки равен 15 штук и параметр σ оценивается по $\bar{s}$ той же выборки. Имеем: $k = n - 1 = 15 - 1 = 14$ и $\frac{q}{100} = 0{,}156$, т. е. $q = 15{,}6\%$.

Таблица XVIII

Значения q-процентных пределов $t_{q,k}$ в зависимости от числа k степеней свободы и от вероятности $\frac{q_t}{100} = 2B_k \int_{t_{q,k}}^{\infty} \left(1+\frac{t^2}{2}\right)^{-\frac{k+1}{2}} dt$ для распределения Стьюдента (см. 5.4.4)

k \ q_t	10,0	5,0	2,5	2,0	1,0	0,5	0,3	0,2	0,1
1	6,314	12,706	25,452	31,821	63,657	127,3	212,2	318,3	636,6
2	2,920	4,303	6,205	6,965	9,925	14,089	18,216	22,327	31,600
3	2,353	3,182	4,177	4,541	5,841	7,453	8,891	10,214	12,922
4	2,132	2,776	3,495	3,747	4,604	5,597	6,435	7,173	8,610
5	2,015	2,571	3,163	3,365	4,032	4,773	5,376	5,893	6,869
6	1,943	2,447	2,969	3,143	3,707	4,317	4,800	5,208	5,959
7	1,895	2,365	2,841	2,998	3,499	4,029	4,442	4,785	5,408
8	1,860	2,306	2,752	2,896	3,355	3,833	4,199	4,501	5,041
9	1,833	2,262	2,685	2,821	3,250	3,690	4,024	4,297	4,781
10	1,812	2,228	2,634	2,764	3,169	3,581	3,892	4,144	4,587
12	1,782	2,179	2,560	2,681	3,055	3,428	3,706	3,930	4,318
14	1,761	2,145	2,510	2,624	2,977	3,326	3,583	3,787	4,140
16	1,746	2,120	2,473	2,583	2,921	3,252	3,494	3,686	4,015
18	1,734	2,101	2,445	2,552	2,878	3,193	3,428	3,610	3,922
20	1,725	2,086	2,423	2,528	2,845	3,153	3,376	3,552	3,849
22	1,717	2,074	2,405	2,508	2,819	3,119	3,335	3,505	3,792
24	1,711	2,064	2,391	2,492	2,797	3,092	3,302	3,467	3,745
26	1,706	2,056	2,379	2,479	2,779	3,067	3,274	3,435	3,707
28	1,701	2,048	2,369	2,467	2,763	3,047	3,250	3,408	3,674
30	1,697	2,042	2,360	2,457	2,750	3,030	3,230	3,386	3,646
∞	1,645	1,960	2,241	2,326	2,576	2,807	2,968	3,090	3,291

Пример. Требуется определить 10-процентные пределы для отклонения выборочной средней $\bar{x}$ от генеральной средней a при объеме выборки 15 штук, если параметр σ приближенно оценивается по данным той же выборки.

Имеем: $k = n-1 = 15-1 = 14$; $t_{10,14} = 1{,}761$ и потому $-1{,}761\frac{\bar{s}}{\sqrt{15}} < \bar{x}-a < +1{,}761\frac{\bar{s}}{\sqrt{15}}$.

Таблица XIX

Двухсторонние 95%-ные доверительные пределы для оценки вероятности по частости при биномиальном распределении (см. 5.4.6)

В данной таблице x — числитель и n — знаменатель частости. Вероятности умножены на 1000

x \ $n-x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	975 **000**	842 **000**	708 **000**	602 **000**	522 **000**	459 **000**	410 **000**	369 **000**	336 **000**	308 **000**	285 **000**	265 **000**
1	987 **013**	906 **008**	806 **006**	716 **005**	641 **004**	579 **004**	527 **003**	483 **003**	445 **003**	413 **002**	385 **002**	360 **002**
2	992 **094**	932 **068**	853 **053**	777 **043**	710 **037**	651 **032**	600 **028**	556 **025**	518 **023**	484 **021**	454 **019**	428 **018**
3	994 **194**	947 **147**	882 **118**	816 **099**	755 **085**	701 **075**	652 **067**	610 **060**	572 **055**	538 **050**	508 **047**	481 **043**
4	995 **284**	957 **223**	901 **184**	843 **157**	788 **137**	738 **122**	692 **109**	651 **099**	614 **091**	581 **084**	551 **078**	524 **073**
5	996 **359**	963 **290**	915 **245**	863 **212**	813 **187**	766 **167**	723 **151**	684 **139**	649 **128**	616 **118**	587 **110**	560 **103**

Продолжение

x \ $n-x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
6	996	968	925	878	833	789	749	711	677	646	617	590
	421	**349**	**299**	**262**	**234**	**211**	**192**	**177**	**163**	**152**	**142**	**133**
7	997	972	933	891	849	808	770	734	701	671	643	616
	473	**400**	**348**	**308**	**277**	**251**	**230**	**213**	**198**	**184**	**173**	**163**
8	997	975	940	901	861	823	787	753	722	692	665	639
	517	**444**	**390**	**349**	**316**	**289**	**266**	**247**	**230**	**215**	**203**	**191**
9	997	977	945	909	872	837	802	770	740	711	685	660
	555	**482**	**428**	**386**	**351**	**323**	**299**	**278**	**260**	**244**	**231**	**218**
10	998	979	950	916	882	848	816	785	756	728	702	678
	587	**516**	**462**	**419**	**384**	**354**	**329**	**308**	**289**	**272**	**257**	**244**
11	998	981	953	922	890	858	827	797	769	743	718	694
	615	**546**	**492**	**449**	**413**	**383**	**357**	**335**	**315**	**298**	**282**	**268**
12	998	982	957	927	897	867	837	809	782	756	732	709
	640	**572**	**519**	**476**	**440**	**410**	**384**	**361**	**340**	**322**	**306**	**291**
13	998	983	960	932	903	874	846	819	793	768	744	722
	661	**595**	**544**	**501**	**465**	**435**	**408**	**384**	**364**	**345**	**328**	**313**
14	998	984	962	936	909	881	854	828	803	779	756	734
	681	**617**	**566**	**524**	**488**	**457**	**430**	**407**	**385**	**366**	**349**	**334**
15	998	985	964	939	913	887	861	836	812	789	766	745
	698	**636**	**586**	**544**	**509**	**478**	**451**	**427**	**406**	**386**	**369**	**353**
16	999	986	966	943	918	893	868	844	820	798	776	755
	713	**653**	**604**	**563**	**529**	**498**	**471**	**447**	**425**	**405**	**388**	**372**
17	999	987	968	946	922	898	874	851	828	806	785	765
	727	**669**	**621**	**581**	**547**	**516**	**488**	**465**	**443**	**423**	**406**	**389**
18	999	988	970	948	925	902	879	857	835	814	793	773
	740	**683**	**637**	**597**	**564**	**533**	**506**	**482**	**460**	**440**	**422**	**406**
19	999	988	971	950	929	906	884	862	841	821	801	782
	751	**696**	**651**	**612**	**579**	**549**	**522**	**498**	**476**	**456**	**439**	**422**
20	999	989	972	953	932	910	889	868	847	827	808	789
	762	**708**	**664**	**626**	**593**	**564**	**537**	**513**	**492**	**472**	**454**	**437**
22	999	990	975	956	937	917	897	877	858	839	820	803
	781	**730**	**688**	**651**	**619**	**590**	**565**	**541**	**519**	**500**	**481**	**465**
24	999	991	976	960	942	923	904	885	867	849	831	814
	797	**749**	**708**	**673**	**642**	**614**	**589**	**566**	**545**	**525**	**507**	**490**
26	999	991	978	962	945	928	910	893	875	858	841	825
	810	**765**	**726**	**693**	**663**	**636**	**611**	**588**	**567**	**548**	**530**	**513**
28	999	992	980	965	949	932	916	899	882	866	850	834
	822	**779**	**743**	**710**	**681**	**655**	**631**	**609**	**588**	**569**	**551**	**535**
30	999	992	981	967	952	936	920	904	889	873	858	843
	833	**792**	**757**	**725**	**697**	**672**	**649**	**627**	**607**	**588**	**571**	**554**
35	999	993	983	971	958	944	930	916	902	888	874	860
	855	**818**	**786**	**758**	**732**	**708**	**686**	**666**	**647**	**628**	**612**	**596**
40	999	994	985	975	963	951	938	925	912	900	887	875
	871	**838**	**809**	**783**	**759**	**737**	**717**	**698**	**679**	**662**	**646**	**631**
45	999	995	987	977	967	956	944	933	921	909	898	886
	885	**855**	**828**	**804**	**782**	**761**	**742**	**724**	**707**	**690**	**675**	**661**
50	1000	995	988	979	970	960	949	939	928	917	906	896
	896	**868**	**843**	**821**	**800**	**781**	**763**	**746**	**730**	**714**	**700**	**686**
60	1000	996	990	983	975	966	957	948	939	929	920	911
	912	**888**	**867**	**848**	**830**	**813**	**797**	**782**	**767**	**752**	**740**	**727**

Продолжение

x \ $n-x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
80	1000 **933**	997 **915**	992 **898**	987 **882**	981 **868**	974 **855**	967 **842**	960 **829**	953 **816**	945 **804**	938 **793**	931 **783**
100	1000 **946**	998 **931**	994 **917**	989 **904**	984 **892**	979 **881**	973 **870**	967 **859**	962 **849**	955 **838**	949 **829**	943 **820**
200	1000 **973**	999 **965**	997 **957**	995 **951**	992 **944**	989 **938**	986 **932**	983 **926**	980 **920**	977 **914**	974 **909**	970 **903**
500	1000 **989**	1000 **986**	999 **983**	998 **980**	997 **977**	996 **974**	995 **972**	993 **969**	992 **967**	991 **964**	989 **962**	988 **960**
∞	1000 **1000**	1000 **1000**	1000 **1000**	1000 **1000**	1000 **1000**	1000 **1000**	1000 **1000**	1000 **1000**	1000 **1000**	1000 **1000**	1000 **1000**	1000 **1000**

x \ $n-x$	13	14	15	16	17	18	19	20	22	24	26	28
0	247 **000**	232 **000**	218 **000**	206 **000**	195 **000**	185 **000**	176 **000**	168 **000**	154 **000**	142 **000**	132 **000**	123 **000**
1	339 **002**	319 **002**	302 **002**	287 **001**	273 **001**	260 **001**	249 **001**	238 **001**	219 **001**	203 **001**	190 **001**	178 **001**
2	405 **017**	383 **016**	364 **015**	347 **014**	331 **013**	317 **012**	304 **012**	292 **011**	270 **010**	251 **009**	235 **009**	221 **008**
3	456 **040**	434 **038**	414 **036**	396 **034**	379 **032**	363 **030**	349 **029**	336 **028**	312 **025**	292 **024**	274 **022**	257 **020**
4	499 **068**	476 **064**	456 **061**	437 **057**	419 **054**	403 **052**	388 **050**	374 **047**	349 **044**	327 **040**	307 **038**	290 **035**
5	535 **097**	512 **091**	491 **087**	471 **082**	453 **078**	436 **075**	421 **071**	407 **068**	381 **063**	358 **058**	337 **055**	319 **051**
6	565 **126**	543 **119**	522 **113**	502 **107**	484 **102**	467 **098**	451 **094**	436 **090**	410 **083**	386 **077**	364 **072**	345 **068**
7	592 **154**	570 **146**	549 **139**	529 **132**	512 **126**	494 **121**	478 **116**	463 **111**	435 **103**	411 **096**	389 **090**	369 **084**
8	616 **181**	593 **172**	573 **164**	553 **156**	535 **149**	518 **143**	502 **138**	487 **132**	459 **123**	434 **115**	412 **107**	391 **101**
9	636 **207**	615 **197**	594 **188**	575 **180**	557 **172**	540 **165**	524 **159**	508 **153**	481 **142**	455 **133**	433 **125**	412 **118**
10	655 **232**	634 **221**	614 **211**	595 **202**	577 **194**	560 **186**	544 **179**	528 **173**	500 **161**	475 **151**	452 **142**	431 **134**
11	672 **256**	651 **244**	631 **234**	612 **224**	594 **215**	578 **207**	561 **199**	546 **192**	519 **180**	493 **169**	470 **159**	449 **150**
12	687 **278**	666 **266**	647 **255**	628 **245**	611 **235**	594 **227**	578 **218**	563 **211**	535 **197**	510 **186**	487 **175**	465 **166**
13	701 **299**	680 **287**	661 **275**	643 **264**	626 **255**	609 **245**	594 **237**	579 **229**	551 **215**	525 **202**	503 **191**	481 **181**
14	713 **320**	694 **306**	675 **295**	657 **283**	640 **273**	624 **264**	608 **255**	593 **247**	566 **232**	540 **218**	517 **206**	496 **196**
15	725 **339**	705 **325**	687 **313**	669 **302**	653 **291**	637 **281**	621 **272**	607 **263**	579 **248**	554 **234**	531 **221**	509 **210**
16	736 **357**	717 **343**	698 **331**	681 **319**	665 **308**	649 **298**	634 **288**	619 **280**	592 **263**	567 **249**	544 **236**	522 **224**

Продолжение

x \ $n-x$	13	14	15	16	17	18	19	20	22	24	26	28
17	745 **374**	727 **360**	709 **347**	692 **335**	676 **324**	660 **314**	645 **304**	631 **295**	604 **278**	579 **263**	556 **250**	535 **238**
18	755 **391**	736 **376**	719 **363**	702 **351**	686 **340**	671 **329**	656 **319**	642 **310**	615 **293**	590 **277**	568 **264**	547 **251**
19	763 **406**	745 **392**	728 **379**	712 **366**	696 **355**	681 **344**	666 **334**	652 **324**	626 **307**	601 **291**	578 **277**	557 **264**
20	771 **421**	753 **407**	737 **393**	720 **381**	705 **369**	690 **358**	676 **348**	662 **338**	636 **320**	612 **304**	589 **289**	568 **276**
22	785 **449**	768 **434**	752 **421**	737 **408**	722 **396**	707 **385**	693 **374**	680 **364**	654 **346**	631 **329**	614 **314**	588 **300**
24	798 **475**	782 **460**	766 **446**	751 **433**	737 **421**	723 **410**	709 **399**	696 **388**	671 **369**	648 **352**	626 **337**	605 **322**
26	809 **497**	794 **483**	779 **469**	764 **456**	750 **444**	736 **432**	723 **422**	711 **411**	686 **388**	663 **374**	642 **358**	622 **343**
28	819 **519**	804 **504**	790 **491**	776 **478**	762 **465**	749 **453**	736 **443**	724 **432**	700 **412**	678 **395**	657 **378**	637 **363**
30	828 **539**	814 **524**	800 **510**	786 **498**	773 **485**	760 **473**	748 **462**	736 **452**	713 **432**	691 **414**	670 **397**	651 **382**
35	847 **581**	834 **567**	821 **554**	809 **541**	797 **529**	785 **517**	773 **506**	762 **496**	740 **476**	719 **457**	700 **441**	681 **425**
40	862 **616**	850 **602**	838 **590**	827 **578**	815 **566**	804 **555**	793 **544**	783 **533**	763 **513**	743 **495**	724 **478**	706 **462**
45	875 **647**	864 **633**	853 **621**	842 **609**	831 **598**	821 **587**	811 **576**	801 **566**	781 **546**	763 **528**	745 **511**	728 **495**
50	885 **673**	875 **660**	865 **648**	854 **636**	844 **625**	835 **614**	825 **604**	816 **594**	797 **575**	780 **557**	763 **540**	746 **525**
60	902 **715**	893 **703**	884 **692**	874 **681**	866 **670**	857 **660**	848 **650**	840 **641**	823 **622**	807 **605**	792 **589**	777 **574**
80	923 **773**	916 **763**	909 **753**	901 **744**	894 **734**	887 **726**	880 **717**	874 **708**	860 **692**	846 **676**	833 **662**	820 **647**
100	937 **811**	931 **802**	925 **794**	919 **786**	913 **778**	907 **770**	901 **762**	895 **755**	883 **740**	872 **726**	860 **713**	847 **700**
200	967 **898**	964 **893**	961 **888**	957 **883**	954 **878**	950 **873**	947 **868**	943 **863**	937 **854**	930 **845**	923 **836**	917 **828**
500	986 **957**	985 **955**	984 **953**	982 **950**	981 **948**	979 **946**	978 **944**	976 **941**	973 **937**	970 **933**	967 **928**	964 **924**
∞	1000 **1000**	1000 **1000**	1000 **1000**	1000 **1000**	1000 **1000**	1000 **1000**	1000 **1000**	1000 **1000**	1000 **1000**	1000 **1000**	1000 **1000**	1000 **1000**

x \ $n-x$	30	35	40	45	50	60	80	100	200	500	∞
0	116 **000**	100 **000**	088 **000**	079 **000**	071 **000**	060 **000**	045 **000**	036 **000**	018 **000**	007 **000**	000 **000**
1	167 **001**	145 **001**	129 **001**	115 **001**	104 **001**	088 **000**	067 **000**	054 **000**	027 **000**	011 **000**	000 **000**
2	208 **008**	182 **007**	162 **006**	145 **005**	132 **005**	112 **004**	085 **003**	069 **002**	035 **001**	014 **000**	000 **000**

Поодолжение

x \ $n-x$	30	35	40	45	50	60	80	100	200	500	∞
3	243 **019**	214 **017**	191 **015**	172 **013**	157 **012**	133 **010**	102 **008**	083 **006**	043 **003**	017 **001**	000 **000**
4	275 **033**	242 **029**	217 **025**	196 **023**	179 **021**	152 **017**	118 **013**	096 **011**	049 **005**	020 **002**	000 **000**
5	303 **048**	268 **042**	241 **037**	218 **033**	200 **030**	170 **025**	132 **019**	108 **016**	056 **008**	023 **003**	000 **000**
6	328 **064**	292 **056**	263 **049**	239 **044**	219 **040**	187 **034**	145 **026**	119 **021**	062 **011**	026 **004**	000 **000**
7	351 **080**	314 **070**	283 **062**	258 **056**	237 **051**	203 **043**	158 **033**	130 **027**	068 **014**	028 **005**	000 **000**
8	373 **096**	334 **084**	302 **075**	276 **067**	254 **061**	218 **052**	171 **040**	141 **033**	074 **017**	031 **007**	000 **000**
9	393 **111**	353 **098**	321 **088**	293 **079**	270 **072**	233 **061**	184 **047**	151 **038**	080 **020**	033 **008**	000 **000**
10	412 **127**	372 **112**	338 **100**	310 **091**	286 **083**	248 **071**	196 **055**	162 **045**	086 **023**	036 **009**	000 **000**
11	429 **142**	388 **126**	354 **113**	325 **102**	300 **094**	260 **080**	207 **062**	171 **051**	091 **026**	038 **011**	000 **000**
12	446 **157**	404 **140**	369 **125**	339 **114**	314 **104**	273 **089**	217 **069**	180 **057**	097 **030**	040 **012**	000 **000**
13	461 **172**	419 **153**	384 **138**	353 **125**	327 **115**	285 **098**	227 **077**	189 **063**	102 **033**	043 **014**	000 **000**
14	476 **186**	433 **166**	398 **150**	367 **136**	340 **125**	297 **107**	237 **084**	198 **069**	107 **036**	045 **015**	000 **000**
15	490 **200**	446 **179**	410 **162**	379 **147**	352 **135**	308 **116**	247 **091**	206 **075**	112 **039**	047 **016**	000 **000**
16	502 **214**	459 **191**	422 **173**	391 **158**	364 **146**	319 **126**	256 **099**	214 **081**	117 **043**	050 **018**	000 **000**
17	515 **227**	471 **203**	434 **185**	402 **169**	375 **156**	330 **134**	266 **106**	222 **087**	122 **046**	052 **019**	000 **000**
18	527 **240**	483 **215**	445 **196**	413 **179**	386 **165**	340 **143**	274 **113**	230 **093**	127 **050**	054 **021**	000 **000**
19	538 **252**	494 **227**	456 **207**	424 **189**	396 **175**	350 **152**	283 **120**	238 **099**	132 **053**	056 **022**	000 **000**
20	548 **264**	504 **238**	467 **217**	434 **199**	406 **184**	359 **160**	292 **126**	245 **105**	137 **057**	059 **024**	000 **000**
22	568 **287**	524 **260**	487 **237**	454 **219**	425 **203**	378 **177**	308 **140**	260 **117**	146 **063**	063 **027**	000 **000**
24	586 **309**	543 **281**	505 **257**	472 **237**	443 **220**	395 **193**	324 **154**	274 **128**	155 **070**	067 **030**	000 **000**
26	603 **330**	559 **300**	522 **276**	489 **255**	460 **237**	411 **208**	338 **167**	287 **140**	164 **077**	072 **033**	000 **000**
28	618 **349**	575 **319**	538 **294**	505 **272**	475 **254**	426 **223**	353 **180**	300 **153**	172 **083**	076 **036**	000 **000**
30	632 **368**	590 **337**	552 **311**	520 **289**	490 **269**	441 **237**	366 **192**	313 **162**	181 **090**	080 **039**	000 **000**
35	663 **410**	622 **378**	586 **351**	553 **327**	524 **306**	474 **272**	397 **222**	342 **188**	201 **106**	090 **046**	000 **000**
40	689 **448**	649 **414**	614 **386**	581 **361**	553 **340**	503 **303**	425 **250**	368 **213**	220 **122**	099 **053**	000 **000**

Продолжение

x \ $n-x$	30	35	40	45	50	60	80	100	200	500	∞
45	711 **480**	673 **447**	639 **419**	607 **393**	579 **370**	529 **332**	451 **276**	392 **236**	238 **137**	109 **061**	000 **000**
50	731 **510**	694 **476**	660 **447**	630 **421**	602 **398**	552 **359**	474 **301**	415 **259**	255 **152**	118 **068**	000 **000**
60	763 **559**	728 **526**	697 **497**	668 **471**	641 **448**	593 **407**	515 **345**	455 **300**	287 **181**	136 **083**	000 **000**
80	808 **634**	778 **603**	750 **575**	724 **549**	699 **526**	655 **485**	580 **420**	520 **370**	342 **234**	169 **111**	000 **000**
100	838 **687**	812 **658**	787 **632**	764 **608**	741 **585**	700 **545**	630 **480**	571 **429**	395 **280**	199 **138**	000 **000**
200	910 **819**	894 **799**	878 **780**	863 **762**	848 **745**	819 **713**	766 **658**	720 **605**	550 **450**	319 **253**	000 **000**
500	961 **920**	954 **910**	947 **901**	939 **891**	932 **882**	917 **864**	889 **831**	862 **801**	747 **681**	531 **469**	000 **000**
∞	1000 **1000**	1000 **1000**	1000 **1000**	1000 **1000**	1000 **1000**	1000 **1000**	**1000** **1000**	**1000** **1000**	1000 **1000**	1000 **1000**	— —

Пример. Требуется найти 95%-ные доверительные пределы для вероятности, если в наблюдениях частость составила $\frac{7}{25} = 0{,}280$.

Имеем: $x = 7$, $n - x = 25 - 7 = 18$ и доверительные пределы для вероятности 0,121 и 0,494.

Таблица XIX (*продолжение*)

Двухсторонние 99%-ные доверительные пределы для оценки вероятности по частости при биномиальном распределении (см. 5.4.6)

В данной таблице x — числитель и n — знаменатель частости. Вероятности умножены на 1000

x \ $n-x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	995 **000**	929 **000**	829 **000**	734 **000**	653 **000**	586 **000**	531 **000**	484 **000**	445 **000**	411 **000**	382 **000**	357 **000**
1	997 **003**	959 **002**	889 **001**	815 **001**	746 **001**	685 **001**	632 **001**	585 **001**	544 **001**	509 **000**	477 **000**	449 **000**
2	998 **041**	971 **029**	917 **023**	856 **019**	797 **016**	749 **014**	693 **012**	648 **011**	608 **010**	573 **009**	541 **008**	512 **008**
3	999 **111**	977 **083**	934 **066**	882 **055**	830 **047**	781 **042**	735 **037**	693 **033**	655 **030**	621 **028**	589 **026**	561 **024**
4	999 **185**	981 **144**	945 **118**	900 **100**	854 **087**	809 **077**	767 **069**	728 **062**	691 **057**	658 **053**	627 **049**	599 **045**
5	999 **254**	984 **203**	953 **170**	913 **146**	872 **128**	831 **114**	791 **103**	755 **094**	720 **087**	688 **080**	658 **075**	631 **070**
6	999 **315**	986 **253**	958 **219**	923 **191**	886 **169**	848 **152**	811 **138**	777 **127**	744 **117**	714 **109**	685 **101**	658 **095**
7	999 **368**	988 **307**	963 **265**	931 **233**	897 **209**	862 **189**	828 **172**	795 **159**	764 **147**	735 **137**	707 **128**	681 **121**
8	999 **415**	989 **352**	967 **307**	938 **272**	906 **245**	873 **223**	841 **205**	811 **189**	781 **176**	753 **165**	726 **155**	701 **146**
9	999 **456**	990 **392**	970 **345**	943 **309**	913 **280**	883 **256**	853 **236**	824 **219**	795 **205**	768 **192**	743 **181**	718 **171**

Продолжение

x \ $n-x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10	1000	991	972	947	920	891	863	835	808	782	758	734
	491	**427**	**379**	**342**	**312**	**286**	**265**	**247**	**232**	**218**	**205**	**195**
11	1000	992	974	951	925	899	872	845	819	795	771	748
	523	**459**	**411**	**373**	**342**	**315**	**293**	**274**	**257**	**242**	**229**	**218**
12	1000	992	976	955	930	905	879	854	829	805	782	760
	551	**488**	**439**	**401**	**369**	**342**	**319**	**299**	**282**	**266**	**252**	**240**
13	1000	993	978	957	935	910	886	862	838	815	793	772
	576	**514**	**466**	**427**	**395**	**367**	**343**	**323**	**305**	**288**	**274**	**261**
14	1000	993	979	960	938	915	892	869	846	824	803	782
	598	**537**	**490**	**451**	**418**	**390**	**366**	**345**	**326**	**310**	**295**	**281**
15	1000	994	980	962	942	920	898	875	854	832	811	791
	619	**559**	**512**	**473**	**440**	**412**	**388**	**366**	**347**	**330**	**314**	**300**
16	1000	994	981	964	945	924	903	881	860	839	819	800
	637	**578**	**532**	**493**	**461**	**433**	**408**	**386**	**366**	**349**	**333**	**318**
17	1000	994	982	966	947	927	907	887	866	846	827	808
	654	**596**	**551**	**512**	**480**	**452**	**427**	**405**	**385**	**367**	**351**	**336**
18	1000	995	983	968	950	931	911	891	872	852	833	815
	669	**613**	**568**	**530**	**498**	**469**	**445**	**422**	**402**	**384**	**368**	**353**
19	1000	995	984	969	952	934	915	896	877	858	840	822
	683	**628**	**584**	**547**	**515**	**486**	**462**	**439**	**419**	**401**	**384**	**369**
20	1000	995	985	971	954	936	918	900	881	863	845	828
	696	**642**	**599**	**562**	**530**	**502**	**478**	**455**	**435**	**417**	**400**	**384**
22	1000	996	986	973	958	941	924	907	890	873	856	839
	719	**668**	**626**	**590**	**559**	**531**	**507**	**484**	**464**	**445**	**429**	**413**
24	1000	996	987	975	961	946	930	913	897	881	865	849
	738	**690**	**649**	**615**	**584**	**557**	**533**	**511**	**490**	**471**	**455**	**439**
26	1000	996	988	977	963	949	934	919	903	888	873	858
	755	**709**	**670**	**637**	**607**	**580**	**557**	**535**	**515**	**496**	**479**	**463**
28	1000	996	989	978	966	952	938	924	909	894	880	866
	770	**726**	**689**	**656**	**627**	**602**	**578**	**557**	**537**	**518**	**501**	**485**
30	1000	997	989	980	968	955	942	928	914	900	886	873
	784	**741**	**705**	**674**	**646**	**621**	**598**	**577**	**557**	**539**	**522**	**506**
35	1000	997	991	982	972	961	949	937	924	912	900	887
	811	**773**	**740**	**711**	**685**	**661**	**639**	**619**	**600**	**582**	**566**	**550**
40	1000	998	992	984	975	965	955	944	933	921	910	899
	832	**797**	**767**	**740**	**716**	**694**	**673**	**654**	**636**	**619**	**603**	**588**
45	1000	998	993	986	978	969	959	949	939	929	919	908
	849	**817**	**790**	**765**	**742**	**721**	**701**	**683**	**666**	**649**	**634**	**620**
50	1000	998	994	987	980	972	963	954	945	935	926	916
	863	**834**	**808**	**785**	**763**	**743**	**725**	**708**	**691**	**676**	**661**	**648**
60	1000	998	995	989	983	976	969	961	953	945	937	928
	884	**859**	**836**	**816**	**797**	**780**	**763**	**748**	**733**	**719**	**705**	**693**
80	1000	999	996	992	987	982	976	970	964	957	951	944
	912	**892**	**874**	**857**	**842**	**827**	**814**	**801**	**788**	**776**	**765**	**754**
100	1000	999	997	993	990	985	981	976	971	965	960	955
	929	**912**	**897**	**884**	**871**	**858**	**847**	**836**	**825**	**815**	**805**	**795**
200	1000	999	998	997	995	992	990	988	985	982	979	976
	964	**955**	**947**	**939**	**932**	**925**	**919**	**913**	**907**	**901**	**896**	**890**
500	1000	1000	999	999	998	997	996	995	994	993	992	990
	985	**982**	**978**	**975**	**972**	**969**	**967**	**964**	**961**	**959**	**956**	**953**
∞	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
	1000	**1000**	**1000**	**1000**	**1000**	**1000**	**1000**	**1000**	**1000**	**1000**	**1000**	**1000**

Продолжение

x \ $n-x$	13	14	15	16	17	18	19	20	22	24	26	28
0	335 **000**	315 **000**	298 **000**	282 **000**	268 **000**	255 **000**	243 **000**	233 **000**	214 **000**	198 **000**	184 **000**	172 **000**
1	424 **000**	402 **000**	381 **000**	363 **000**	346 **000**	331 **000**	317 **000**	304 **000**	281 **000**	262 **000**	245 **000**	230 **000**
2	486 **007**	463 **007**	441 **006**	422 **006**	404 **006**	387 **005**	372 **005**	358 **005**	332 **004**	310 **004**	291 **004**	274 **004**
3	534 **022**	510 **021**	488 **020**	468 **019**	449 **018**	432 **017**	416 **016**	401 **015**	374 **014**	351 **013**	330 **012**	311 **011**
4	573 **043**	549 **040**	527 **038**	507 **036**	488 **034**	470 **032**	453 **031**	438 **029**	410 **027**	385 **025**	363 **023**	344 **022**
5	605 **065**	582 **062**	560 **058**	539 **055**	520 **053**	502 **050**	485 **048**	470 **046**	441 **042**	416 **039**	393 **037**	373 **034**
6	633 **090**	610 **085**	588 **080**	567 **076**	548 **073**	531 **069**	514 **066**	498 **064**	469 **059**	443 **054**	420 **051**	398 **048**
7	657 **114**	634 **108**	612 **102**	592 **097**	573 **093**	555 **089**	538 **085**	522 **082**	493 **076**	467 **070**	443 **066**	422 **062**
8	677 **138**	655 **131**	634 **125**	614 **119**	595 **113**	578 **109**	561 **104**	545 **100**	516 **093**	489 **087**	465 **081**	443 **076**
9	695 **162**	674 **154**	653 **146**	634 **140**	615 **134**	598 **128**	581 **123**	565 **119**	536 **110**	510 **103**	485 **097**	463 **091**
10	712 **185**	690 **176**	670 **168**	651 **161**	633 **154**	616 **148**	599 **142**	583 **137**	555 **127**	529 **119**	504 **112**	482 **106**
11	726 **207**	705 **197**	686 **189**	667 **181**	649 **173**	632 **167**	616 **160**	600 **155**	571 **144**	545 **135**	521 **127**	499 **120**
12	739 **228**	719 **218**	700 **209**	682 **200**	664 **192**	647 **185**	631 **178**	616 **172**	587 **161**	561 **151**	537 **142**	515 **134**
13	751 **249**	731 **238**	713 **228**	695 **219**	678 **211**	661 **203**	645 **196**	630 **189**	602 **177**	576 **166**	552 **157**	529 **148**
14	762 **269**	743 **257**	724 **247**	707 **237**	691 **228**	674 **220**	658 **213**	643 **206**	615 **193**	590 **181**	566 **171**	543 **162**
15	772 **287**	753 **276**	735 **265**	718 **255**	702 **246**	685 **237**	670 **229**	655 **222**	628 **208**	602 **196**	578 **186**	556 **176**
16	781 **305**	763 **293**	745 **282**	728 **272**	712 **262**	696 **253**	681 **245**	666 **237**	639 **223**	614 **211**	590 **200**	568 **189**
17	789 **322**	772 **309**	754 **298**	738 **288**	722 **278**	706 **269**	692 **260**	677 **252**	650 **238**	625 **225**	602 **213**	580 **202**
18	797 **339**	780 **326**	763 **315**	747 **304**	731 **294**	716 **284**	701 **275**	687 **267**	661 **252**	636 **238**	612 **226**	591 **215**
19	804 **355**	787 **342**	771 **330**	755 **319**	740 **308**	725 **299**	711 **289**	697 **281**	670 **265**	646 **251**	623 **239**	601 **228**
20	811 **370**	794 **357**	778 **345**	763 **334**	748 **323**	733 **313**	719 **303**	705 **295**	679 **279**	655 **264**	632 **251**	611 **239**
22	823 **398**	807 **385**	792 **372**	777 **361**	762 **350**	748 **339**	735 **330**	721 **321**	696 **304**	673 **289**	650 **274**	629 **263**
24	834 **424**	819 **410**	804 **393**	789 **386**	775 **375**	762 **364**	749 **354**	736 **345**	711 **327**	688 **312**	666 **298**	646 **285**
26	843 **448**	829 **434**	814 **422**	800 **410**	787 **398**	774 **388**	761 **377**	749 **368**	726 **350**	702 **334**	681 **319**	661 **306**
28	852 **471**	838 **457**	824 **444**	811 **432**	798 **420**	785 **409**	772 **399**	761 **389**	737 **371**	715 **354**	694 **339**	675 **325**

Продолжение

x \ $n-x$	13	14	15	16	17	18	19	20	22	24	26	28
30	859 **492**	846 **478**	833 **464**	820 **452**	807 **441**	795 **430**	783 **419**	771 **409**	749 **391**	727 **374**	707 **358**	688 **344**
35	875 **535**	863 **522**	851 **510**	839 **498**	827 **486**	816 **475**	805 **464**	794 **454**	773 **435**	753 **418**	733 **402**	715 **387**
40	888 **574**	876 **560**	865 **548**	854 **536**	844 **525**	833 **514**	823 **503**	813 **493**	793 **474**	774 **457**	756 **440**	738 **425**
45	898 **606**	888 **593**	877 **582**	867 **570**	857 **558**	847 **547**	838 **537**	828 **527**	810 **508**	792 **491**	775 **474**	758 **459**
50	906 **634**	897 **621**	888 **610**	878 **599**	869 **588**	859 **577**	850 **567**	842 **557**	824 **538**	807 **521**	791 **505**	775 **490**
60	920 **680**	912 **668**	904 **657**	895 **646**	887 **636**	878 **626**	870 **616**	863 **606**	847 **589**	832 **572**	817 **556**	802 **541**
80	938 **743**	931 **733**	924 **724**	918 **715**	911 **705**	904 **696**	898 **687**	891 **679**	878 **663**	866 **647**	853 **632**	841 **618**
100	949 **786**	943 **777**	938 **769**	932 **761**	927 **753**	921 **745**	916 **737**	910 **729**	899 **714**	888 **700**	878 **687**	867 **674**
200	973 **884**	970 **878**	967 **873**	964 **868**	961 **863**	958 **858**	955 **853**	952 **848**	946 **838**	939 **829**	933 **820**	927 **811**
500	989 **951**	988 **949**	987 **946**	985 **944**	984 **941**	982 **939**	981 **937**	980 **934**	977 **930**	974 **925**	971 **921**	969 **917**
∞	1000 **1000**	1000 **1000**	1000 **1000**	1000 **1000**	1000 **1000**	1000 **1000**	1000 **1000**	1000 **1000**	1000 **1000**	1000 **1000**	1000 **1000**	1000 **1000**

x \ $n-x$	30	35	40	45	50	60	80	100	200	500	∞
0	162 **000**	140 **000**	124 **000**	111 **000**	101 **000**	085 **000**	064 **000**	052 **000**	026 **000**	011 **000**	000 **000**
1	216 **000**	189 **000**	168 **000**	151 **000**	137 **000**	116 **000**	088 **000**	071 **000**	036 **000**	015 **000**	000 **000**
2	259 **003**	227 **003**	203 **002**	183 **002**	166 **002**	141 **002**	108 **001**	088 **001**	045 **001**	018 **000**	000 **000**
3	295 **011**	260 **009**	233 **008**	210 **007**	192 **006**	164 **005**	126 **004**	103 **003**	053 **002**	022 **001**	000 **000**
4	326 **020**	289 **018**	260 **016**	235 **014**	215 **013**	184 **011**	143 **008**	116 **007**	061 **003**	025 **001**	000 **000**
5	354 **032**	315 **028**	284 **025**	258 **022**	237 **020**	203 **017**	158 **013**	129 **010**	068 **005**	028 **002**	000 **000**
6	379 **045**	339 **039**	306 **035**	279 **031**	257 **028**	220 **024**	173 **018**	142 **015**	075 **008**	031 **003**	000 **000**
7	402 **058**	361 **051**	327 **045**	299 **041**	275 **037**	237 **031**	186 **024**	153 **019**	081 **010**	033 **004**	000 **000**
8	423 **072**	381 **063**	346 **056**	317 **051**	292 **046**	252 **039**	199 **030**	164 **024**	087 **012**	036 **005**	000 **000**
9	443 **086**	400 **076**	364 **067**	334 **061**	309 **055**	267 **047**	212 **036**	175 **029**	093 **015**	039 **006**	000 **000**
10	461 **100**	418 **088**	381 **079**	351 **071**	324 **065**	281 **055**	224 **043**	185 **035**	099 **018**	041 **007**	000 **000**
11	478 **114**	434 **100**	397 **090**	366 **081**	339 **074**	295 **063**	235 **049**	195 **040**	104 **021**	044 **008**	000 **000**

Продолжение

x \ $n-x$	30	35	40	45	50	60	80	100	200	500	∞
12	494 **127**	450 **113**	412 **101**	380 **092**	352 **084**	307 **072**	246 **056**	205 **045**	110 **024**	047 **010**	000 **000**
13	508 **141**	465 **125**	426 **112**	394 **102**	366 **094**	320 **080**	257 **062**	214 **051**	116 **027**	049 **011**	000 **000**
14	522 **154**	478 **137**	440 **124**	407 **112**	379 **103**	332 **088**	267 **069**	223 **057**	122 **030**	051 **012**	000 **000**
15	536 **167**	490 **149**	452 **135**	418 **123**	390 **112**	343 **096**	276 **076**	231 **062**	127 **033**	054 **013**	000 **000**
16	548 **180**	502 **161**	464 **146**	430 **133**	401 **122**	354 **105**	285 **082**	239 **068**	132 **036**	056 **015**	000 **000**
17	559 **193**	514 **173**	475 **156**	442 **143**	412 **131**	364 **113**	295 **089**	247 **073**	137 **039**	059 **016**	000 **000**
18	570 **205**	525 **184**	486 **167**	453 **153**	423 **141**	374 **122**	304 **096**	255 **079**	142 **042**	061 **018**	000 **000**
19	581 **217**	536 **195**	497 **177**	463 **162**	433 **150**	384 **130**	313 **102**	263 **084**	147 **045**	063 **019**	000 **000**
20	591 **229**	546 **206**	507 **187**	473 **172**	443 **158**	394 **137**	321 **109**	271 **090**	152 **048**	066 **020**	000 **000**
22	609 **251**	565 **227**	526 **207**	492 **190**	462 **176**	411 **153**	337 **122**	286 **101**	162 **054**	070 **023**	000 **000**
24	626 **273**	582 **247**	543 **226**	509 **208**	479 **193**	428 **168**	353 **134**	300 **112**	171 **061**	075 **026**	000 **000**
26	642 **293**	598 **267**	560 **244**	526 **225**	495 **209**	444 **183**	368 **147**	313 **122**	180 **067**	079 **029**	000 **000**
28	656 **312**	613 **285**	575 **262**	541 **242**	510 **225**	459 **198**	382 **159**	326 **133**	189 **073**	083 **031**	000 **000**
30	669 **331**	626 **303**	589 **278**	555 **258**	525 **241**	473 **212**	395 **171**	339 **143**	197 **079**	088 **034**	000 **000**
35	697 **374**	657 **343**	620 **318**	587 **296**	557 **277**	505 **245**	426 **200**	368 **169**	218 **095**	098 **041**	000 **000**
40	722 **411**	682 **380**	646 **354**	614 **330**	585 **310**	534 **276**	453 **227**	394 **193**	237 **110**	108 **048**	000 **000**
45	742 **445**	704 **413**	670 **386**	638 **362**	609 **341**	559 **305**	478 **253**	418 **216**	255 **125**	118 **055**	000 **000**
50	759 **475**	723 **443**	690 **415**	659 **391**	631 **369**	581 **332**	501 **277**	440 **238**	273 **139**	127 **062**	000 **000**
60	788 **527**	755 **495**	724 **466**	695 **441**	668 **419**	620 **380**	541 **321**	479 **278**	305 **167**	145 **076**	000 **000**
80	829 **605**	800 **574**	773 **547**	747 **522**	723 **499**	679 **459**	604 **396**	543 **349**	360 **219**	179 **103**	000 **000**
100	857 **661**	831 **632**	807 **606**	784 **582**	762 **560**	722 **521**	651 **457**	593 **407**	407 **265**	209 **129**	000 **000**
200	921 **803**	905 **782**	890 **763**	875 **745**	861 **727**	833 **695**	781 **640**	735 **593**	565 **435**	332 **243**	000 **000**
500	966 **912**	959 **902**	952 **892**	945 **882**	938 **873**	924 **855**	897 **821**	871 **791**	757 **668**	541 **459**	000 **000**
∞	1000 **1000**	1000 **1000**	1000 **1000**	1000 **1000**	1000 **1000**	1000 **1000**	1000 **1000**	1000 **1000**	1000 **1000**	1000 **1000**	— —

Пример. Пусть требуется найти 99%-ные доверительные пределы для вероятности, если в наблюдениях частость составляла $\frac{7}{25} = 0{,}280$.

Имеем: $x = 7$, $n - x = 25 - 7 = 18$ и доверительные пределы для вероятностей будут: 0,089 и 0,555.

Таблица XX

Значения пяти- и однопроцентных пределов уклонения величины F в зависимости от степеней свободы k_1 и k_2 (см. 6.3.1)

Пятипроцентные пределы $F_{5,\,k_1,\,k_2}$ набраны обычным шрифтом, однопроцентные $F_{1,\,k_1,\,k_2}$ — жирным

k_2 — степени свободы для меньшей дисперсии	k_2	k_1 — степени свободы для большей дисперсии																								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	k_2
	1	161 **4 052**	200 **4 999**	216 **5 403**	225 **5 625**	230 **5 764**	234 **5 859**	237 **5 928**	239 **5 981**	241 **6 022**	242 **6 056**	243 **6 082**	244 **6 106**	245 **6 142**	246 **6 169**	248 **6 208**	249 **6 234**	250 **6 258**	251 **6 286**	252 **6 302**	253 **6 323**	253 **6 334**	254 **6 352**	254 **6 361**	254 **6 366**	1
	2	18,51 **98,49**	19,00 **99,01**	19,16 **99,17**	19,25 **99,25**	19,30 **99,30**	19,33 **99,33**	19,36 **99,34**	19,37 **99,36**	19,38 **99,38**	19,39 **99,40**	19,40 **99,41**	19,41 **99,42**	19,42 **99,43**	19,43 **99,44**	19,44 **99,45**	19,45 **99,46**	19,46 **99,47**	19,47 **99,48**	19,47 **99,48**	19,48 **99,49**	19,49 **99,49**	19,49 **99,49**	19,50 **99,50**	19,50 **99,50**	2
	3	10,13 **34,12**	9,55 **30,81**	9,28 **29,46**	9,12 **28,71**	9,01 **28,24**	8,94 **27,91**	8,88 **27,67**	8,84 **27,49**	8,81 **27,34**	8,78 **27,23**	8,76 **27,13**	8,74 **27,05**	8,71 **26,92**	8,69 **26,83**	8,66 **26,69**	8,64 **26,60**	8,62 **26,50**	8,60 **26,41**	8,58 **26,35**	8,57 **26,27**	8,56 **26,23**	8,54 **26,18**	8,54 **26,14**	8,53 **26,12**	3
	4	7,71 **21,20**	6,94 **18,00**	6,59 **16,69**	6,39 **15,98**	6,26 **15,52**	6,16 **15,21**	6,09 **14,98**	6,04 **14,80**	6,00 **14,66**	5,96 **14,54**	5,93 **14,45**	5,91 **14,37**	5,87 **14,24**	5,84 **14,15**	5,80 **14,02**	5,77 **13,93**	5,74 **13,83**	5,71 **13,74**	5,70 **13,69**	5,68 **13,61**	5,66 **13,57**	5,65 **13,52**	5,64 **13,48**	5,63 **13,46**	4
	5	6,61 **16,26**	5,79 **13,27**	5,41 **12,06**	5,19 **11,39**	5,05 **10,97**	4,95 **10,67**	4,88 **10,45**	4,82 **10,27**	4,78 **10,15**	4,74 **10,05**	4,70 **9,96**	4,68 **9,89**	4,64 **9,77**	4,60 **9,68**	4,56 **9,55**	4,53 **9,47**	4,50 **9,38**	4,46 **9,29**	4,44 **9,24**	4,42 **9,17**	4,40 **9,13**	4,38 **9,07**	4,37 **9,04**	4,36 **9,02**	5
	6	5,99 **13,74**	5,14 **10,92**	4,76 **9,78**	4,53 **9,15**	4,39 **8,75**	4,28 **8,47**	4,21 **8,26**	4,15 **8,10**	4,10 **7,98**	4,06 **7,87**	4,03 **7,79**	4,00 **7,72**	3,96 **7,60**	3,92 **7,52**	3,87 **7,39**	3,84 **7,31**	3,81 **7,23**	3,77 **7,14**	3,75 **7,09**	3,72 **7,02**	3,71 **6,99**	3,69 **6,94**	3,68 **6,90**	3,67 **6,88**	6
	7	5,59 **12,25**	4,74 **9,55**	4,35 **8,45**	4,12 **7,85**	3,97 **7,46**	3,87 **7,19**	3,79 **7,00**	3,73 **6,84**	3,68 **6,71**	3,63 **6,62**	3,60 **6,54**	3,57 **6,47**	3,52 **6,35**	3,49 **6,27**	3,44 **6,15**	3,41 **6,07**	3,38 **5,98**	3,34 **5,90**	3,32 **5,85**	3,29 **5,78**	3,28 **5,75**	3,25 **5,70**	3,24 **5,67**	3,23 **5,65**	7
	8	5,32 **11,26**	4,46 **8,65**	4,07 **7,59**	3,84 **7,01**	3,69 **6,63**	3,58 **6,37**	3,50 **6,19**	3,44 **6,03**	3,39 **5,91**	3,34 **5,82**	3,31 **5,74**	3,28 **5,67**	3,23 **5,56**	3,20 **5,48**	3,15 **5,36**	3,12 **5,28**	3,08 **5,20**	3,05 **5,11**	3,03 **5,06**	3,00 **5,00**	2,98 **4,96**	2,96 **4,91**	2,94 **4,88**	2,93 **4,86**	8
	9	5,12 **10,56**	4,26 **8,02**	3,86 **6,99**	3,63 **6,42**	3,48 **6,06**	3,37 **5,80**	3,29 **5,62**	3,23 **5,47**	3,18 **5,35**	3,13 **5,26**	3,10 **5,18**	3,07 **5,11**	3,02 **5,00**	2,98 **4,92**	2,93 **4,80**	2,90 **4,73**	2,86 **4,64**	2,82 **4,56**	2,80 **4,51**	2,77 **4,45**	2,76 **4,41**	2,73 **4,36**	2,72 **4,33**	2,71 **4,31**	9
	10	4,96 **10,04**	4,10 **7,56**	3,71 **6,55**	3,48 **5,99**	3,33 **5,64**	3,22 **5,39**	3,14 **5,21**	3,07 **5,06**	3,02 **4,95**	2,97 **4,85**	2,94 **4,78**	2,91 **4,71**	2,86 **4,60**	2,82 **4,52**	2,77 **4,41**	2,74 **4,33**	2,70 **4,25**	2,67 **4,17**	2,64 **4,12**	2,61 **4,05**	2,59 **4,01**	2,56 **3,96**	2,55 **3,93**	2,54 **3,91**	10
	11	4,84 **9,85**	3,98 **7,20**	3,59 **6,22**	3,36 **5,67**	3,20 **5,32**	3,09 **5,07**	3,01 **4,88**	2,95 **4,74**	2,90 **4,63**	2,86 **4,54**	2,82 **4,46**	2,79 **4,40**	2,74 **4,29**	2,70 **4,21**	2,65 **4,10**	2,61 **4,02**	2,57 **3,94**	2,53 **3,86**	2,50 **3,80**	2,47 **3,74**	2,45 **3,70**	2,42 **3,66**	2,41 **3,62**	2,40 **3,60**	11
	12	4,75 **9,33**	3,88 **6,93**	3,49 **5,95**	3,26 **5,41**	3,11 **5,06**	3,00 **4,82**	2,92 **4,65**	2,85 **4,50**	2,80 **4,39**	2,76 **4,30**	2,72 **4,22**	2,69 **4,16**	2,64 **4,05**	2,60 **3,98**	2,54 **3,86**	2,50 **3,78**	2,46 **3,70**	2,42 **3,61**	2,40 **3,56**	2,36 **3,49**	2,35 **3,46**	2,32 3,41	2,31 **3,38**	2,30 **3,36**	12

Продолжение

k_1 — степени свободы для большей дисперсии

k_2 — степени свободы для меньшей дисперсии	k_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	k_2
	13	4,67 **9,07**	3,80 **6,70**	3,41 **5,74**	3,18 **5,20**	3,02 **4,86**	2,92 **4,62**	2,84 **4,44**	2,77 **4,30**	2,72 **4,19**	2,67 **4,10**	2,63 **4,02**	2,60 **3,96**	2,55 **3,85**	2,51 **3,78**	2,46 **3,67**	2,42 **3,59**	2,38 **3,51**	2,34 **3,42**	2,32 **3,37**	2,28 **3,30**	2,26 **3,27**	2,24 **3,21**	2,22 **3,18**	2,21 **3,16**	13
	14	4,60 **8,86**	3,74 **6,51**	3,34 **5,56**	3,11 **5,03**	2,96 **4,69**	2,85 **4,46**	2,77 4,28	2,70 **4,14**	2,65 **4,03**	2,60 **3,94**	2,56 **3,86**	2,53 **3,80**	2,48 **3,70**	2,44 **3,62**	2,39 **3,51**	2,35 **3,43**	2,31 **3,34**	2,27 **3,26**	2,24 **3,21**	2,21 **3,14**	2,19 **3,11**	2,16 **3,06**	2,14 **3,02**	2,13 **3,00**	14
	15	4,54 **8,68**	3,68 **6,36**	3,29 **5,42**	3,06 **4,89**	2,90 **4,56**	2,79 **4,32**	2,70 **4,14**	2,64 **4,00**	2,59 **3,89**	2,55 **3,80**	2,51 **3,73**	2,48 **3,67**	2,43 **3,56**	2,39 **3,48**	2,33 **3,36**	2,29 **3,29**	2,25 **3,20**	2,21 **3,12**	2,18 **3,07**	2,15 **3,00**	2,12 **2,97**	2,10 **2,92**	2,08 **2,89**	2,07 **2,87**	15
	16	4,49 **8,53**	3,63 **6,23**	3,24 **5,29**	3,01 **4,77**	2,85 **4,44**	2,74 **4,20**	2,66 **4,03**	2,59 **3,89**	2,54 **3,78**	2,49 **3,69**	2,45 **3,61**	2,42 **3,55**	2,37 **3,45**	2,33 **3,37**	2,28 **3,25**	2,24 **3,18**	2,20 **3,10**	2,16 **3,01**	2,13 **2,96**	2,09 **2,89**	2,07 **2,86**	2,04 **2,80**	2,02 **2,77**	2,01 **2,75**	16
	17	4,45 **8,40**	3,59 **6,11**	3,20 **5,18**	2,96 **4,67**	2,81 **4,34**	2,70 **4,10**	2,62 **3,93**	2,55 **3,79**	2,50 **3,68**	2,45 **3,59**	2,41 **3,52**	2,38 **3,45**	2,33 **3,35**	2,29 **3,27**	2,23 **3,16**	2,19 **3,08**	2,15 **3,00**	2,11 **2,92**	2,08 **2,86**	2,04 **2,79**	2,02 **2,76**	1,99 **2,70**	1,97 **2,67**	1,96 **2,65**	17
	18	4,41 **8,28**	3,55 **6,01**	3,16 **5,09**	2,93 **4,58**	2,77 **4,25**	2,66 **4,01**	2,58 **3,85**	2,51 **3,71**	2,46 **3,60**	2,41 **3,51**	2,37 **3,44**	2,34 **3,37**	2,29 **3,27**	2,25 **3,19**	2,19 **3,07**	2,15 **3,00**	2,11 **2,91**	2,07 **2,83**	2,04 **2,78**	2,00 **2,71**	1,98 **2,68**	1,95 **2,62**	1,93 **2,59**	1,92 **2,57**	18
	19	4,38 **8,18**	3,52 **5,93**	3,13 **5,01**	2,90 **4,50**	2,74 **4,17**	2,63 **3,94**	2,55 **3,77**	2,48 **3,63**	2,43 **3,52**	2,38 **3,43**	2,34 **3,36**	2,31 **3,30**	2,26 **3,19**	2,21 **3,12**	2,15 **3,00**	2,11 **2,92**	2,07 **2,84**	2,02 **2,76**	2,00 **2,70**	1,96 **2,63**	1,94 **2,60**	1,91 **2,54**	1,90 **2,51**	1,88 **2,49**	19
	20	4,35 **8,10**	3,49 **5,85**	3,10 **4,94**	2,87 **4,43**	2,71 **4,10**	2,60 **3,87**	2,52 **3,71**	2,45 **3,56**	2,40 **3,45**	2,35 **3,37**	2,31 **3,30**	2,28 **3,23**	2,23 **3,13**	2,18 **3,05**	2,12 **2,94**	2,08 **2,86**	2,04 **2,77**	1,99 **2,69**	1,96 **2,63**	1,92 **2,56**	1,90 **2,53**	1,87 **2,47**	1,85 **2,44**	1,84 **2,42**	20
	21	4,32 **8,02**	3,47 **5,78**	3,07 **4,87**	2,84 **4,37**	2,68 **4,04**	2,57 **3,81**	2,49 **3,65**	2,42 **3,51**	2,37 **3,40**	2,32 **3,31**	2,28 **3,24**	2,25 **3,17**	2,20 **3,07**	2,15 **2,99**	2,09 **2,88**	2,05 **2,80**	2,00 **2,72**	1,96 **2,63**	1,93 **2,58**	1,89 **2,51**	1,87 **2,47**	1,84 **2,42**	1,82 **2,38**	1,81 **2,36**	21
	22	4,30 **7,94**	3,44 **5,72**	3,05 **4,82**	2,82 **4,31**	2,66 **3,99**	2,55 **3,76**	2,47 **3,59**	2,40 **3,45**	2,35 **3,35**	2,30 **3,26**	2,26 **3,18**	2,23 **3,12**	2,18 **3,02**	2,13 **2,94**	2,07 **2,83**	2,03 **2,75**	1,98 **2,67**	1,93 **2,58**	1,91 **2,53**	1,87 **2,46**	1,84 **2,42**	1,81 **2,37**	1,80 **2,33**	1,78 **2,31**	22
	23	4,28 **7,88**	3,42 **5,66**	3,03 **4,76**	2,80 **4,26**	2,64 **3,94**	2,53 **3,71**	2,45 **3,54**	2,38 **3,41**	2,32 **3,30**	2,28 **3,21**	2,24 **3,14**	2,20 **3,07**	2,14 **2,97**	2,10 **2,89**	2,04 **2,78**	2,00 **2,70**	1,96 **2,62**	1,91 **2,53**	1,88 **2,48**	1,84 **2,41**	1,82 **2,37**	1,79 **2,32**	1,77 **2,28**	1,76 **2,26**	23
	24	4,26 **7,82**	3,40 **5,61**	3,01 **4,72**	2,78 **4,22**	2,62 **3,90**	2,51 **3,67**	2,43 **3,50**	2,36 **3,36**	2,30 **3,25**	2,26 **3,17**	2,22 **3,09**	2,18 **3,03**	2,13 **2,93**	2,09 **2,85**	2,02 **2,74**	1,98 **2,66**	1,94 **2,58**	1,89 **2,49**	1,86 **2,44**	1,82 **2,36**	1,80 **2,33**	1,76 **2,27**	1,74 **2,23**	1,73 **2,21**	24
	25	4,24 **7,77**	3,38 **5,57**	2,99 **4,68**	2,76 **4,18**	2,60 **3,86**	2,49 **3,63**	2,41 **3,46**	2,34 **3,32**	2,28 **3,21**	2,24 **3,13**	2,20 **3,05**	2,16 **2,99**	2,11 **2,89**	2,06 **2,81**	2,00 **2,70**	1,96 **2,62**	1,92 **2,54**	1,87 **2,45**	1,84 **2,40**	1,80 **2,32**	1,77 **2,29**	1,74 **2,23**	1,72 **2,19**	1,71 **2,17**	25
	26	4,22 **7,72**	3,37 **5,53**	2,98 **4,64**	2,74 **4,14**	2,59 **3,82**	2,47 **3,59**	2,39 **3,42**	2,32 **3,29**	2,27 **3,17**	2,22 **3,09**	2,18 **3,02**	2,15 **2,96**	2,10 **2,86**	2,05 **2,77**	1,99 **2,66**	1,95 **2,58**	1,90 **2,50**	1,85 **2,41**	1,82 **2,36**	1,78 **2,28**	1,76 **2,25**	1,72 **2,19**	1,70 **2,15**	1,69 **2,13**	26

Продолжение

k_2 — степени свободы для меньшей дисперсии	k_1 — степени свободы для большей дисперсии																							
k_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	k_2
27	4,21 **7,68**	3,35 **5,49**	2,96 **4,60**	2,73 **4,11**	2,57 **3,79**	2,46 **3,56**	2,37 **3,39**	2,30 **3,26**	2,25 **3,14**	2,20 **3,06**	**2,16** **2,98**	2,13 **2,93**	2,08 **2,83**	2,03 **2,74**	1,97 **2,63**	1,93 **2,55**	1,88 **2,47**	1,84 **2,38**	1,80 **2,33**	1,76 **2,25**	1,74 **2,21**	1,71 **2,16**	1,68 **2,12**	1,67 **2,10**	27
28	4,20 **7,64**	3,34 **5,45**	2,95 **4,57**	2,71 **4,07**	2,56 **3,76**	2,44 **3,53**	2,36 **3,36**	2,29 **3,23**	2,24 **3,11**	2,19 **3,03**	2,15 **2,95**	2,12 **2,90**	**2,06** **2,80**	2,02 **2,71**	1,96 **2,60**	1,91 **2,52**	1,87 **2,44**	1,81 **2,35**	1,78 **2,30**	1,75 **2,22**	1,72 **2,18**	1,69 **2,13**	1,67 **2,09**	1,65 **2,06**	28
29	4,18 **7,60**	3,33 **5,42**	2,93 **4,54**	2,70 **4,04**	2,54 **3,73**	2,43 **3,50**	2,35 **3,33**	2,28 **3,20**	2,22 **3,08**	2,18 **3,00**	2,14 **2,92**	2,10 **2,87**	2,05 **2,77**	2,00 **2,68**	1,94 **2,57**	1,90 **2,49**	1,85 **2,41**	1,80 **2,32**	1,77 **2,27**	1,73 **2,19**	1,71 **2,15**	1,68 **2,10**	1,65 **2,06**	1,64 **2,03**	29
30	4,17 **7,56**	3,32 **5,39**	2,92 **4,51**	2,69 **4,02**	2,53 **3,70**	2,42 **3,47**	2,34 **3,30**	2,27 **3,17**	2,21 **3,06**	2,16 **2,98**	2,12 **2,90**	2,09 **2,84**	2,04 **2,74**	1,99 **2,66**	1,93 **2,55**	1,89 **2,47**	1,84 **2,38**	1,79 **2,29**	1,76 **2,24**	1,72 **2,16**	1,69 **2,13**	1,66 **2,07**	1,64 **2,03**	1,62 **2,01**	30
32	4,15 **7,50**	3,30 **5,34**	2,90 **4,46**	2,67 **3,97**	2,51 **3,66**	2,40 **3,42**	2,32 **3,25**	2,25 **3,12**	2,19 **3,01**	2,14 **2,94**	2,10 **2,86**	2,07 **2,80**	2,02 **2,70**	1,97 **2,62**	1,91 **2,51**	1,86 **2,42**	1,82 **2,34**	1,76 **2,25**	1,74 **2,20**	1,69 **2,12**	1,67 **2,08**	1,64 **2,02**	1,61 **1,98**	1,59 **1,96**	32
34	4,13 **7,44**	3,28 **5,29**	2,88 **4,42**	2,65 **3,93**	2,49 **3,61**	2,38 **3,38**	2,30 **3,21**	2,23 **3,08**	2,17 **2,97**	2,12 **2,89**	2,08 **2,82**	2,05 **2,76**	2,00 **2,66**	1,95 **2,58**	1,89 **2,47**	1,84 **2,38**	1,80 **2,30**	1,74 **2,21**	1,71 **2,15**	1,67 **2,08**	1,64 **2,04**	1,61 **1,98**	1,59 **1,94**	1,57 **1,91**	34
36	4,11 **7,39**	3,26 **5,25**	2,86 **4,38**	2,63 **3,89**	2,48 **3,58**	2,36 **3,35**	2,28 **3,18**	2,21 **3,04**	2,15 **2,94**	2,10 **2,86**	2,06 **2,78**	2,03 **2,72**	1,98 **2,62**	1,93 **2,54**	1,87 **2,43**	1,82 **2,35**	1,78 **2,26**	1,72 **2,17**	1,69 **2,12**	1,65 **2,04**	1,62 **2,00**	1,59 **1,94**	1,56 **1,90**	1,55 **1,87**	36
38	4,10 **7,35**	3,25 **5,21**	2,85 **4,34**	2,65 **3,86**	2,46 **3,54**	2,35 **3,32**	2,26 **3,15**	2,19 **3,02**	2,14 **2,91**	2,09 **2,82**	2,05 **2,75**	2,02 **2,69**	1,96 **2,59**	1,92 **2,51**	1,85 **2,40**	1,80 **2,32**	1,76 **2,22**	1,71 **2,14**	1,67 **2,08**	1,63 **2,00**	1,60 **1,97**	1,57 **1,90**	1,54 **1,86**	1,53 **1,84**	38
40	4,08 **7,31**	3,23 **5,18**	2,84 **4,31**	2,61 **3,83**	2,45 **3,51**	2,34 **3,29**	2,25 **3,12**	2,18 **2,99**	2,12 **2,88**	2,07 **2,80**	2,04 **2,73**	2,00 **2,66**	1,95 **2,56**	1,90 **2,49**	1,84 **2,37**	1,79 **2,29**	1,74 **2,20**	1,69 **2,11**	1,66 **2,05**	1,61 **1,97**	1,59 **1,94**	1,55 **1,88**	1,53 **1,84**	1,51 **1,81**	40
42	4,07 **7,27**	3,22 **5,15**	2,83 **4,29**	2,59 **3,80**	2,44 **3,49**	2,32 **3,26**	2,24 **3,10**	2,17 **2,96**	2,11 **2,86**	2,06 **2,77**	2,02 **2,70**	1,99 **2,64**	1,94 **2,54**	1,89 **2,46**	1,82 **2,35**	1,78 **2,26**	1,73 **2,17**	1,68 **2,08**	1,64 **2,02**	1,60 **1,94**	1,57 **1,91**	1,54 **1,85**	1,51 **1,80**	1,49 **1,78**	42
44	4,06 **7,24**	3,21 **5,12**	2,82 **4,26**	2,58 **3,78**	2,43 **3,46**	2,31 **3,24**	2,23 **3,07**	2,16 **2,94**	2,10 **2,84**	2,05 **2,75**	2,01 **2,68**	1,98 **2,62**	1,92 **2,52**	1,88 **2,44**	1,81 **2,32**	1,76 **2,24**	1,72 **2,15**	1,66 **2,06**	1,63 **2,00**	1,58 **1,92**	1,56 **1,88**	1,52 **1,82**	1,50 **1,78**	1,48 **1,75**	44
46	4,05 **7,21**	3,20 **5,10**	2,81 **4,24**	2,57 **3,76**	2,42 **3,44**	2,30 **3,22**	2,22 **3,05**	2,14 **2,92**	2,09 **2,82**	2,04 **2,73**	2,00 **2,66**	1,97 **2,60**	1,91 **2,50**	1,87 **2,42**	1,80 **2,30**	1,75 **2,22**	1,71 **2,13**	1,65 **2,04**	1,62 **1,98**	1,57 **1,90**	1,54 **1,86**	1,51 **1,80**	1,48 **1,76**	1,46 **1,72**	46
48	4,04 **7,19**	3,19 **5,08**	2,80 **4,22**	2,56 **3,74**	2,41 **3,42**	2,30 **3,20**	2,21 **3,04**	2,14 **2,90**	2,08 **2,80**	2,03 **2,71**	1,99 **2,64**	1,96 **2,58**	1,90 **2,48**	1,86 **2,40**	1,79 **2,28**	1,74 **2,20**	1,70 **2,11**	1,64 **2,02**	1,61 **1,96**	1,56 **1,88**	1,53 **1,84**	1,50 **1,78**	1,47 **1,73**	1,45 **1,70**	48
50	4,03 **7,17**	3,18 **5,06**	2,79 **4,20**	2,56 **3,72**	2,40 **3,41**	2,29 **3,18**	2,20 **3,02**	2,13 **2,88**	2,07 **2,78**	2,02 **2,70**	1,98 **2,62**	1,95 **2,56**	1,90 **2,46**	1,85 **2,39**	1,78 **2,26**	1,74 **2,18**	1,69 **2,10**	1,63 **2,00**	1,60 **1,94**	1,55 **1,86**	1,52 **1,82**	1,48 **1,76**	1,46 **1,71**	1,44 **1,68**	50

Продолжение

k_2 — степени свободы для меньшей дисперсии	k_1 — степени свободы для большей дисперсии																							
k_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	k_2
55	4,02 **7,12**	3,17 **5,01**	2,78 **4,16**	2,54 **3,68**	2,38 **3,37**	2,27 **3,15**	2,18 **2,98**	2,11 **2,85**	2,05 **2,75**	2,00 **2,66**	1,97 **2,59**	1,93 **2,53**	1,88 **2,43**	1,83 **2,35**	1,76 **2,23**	1,72 **2,15**	1,67 **2,06**	1,61 **1,96**	1,58 **1,99**	1,52 **1,82**	1,50 **1,78**	1,46 **1,71**	1,43 **1,66**	1,41 **1,64**	55
60	4,00 **7,08**	3,15 **4,98**	2,76 **4,13**	2,52 **3,65**	2,37 **3,34**	2,25 **3,12**	2,17 **2,95**	2,10 **2,82**	2,04 **2,72**	1,99 **2,63**	1,95 **2,56**	1,92 **2,50**	1,86 **2,40**	1,81 **2,32**	1,75 **2,20**	1,70 **2,12**	1,65 **2,03**	1,59 **1,93**	1,56 **1,87**	1,50 **1,79**	1,48 **1,74**	1,44 **1,68**	1,41 **1,63**	1,39 **1,60**	60
65	3,99 **7,04**	3,14 **4,95**	2,75 **4,10**	2,51 **3,62**	2,36 **3,31**	2,24 **3,09**	2,15 **2,93**	2,08 **2,79**	2,02 **2,70**	1,98 **2,61**	1,94 **2,54**	1,90 **2,47**	1,85 **2,37**	1,80 **2,30**	1,73 **2,18**	1,68 **2,09**	1,63 **2,00**	1,57 **1,90**	1,54 **1,84**	1,49 **1,76**	1,46 **1,71**	1,42 **1,64**	1,39 **1,60**	1,37 **1,56**	65
70	3,98 **7,01**	3,13 **4,92**	2,74 **4,08**	2,50 **3,60**	2,35 **3,29**	2,23 **3,07**	2,14 **2,91**	2,07 **2,77**	2,01 **2,67**	1,97 **2,59**	1,93 **2,51**	1,89 **2,45**	1,84 **2,35**	1,79 **2,28**	1,72 **2,15**	1,67 **2,07**	1,62 **1,98**	1,56 **1,88**	1,53 **1,82**	1,47 **1,74**	1,45 **1,69**	1,40 **1,62**	1,37 **1,56**	1,35 **1,53**	70
80	3,96 **6,96**	3,11 **4,88**	2,72 **4,04**	2,48 **3,56**	2,33 **3,25**	2,21 **3,04**	2,12 **2,87**	2,05 **2,74**	1,99 **2,64**	1,95 **2,55**	1,91 **2,48**	1,89 **2,41**	1,82 **2,32**	1,77 **2,24**	1,70 **2,11**	1,65 **2,03**	1,60 **1,94**	1,54 **1,84**	1,51 **1,78**	1,45 **1,70**	1,42 **1,65**	1,38 **1,57**	1,35 **1,52**	1,32 **1,49**	80
100	3,94 **6,90**	3,09 **4,82**	2,70 **3,98**	2,46 **3,51**	2,30 **3,20**	2,19 **2,99**	2,10 **2,82**	2,03 **2,69**	1,97 **2,59**	1,92 **2,51**	1,88 **2,43**	1,85 **2,36**	1,79 **2,26**	1,75 **2,19**	1,68 **2,06**	1,63 **1,98**	1,57 **1,89**	1,51 **1,79**	1,48 **1,73**	1,42 **1,64**	1,39 **1,59**	1,34 **1,51**	1,30 **1,46**	1,28 **1,43**	100
125	3,92 **6,84**	3,07 **4,78**	2,68 **3,94**	2,44 **3,47**	2,29 **3,17**	2,17 **2,95**	2,08 **2,79**	2,01 **2,65**	1,95 **2,56**	1,90 **2,47**	1,86 **2,40**	1,83 **2,33**	1,77 **2,23**	1,72 **2,15**	1,65 **2,03**	1,60 **1,94**	1,55 **1,85**	1,49 **1,75**	1,45 **1,68**	1,39 **1,59**	1,36 **1,54**	1,31 **1,46**	1,27 **1,40**	1,25 **1,37**	125
150	3,91 **6,81**	3,06 **4,75**	2,67 **3,91**	2,43 **3,41**	2,27 **3,14**	2,16 **2,92**	2,07 **2,76**	2,00 **2,62**	1,94 **2,53**	1,89 **2,44**	1,85 **2,37**	1,82 **2,30**	1,76 **2,20**	1,71 **2,12**	1,64 **2,00**	1,59 **1,91**	1,54 **1,83**	1,47 **1,72**	1,44 **1,66**	1,37 **1,56**	1,34 **1,51**	1,29 **1,43**	1,25 **1,37**	1,22 **1,33**	150
200	3,89 **6,76**	3,04 **4,71**	2,65 **3,88**	2,41 **3,41**	2,26 **3,11**	2,14 **2,90**	2,05 **2,73**	1,98 **2,60**	1,92 **2,50**	1,87 **2,41**	1,83 **2,34**	1,80 **2,28**	1,74 **2,17**	1,69 **2,09**	1,62 **1,97**	1,57 **1,88**	1,52 **1,79**	1,45 **1,69**	1,42 **1,62**	1,35 **1,53**	1,32 **1,48**	1,26 **1,39**	1,22 **1,33**	1,19 **1,28**	200
400	3,86 **6,70**	3,02 **4,66**	2,62 **3,83**	2,39 **3,36**	2,23 **3,06**	2,12 **2,85**	2,03 **2,69**	1,96 **2,55**	1,90 **2,46**	1,85 **2,37**	1,81 **2,29**	1,78 **2,23**	1,72 **2,12**	1,67 **2,04**	1,60 **1,92**	1,54 **1,84**	1,49 **1,74**	1,42 **1,64**	1,38 **1,57**	1,32 **1,47**	1,28 **1,42**	1,22 **1,32**	1,16 **1,24**	1,13 **1,19**	400
1000	3,85 **6,66**	3,00 **4,62**	2,61 **3,80**	2,38 **3,34**	2,22 **3,04**	2,10 **2,82**	2,02 **2,66**	1,95 **2,53**	1,89 **2,43**	1,84 **2,34**	1,80 **2,26**	1,76 **2,20**	1,70 **2,09**	1,65 **2,01**	1,58 **1,89**	1,53 **1,81**	1,47 **1,71**	1,41 **1,61**	1,36 **1,54**	1,30 **1,44**	1,26 **1,38**	1,19 **1,28**	1,13 **1,19**	1,08 **1,11**	1000
∞	3,84 **6,64**	2,99 **4,60**	2,60 **3,78**	2,37 **3,32**	2,21 **3,02**	2,09 **2,80**	2,01 **2,64**	1,94 **2,51**	1,88 **2,41**	1,83 **2,32**	1,79 **2,24**	1,75 **2,18**	1,69 **2,07**	1,64 **1,99**	1,57 **1,87**	1,52 **1,79**	1,46 **1,69**	1,40 **1,59**	1,35 **1,52**	1,28 **1,41**	1,24 **1,36**	1,17 **1,25**	1,11 **1,15**	1,00 **1,09**	∞

Пример. Требуется определить F для отношения двух дисперсий $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ ($\sigma_1^2 > \sigma_2$), если известно, что $k_1 = n - 1 = 25 - 1 = 24$ и $k_2 = 12 - 1 = 11$.

Имеем: при вероятности 0,95 $F = 2{,}61$ и при вероятности 0,99 $F = 4{,}02$.

Таблица XXI

Пяти- и однопроцентные пределы для отношения G_i наибольшей эмпирической дисперсии к сумме k эмпирических дисперсий, полученных из k независимых выборок объема n (см. 6.4.3)

Пятипроцентные пределы напечатаны обычным шрифтом, а однопроцентные — жирным.

k \ $n-1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	36	144	∞
2	0,9985	0,9750	0,9392	0,9057	0,8772	0,8534	0,8332	0,8159	0,8010	0,7880	0,7341	0,6602	0,5813	0,5000
	0,9999	**0,9950**	**0,9794**	**0,9586**	**0,9373**	**0,9172**	**0,8988**	**0,8823**	**0,8674**	**0,8539**	**0,7949**	**0,7067**	**0,6062**	**0,5000**
3	0,9669	0,8709	0,7977	0,7457	0,7071	0,6771	0,6530	0,6333	0,6167	0,6025	0,5466	0,4748	0,4031	0,3333
	0,9933	**0,9423**	**0,8831**	**0,8335**	**0,7933**	**0,7606**	**0,7335**	**0,7107**	**0,6912**	**0,6743**	**0,6059**	**0,5153**	**0,4230**	**0,3333**
4	0,9065	0,7679	0,6841	0,6287	0,5895	0,5598	0,5365	0,5175	0,5017	0,4884	0,4366	0,3720	0,3093	0,2500
	0,9676	**0,8643**	**0,7814**	**0,7212**	**0,6761**	**0,6410**	**0,6129**	**0,5897**	**0,5702**	**0,5536**	**0,4884**	**0,4057**	**0,3251**	**0,2500**
5	0,8412	0,6838	0,5981	0,5441	0,5065	0,4783	0,4564	0,4387	0,4241	0,4118	0,3645	0,3066	0,2513	0,2000
	0,9279	**0,7885**	**0,6957**	**0,6329**	**0,5875**	**0,5531**	**0,5259**	**0,5037**	**0,4854**	**0,4697**	**0,4094**	**0,3351**	**0,2644**	**0,2000**
6	0,7808	0,6161	0,5321	0,4803	0,4447	0,4184	0,3980	0,3817	0,3682	0,3568	0,3135	0,2612	0,2119	0,1667
	0,8828	**0,7218**	**0,6258**	**0,5635**	**0,5195**	**0,4866**	**0,4608**	**0,4401**	**0,4229**	**0,4084**	**0,3529**	**0,2858**	**0,2229**	**0,1667**
7	0,7271	0,5612	0,4800	0,4307	0,3974	0,3726	0,3535	0,3384	0,3259	0,3154	0,2756	0,2278	0,1833	0,1429
	0,8376	**0,6644**	**0,5685**	**0,5080**	**0,4659**	**0,4347**	**0,4105**	**0,3911**	**0,3751**	**0,3616**	**0,3105**	**0,2494**	**0,1929**	**0,1429**
8	0,6798	0,5157	0,4377	0,3910	0,3595	0,3362	0,3185	0,3043	0,2926	0,2829	0,2462	0,2022	0,1616	0,1250
	0,7945	**0,6152**	**0,5209**	**0,4627**	**0,4226**	**0,3932**	**0,3704**	**0,3522**	**0,3373**	**0,3248**	**0,2779**	**0,2214**	**0,1709**	**0,1250**
9	0,6385	0,4775	0,4027	0,3584	0,3286	0,3067	0,2901	0,2768	0,2659	0,2568	0,2226	0,1820	0,1446	0,1111
	0,7544	**0,5727**	**0,4810**	**0,4251**	**0,3870**	**0,3592**	**0,3378**	**0,3207**	**0,3067**	**0,2950**	**0,2514**	**0,1992**	**0,1521**	**0,1111**
10	0,6020	0,4450	0,3733	0,3311	0,3029	0,2823	0,2666	0,2541	0,2439	0,2353	0,2032	0,1655	0,1308	0,1000
	0,7175	**0,5358**	**0,4469**	**0,3934**	**0,3572**	**0,3308**	**0,3106**	**0,2945**	**0,2813**	**0,2704**	**0,2297**	**0,1811**	**0,1376**	**0,1000**

k \ $n-1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	36	144	∞
12	0,5410	0,3924	0,3264	0,2880	0,2624	0,2439	0,2299	0,2187	0,2098	0,2020	0,1737	0,1403	0,1100	0,0833
	0,6528	**0,4751**	**0,3919**	**0,3428**	**0,3099**	**0,2861**	**0,2680**	**0,2535**	**0,2419**	**0,2320**	**0,1961**	**0,1535**	**0,1157**	**0,0833**
15	0,4709	0,3346	0,2758	0,2419	0,2195	0,2034	0,1911	0,1815	0,1736	0,1671	0,1429	0,1144	0,0889	0,0667
	0,5747	**0,4069**	**0,3317**	**0,2882**	**0,2593**	**0,2386**	**0,2228**	**0,2104**	**0,2002**	**0,1918**	**0,1612**	**0,1251**	**0,0934**	**0,0667**
20	0,3894	0,2705	0,2205	0,1921	0,1735	0,1602	0,1501	0,1422	0,1357	0,1303	0,1108	0,0879	0,0675	0,0500
	0,4799	**0,3297**	**0,2654**	**0,2288**	**0,2048**	**0,1877**	**0,1748**	**0,1646**	**0,1567**	**0,1501**	**0,1248**	**0,0960**	**0,0709**	**0,0500**
24	0,3434	0,2354	0,1907	0,1656	0,1493	0,1374	0,1286	0,1216	0,1160	0,1113	0,0942	0,0743	0,0567	0,0417
	0,4247	**0,2871**	**0,2295**	**0,1970**	**0,1759**	**0,1608**	**0,1495**	**0,1406**	**0,1338**	**0,1283**	**0,1060**	**0,0810**	**0,0595**	**0,0417**
30	0,2929	0,1980	0,1593	0,1377	0,1237	0,1137	0,1061	0,1002	0,0958	0,0921	0,0771	0,0604	0,0457	0,0333
	0,3632	**0,2412**	**0,1913**	**0,1635**	**0,1454**	**0,1327**	**0,1232**	**0,1157**	**0,1100**	**0,1054**	**0,0867**	**0,0658**	**0,0480**	**0,0333**
40	0,2370	0,1576	0,1259	0,1082	0,0968	0,0887	0,0827	0,0780	0,0745	0,0713	0,0595	0,0462	0,0347	0,0250
	0,2940	**0,1915**	**0,1508**	**0,1281**	**0,1135**	**0,1033**	**0,0957**	**0,0898**	**0,0853**	**0,0816**	**0,0668**	**0,0503**	**0,0363**	**0,0250**
60	0,1737	0,1131	0,0895	0,0765	0,0682	0,0623	0,0583	0,0552	0,0520	0,0497	0,0411	0,0316	0,0234	0,0167
	0,2151	**0,1371**	**0,1069**	**0,0902**	**0,0796**	**0,0722**	**0,0668**	**0,0625**	**0,0594**	**0,0567**	**0,0461**	**0,0344**	**0,0245**	**0,0167**
120	0,0998	0,0632	0,0495	0,0419	0,0371	0,0337	0,0312	0,0292	0,0279	0,0266	0,0218	0,0165	0,0120	0,0083
	0,1225	**0,0759**	**0,0585**	**0,0489**	**0,0429**	**0,0387**	**0,0357**	**0,0334**	**0,0316**	**0,0302**	**0,0242**	**0,0178**	**0,0125**	**0,0083**
∞	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Пример. Требуется определить 5%-ный предел отношения наибольшей эмпирической дисперсии из 20 таких дисперсий к сумме всех 20 дисперсий, полученных в 20 независимых выборках объема 8 каждая.

Имеем: при $n-1=8-1=7$ $G_i=0{,}1501$.

Таблица XXII

Квантили нормального распределения $z_p = u_p + 5$, где u_p определяется из соотношения $\frac{p}{100} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u_p} e^{-\frac{v^2}{2}} dv$ (см. 6.6.1)

$100P$	Десятые доли процента									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	—	1,910	2,122	2,252	2,348	2,424	2,488	2,543	2,591	2,634
1	2,674	2,710	2,743	2,774	2,803	2,830	2,856	2,880	2,903	2,925
2	2,946	2,966	2,986	3,005	3,023	3,040	3,057	3,073	3,089	3,104
3	3,119	3,134	3,148	3,162	3,175	3,188	3,201	3,213	3,226	3,238
4	3,249	3,261	3,272	3,283	3,294	3,305	3,315	3,325	3,335	3,345
5	3,355	3,365	3,374	3,384	3,393	3,402	3,411	3,420	3,428	3,437
6	3,445	3,454	3,462	3,470	3,478	3,486	3,494	3,501	3,509	3,517
7	3,524	3,532	3,539	3,546	3,553	3,560	3,567	3,574	3,581	3,588
8	3,595	3,602	3,608	3,615	3,621	3,628	3,634	3,641	3,647	3,653
9	3,659	3,665	3,671	3,677	3,683	3,689	3,695	3,701	3,707	3,713
10	3,718	3,724	3,730	3,735	3,741	3,746	3,752	3,757	3,763	3,768
11	3,773	3,779	3,784	3,789	3,794	3,800	3,805	3,810	3,815	3,820
12	3,825	3,830	3,835	3,840	3,845	3,850	3,854	3,859	3,864	3,869
13	3,874	3,878	3,883	3,888	3,892	3,897	3,902	3,906	3,911	3,915
14	3,920	3,924	3,929	3,933	3,937	3,942	3,946	3,951	3,955	3,959
15	3,964	3,968	3,972	3,976	3,981	3,985	3,989	3,993	3,997	4,001
16	4,006	4,010	4,014	4,018	4,022	4,026	4,030	4,034	4,038	4,042
17	4,046	4,050	4,054	4,058	4,062	4,065	4,069	4,073	4,077	4,081
18	4,085	4,088	4,092	4,096	4,100	4,104	4,107	4,111	4,115	4,118
19	4,122	4,126	4,129	4,133	4,137	4,140	4,144	4,148	4,151	4,155
20	4,158	4,162	4,166	4,169	4,173	4,176	4,180	4,183	4,187	4,190
21	4,194	4,197	4,200	4,204	4,207	4,211	4,214	4,218	4,221	4,224
22	4,228	4,231	4,235	4,238	4,241	4,245	4,248	4,251	4,255	4,258
23	4,261	4,264	4,268	4,271	4,274	4,278	4,281	4,284	4,287	4,290
24	4,294	4,297	4,300	4,303	4,307	4,310	4,313	4,316	4,319	4,322
25	4,326	4,329	4,332	4,335	4,338	4,341	4,344	4,347	4,350	4,354
26	4,357	4,360	4,363	4,366	4,369	4,372	4,375	4,378	4,381	4,384
27	4,387	4,390	4,393	4,396	4,399	4,402	4,405	4,408	4,411	4,414
28	4,417	4,420	4,423	4,426	4,429	4,432	4,435	4,438	4,441	4,444
29	4,447	4,450	4,452	4,455	4,458	4,461	4,464	4,467	4,470	4,473
30	4,476	4,478	4,481	4,484	4,487	4,490	4,493	4,496	4,498	4,501
31	4,504	4,507	4,510	4,513	4,515	4,518	4,521	4,524	4,527	4,530
32	4,532	4,535	4,538	4,541	4,543	4,546	4,549	4,552	4,555	4,557
33	4,560	4,563	4,566	4,568	4,571	4,574	4,577	4,579	4,582	4,585
34	4,588	4,590	4,593	4,596	4,598	4,601	4,604	4,607	4,609	4,612
35	4,615	4,617	4,620	4,623	4,625	4,628	4,631	4,634	4,636	4,639
36	4,642	4,644	4,647	4,650	4,652	4,655	4,658	4,660	4,663	4,665
37	4,668	4,671	4,673	4,676	4,679	4,681	4,684	4,687	4,689	4,692
38	4,695	4,697	4,700	4,702	4,705	4,708	4,710	4,713	4,715	4,718
39	4,721	4,723	4,726	4,728	4,731	4,734	4,736	4,739	4,741	4,744
40	4,747	4,749	4,752	4,754	4,757	4,760	4,762	4,765	4,767	4,770
41	4,772	4,775	4,778	4,780	4,783	4,785	4,788	4,790	4,793	4,796
42	4,798	4,801	4,803	4,806	4,808	4,811	4,813	4,816	4,819	4,821
43	4,824	4,826	4,829	4,831	4,834	4,836	4,839	4,841	4,844	4,846
44	4,849	4,852	4,854	4,857	4,859	4,862	4,864	4,867	4,869	4,872
45	4,874	4,877	4,879	4,882	4,884	4,887	4,889	4,892	4,895	4,897
46	4,900	4,902	4,905	4,907	4,910	4,912	4,915	4,917	4,920	4,922
47	4,925	4,927	4,930	4,932	4,935	4,937	4,940	4,942	4,945	4,947
48	4,950	4,952	4,955	4,957	4,960	4,962	4,965	4,967	4,970	4,972
49	4,975	4,977	4,980	4,982	4,985	4,987	4,990	4,992	4,995	4,997

Продолжение

100P	Десятые доли процента									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	5,000	5,003	5,005	5,008	5,010	5,013	5,015	5,018	5,020	5,023
51	5,025	5,028	5,030	5,033	5,035	5,038	5,040	5,043	5,045	5,048
52	5,050	5,053	5,055	5,058	5,060	5,063	5,065	5,068	5,070	5,073
53	5,075	5,078	5,080	5,083	5,085	5,088	5,090	5,093	5,095	5,098
54	5,100	5,103	5,105	5,108	5,111	5,113	5,116	5,118	5,121	5,123
55	5,126	5,128	5,131	5,133	5,136	5,138	5,141	5,143	5,146	5,148
56	5,151	5,154	5,156	5,159	5,161	5,164	5,166	5,169	5,171	5,174
57	5,176	5,179	5,181	5,184	5,187	5,189	5,192	5,194	5,197	5,199
58	5,202	5,204	5,207	5,210	5,212	5,215	5,217	5,220	5,222	5,225
59	5,228	5,230	5,233	5,235	5,238	5,240	5,243	5,246	5,248	5,251
60	5,253	5,256	5,259	5,261	5,264	5,266	5,269	5,272	5,274	5,277
61	5,279	5,282	5,285	5,287	5,290	5,292	5,295	5,298	5,300	5,303
62	5,305	5,308	5,311	5,313	5,316	5,319	5,321	5,324	5,327	5,329
63	5,332	5,335	5,337	5,340	5,342	5,345	5,348	5,350	5,353	5,356
64	5,358	5,361	5,364	5,366	5,369	5,372	5,375	5,377	5,380	5,383
65	5,385	5,388	5,391	5,393	5,396	5,399	5,402	5,404	5,407	5,410
66	5,412	5,415	5,418	5,421	5,423	5,426	5,429	5,432	5,434	5,437
67	5,440	5,443	5,445	5,448	5,451	5,454	5,457	5,459	5,462	5,465
68	5,468	5,470	5,473	5,476	5,479	5,482	5,485	5,487	5,490	5,493
69	5,496	5,499	5,502	5,504	5,507	5,510	5,513	5,516	5,519	5,522
70	5,524	5,527	5,530	5,533	5,536	5,539	5,542	5,545	5,548	5,550
71	5,553	5,556	5,559	5,562	5,565	5,568	5,571	5,574	5,577	5,580
72	5,583	5,586	5,589	5,592	5,595	5,598	5,601	5,604	5,607	5,610
73	5,613	5,616	5,619	5,622	5,625	5,628	5,631	5,634	5,637	5,640
74	5,643	5,646	5,650	5,653	5,656	5,659	5,662	5,665	5,668	5,671
75	5,674	5,678	5,681	5,684	5,687	5,690	5,693	5,697	5,700	5,703
76	5,706	5,710	5,713	5,716	5,719	5,722	5,726	5,729	5,732	5,736
77	5,739	5,742	5,745	5,749	5,752	5,755	5,759	5,762	5,765	5,769
78	5,772	5,776	5,779	5,782	5,786	5,789	5,793	5,796	5,800	5,803
79	5,806	5,810	5,813	5,817	5,820	5,824	5,827	5,831	5,834	5,838
80	5,842	5,845	5,849	5,852	5,856	5,860	5,863	5,867	5,871	5,874
81	5,878	5,882	5,885	5,889	5,893	5,896	5,900	5,904	5,908	5,912
82	5,915	5,919	5,923	5,927	5,931	5,935	5,938	5,942	5,946	5,950
83	5,954	5,958	5,962	5,966	5,970	5,974	5,978	5,982	5,986	5,990
84	5,994	5,999	6,003	6,007	6,011	6,015	6,019	6,024	6,028	6,032
85	6,036	6,041	6,045	6,049	6,054	6,058	6,063	6,067	6,071	6,076
86	6,080	6,085	6,089	6,094	6,098	6,103	6,108	6,112	6,117	6,122
87	6,126	6,131	6,136	6,141	6,146	6,150	6,155	6,160	6,165	6,170
88	6,175	6,180	6,185	6,190	6,195	6,200	6,206	6,211	6,216	6,221
89	6,227	6,232	6,237	6,243	6,248	6,254	6,259	6,265	6,270	6,276
90	6,282	6,287	6,293	6,299	6,305	6,311	6,317	6,323	6,329	6,335
91	6,341	6,347	6,353	6,359	6,366	6,372	6,379	6,385	6,392	6,398
92	6,405	6,412	6,419	6,426	6,433	6,440	6,447	6,454	6,461	6,468
93	6,476	6,483	6,491	6,499	6,506	6,514	6,522	6,530	6,538	6,546
94	6,555	6,563	6,572	6,580	6,589	6,598	6,607	6,616	6,626	6,635
95	6,645	6,655	6,665	6,675	6,685	6,695	6,706	6,717	6,728	6,739
96	6,751	6,762	6,774	6,787	6,799	6,812	6,825	6,838	6,852	6,866
97	6,881	6,896	6,911	6,927	6,943	6,960	6,977	6,995	7,014	7,034
98	7,054	7,075	7,097	7,120	7,144	7,170	7,197	7,226	7,257	7,290
99	7,326	7,366	7,409	7,457	7,512	7,576	7,652	7,748	7,878	8,090

Продолжение

$100P$	Сотые доли процента									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	—	1,281	1,460	1,568	1,647	1,709	1,761	1,805	1,844	1,879
0,1	1,910	1,938	1,964	1,989	2,011	2,032	2,052	2,071	2,089	2,106
0,2	2,122	2,137	2,152	2,166	2,180	2,193	2,206	2,218	2,230	2,241
0,3	2,252	2,263	2,273	2,284	2,294	2,303	2,313	2,322	2,331	2,339
0,4	2,348	2,356	2,364	2,372	2,380	2,388	2,395	2,403	2,410	2,417
0,5	2,424	2,431	2,438	2,444	2,451	2,457	2,464	2,470	2,476	2,482
0,6	2,488	2,494	2,499	2,505	2,511	2,516	2,522	2,527	2,532	2,538
0,7	2,543	2,548	2,553	2,558	2,563	2,568	2,572	2,577	2,582	2,586
0,8	2,591	2,596	2,600	2,605	2,609	2,613	2,618	2,622	2,626	2,630
0,9	2,634	2,638	2,643	2,647	2,651	2,654	2,658	2,662	2,666	2,670
1,0	2,674	2,677	2,681	2,685	2,688	2,692	2,696	2,699	2,703	2,706
1,1	2,710	2,713	2,716	2,720	2,723	2,727	2,730	2,733	2,736	2,740
1,2	2,743	2,746	2,749	2,752	2,755	2,759	2,762	2,765	2,768	2,771
1,3	2,774	2,777	2,780	2,783	2,786	2,788	2,791	2,794	2,797	2,800
1,4	2,803	2,806	2,808	2,811	2,814	2,817	2,819	2,822	2,825	2,827
1,5	2,830	2,833	2,835	2,838	2,840	2,843	2,845	2,848	2,851	2,853
1,6	2,856	2,858	2,861	2,863	2,865	2,868	2,870	2,873	2,875	2,878
1,7	2,880	2,882	2,885	2,887	2,889	2,892	2,894	2,896	2,899	2,901
1,8	2,903	2,905	2,908	2,910	2,912	2,914	2,916	2,919	2,921	2,923
1,9	2,925	2,927	2,929	2,932	2,934	2,936	2,938	2,940	2,942	2,944
2,0	2,946	2,948	2,950	2,952	2,954	2,956	2,958	2,960	2,962	2,964
2,1	2,966	2,968	2,970	2,972	2,974	2,976	2,978	2,980	2,982	2,984
2,2	2,986	2,988	2,990	2,992	2,993	2,995	2,997	2,999	3,001	3,003
2,3	3,005	3,007	3,008	3,010	3,012	3,014	3,015	3,017	3,019	3,021
2,4	3,023	3,024	3,026	3,028	3,030	3,031	3,033	3,035	3,037	3,038
97,5	6,960	6,962	6,963	6,965	6,967	6,969	6,970	6,972	6,974	6,976
97,6	6,977	6,979	6,981	6,983	6,985	6,986	6,988	6,990	6,992	6,993
97,7	6,995	6,997	6,999	7,001	7,003	7,005	7,007	7,008	7,010	7,012
97,8	7,014	7,016	7,018	7,020	7,022	7,024	7,026	7,028	7,030	7,032
97,9	7,034	7,036	7,038	7,040	7,042	7,044	7,046	7,048	7,050	7,052
98,0	7,054	7,056	7,058	7,060	7,062	7,064	7,066	7,068	7,071	7,073
98,1	7,075	7,077	7,079	7,081	7,084	7,086	7,088	7,090	7,092	7,095
98,2	7,097	7,099	7,101	7,104	7,106	7,108	7,111	7,113	7,115	7,118
98,3	7,120	7,122	7,125	7,127	7,130	7,132	7,135	7,137	7,139	7,142
98,4	7,144	7,147	7,149	7,152	7,155	7,157	7,160	7,162	7,165	7,167
98,5	7,170	7,173	7,175	7,178	7,181	7,183	7,186	7,189	7,192	7,194
98,6	7,197	7,200	7,203	7,206	7,209	7,212	7,214	7,217	7,220	7,223
98,7	7,226	7,229	7,232	7,235	7,238	7,241	7,245	7,248	7,251	7,254
98,8	7,257	7,260	7,264	7,267	7,270	7,273	7,277	7,280	7,284	7,287
98,9	7,290	7,294	7,297	7,301	7,304	7,308	7,312	7,315	7,319	7,323
99,0	7,326	7,330	7,334	7,338	7,342	7,346	7,349	7,353	7,357	7,362
99,1	7,366	7,370	7,374	7,378	7,382	7,387	7,391	7,395	7,400	7,404
99,2	7,409	7,414	7,418	7,423	7,428	7,432	7,437	7,442	7,447	7,452
99,3	7,457	7,462	7,468	7,473	7,478	7,484	7,489	7,495	7,501	7,506
99,4	7,512	7,518	7,524	7,530	7,536	7,543	7,549	7,556	7,562	7,569
99,5	7,576	7,583	7,590	7,597	7,605	7,612	7,620	7,628	7,636	7,644
99,6	7,652	7,661	7,669	7,678	7,687	7,697	7,706	7,716	7,727	7,737
99,7	7,748	7,759	7,770	7,782	7,794	7,807	7,820	7,834	7,848	7,863
99,8	7,878	7,894	7,911	7,929	7,948	7,968	7,989	8,011	8,036	8,062
99,9	8,090	8,121	8,156	8,195	8,239	8,291	8,353	8,432	8,540	8,719

Пример. При построении выпрямленной диаграммы требуется найти ординату z_p для значения эмпирической функции распределения $\bar{F} = 0{,}072$.

Имеем: $z_p = u_p + 5 = 3{,}539$.

Таблица XXIII

Вероятности $P(\lambda) = K(\lambda)$ распределения Колмогорова (см. 6.6.2 и 5.4.9)

λ	$K(\lambda)$	λ	$K(\lambda)$	λ	$K(\lambda)$
0,28	0,000001	0,86	0,549744	1,45	0,970158
0,29	0,000004	0,87	0,564546	1,46	0,971846
0,30	0,000009	0,88	0,579070	1,47	0,973448
0,31	0,000021	0,89	0,593316	1,48	0,974970
0,32	0,000046	0,90	0,607270	1,49	0,976412
0,33	0,000091	0,91	0,620928	1,50	0,977782
0,34	0,000171	0,92	0,634286	1,51	0,979080
0,35	0,000303	0,93	0,647338	1,52	0,980310
0,36	0,000511	0,94	0,660082	1,53	0,981476
0,37	0,000826	0,95	0,672516	1,54	0,982578
0,38	0,001285	0,96	0,684636	1,55	0,983622
0,39	0,001929	0,97	0,696444	1,56	0,984610
0,40	0,002808	0,98	0,707940	1,57	0,985544
0,41	0,003972	0,99	0,719126	1,58	0,986426
0,42	0,005476	1,00	0,730000	1,59	0,987260
0,43	0,007377	1,01	0,740566	1,60	0,988048
0,44	0,009730	1,02	0,750826	1,61	0,988791
0,45	0,012590	1,03	0,760780	1,62	0,989492
0,46	0,016005	1,04	0,770434	1,63	0,990154
0,47	0,020022	1,05	0,779794	1,64	0,990777
0,48	0,024682	1,06	0,788860	1,65	0,991364
0,49	0,030017	1,07	0,797636	1,66	0,991917
0,50	0,036055	1,08	0,806128	1,67	0,992438
0,51	0,042814	1,09	0,814342	1,68	0,992928
0,52	0,050306	1,10	0,822282	1,69	0,993389
0,53	0,058534	1,11	0,829950	1,70	0,993823
0,54	0,067497	1,12	0,837356	1,71	0,994230
0,55	0,077183	1,13	0,844502	1,72	0,994612
0,56	0,087577	1,14	0,851394	1,73	0,994972
0,57	0,098656	1,15	0,858038	1,74	0,995309
0,58	0,110395	1,16	0,864442	1,75	0,995625
0,59	0,122760	1,17	0,870612	1,76	0,995922
0,60	0,135718	1,18	0,876548	1,77	0,996200
0,61	0,149229	1,19	0,882258	1,78	0,996460
0,62	0,163225	1,20	0,887750	1,79	0,996704
0,63	0,177753	1,21	0,893030	1,80	0,996932
0,64	0,192677	1,22	0,898104	1,81	0,997146
0,65	0,207987	1,23	0,902972	1,82	0,997346
0,66	0,223637	1,24	0,907648	1,83	0,997533
0,67	0,239582	1,25	0,912132	1,84	0,997707
0,68	0,255780	1,26	0,916432	1,85	0,997870
0,69	0,272189	1,27	0,920556	1,86	0,998023
0,70	0,288765	1,28	0,924505	1,87	0,998145
0,71	0,305471	1,29	0,928288	1,88	0,998297
0,72	0,322265	1,30	0,931908	1,89	0,998421
0,73	0,339113	1,31	0,935370	1,90	0,998536
0,74	0,355981	1,32	0,938682	1,91	0,998644
0,75	0,372833	1,33	0,941848	1,92	0,998745
0,76	0,389640	1,34	0,944872	1,93	0,998837
0,77	0,406372	1,35	0,947756	1,94	0,998924
0,78	0,423002	1,36	0,950512	1,95	0,999004
0,79	0,439505	1,37	0,953142	1,96	0,999079
0,80	0,455857	1,38	0,955650	1,97	0,999149
0,81	0,472041	1,39	0,958040	1,98	0,999213
0,82	0,488030	1,40	0,960318	1,99	0,999273
0,83	0,503808	1,41	0,962486	2,00	0,999329
0,84	0,519366	1,42	0,964552	2,01	0,999380
0,85	0,534682	1,43	0,966516	2,02	0,999428
		1,44	0,968382	2,03	0,999474

Продолжение

λ	$K(\lambda)$	λ	$K(\lambda)$	λ	$K(\lambda)$
2,04	0,999516	2,23	0,999904	2,42	0,999984
2,05	0,999552	2,24	0,999912	2,43	0,999986
2,06	0,999588	2,25	0,999920	2,44	0,999987
2,07	0,999620	2,26	0,999926	2,45	0,999988
2,08	0,999650	2,27	0,999934	2,46	0,999988
2,09	0,999680	2,28	0,999940	2,47	0,999990
2,10	0,999705	2,29	0,999944	2,48	0,999991
2,11	0,999728	2,30	0,999949	2,49	0,999992
2,12	0,999750	2,31	0,999954	2,50	0,9999925
2,13	0,999770	2,32	0,999958	2,55	0,9999956
2,14	0,999790	2,33	0,999962	2,60	0,9999974
2,15	0,999806	2,34	0,999965	2,65	0,9999984
2,16	0,999822	2,35	0,999968	2,70	0,9999990
2,17	0,999838	2,36	0,999970	2,75	0,9999994
2,18	0,999852	2,37	0,999973	2,80	0,9999997
2,19	0,999864	2,38	0,999976	2,85	0,99999982
2,20	0,999874	2,39	0,999978	2,90	0,99999990
2,21	0,999886	2,40	0,999980	2,95	0,99999994
2,22	0,999896	2,41	0,999982	3,00	0,99999997

Пример. Требуется определить вероятность того, что наибольшее в ряде из 36 наблюдений отклонение эмпирической функции распределения от теоретической не превысит 10%.

Имеем: $\mathrm{P}\left(\max|\tilde{F}_n(x)-F(x)|<\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right)=\mathrm{P}\left(0{,}10<\frac{\lambda}{\sqrt{36}}\right)=K(0{,}60)=0{,}135718.$

Таблица XXIV

Значения z_q, удовлетворяющие уравнению $\mathrm{P}\left(\frac{x_n-\bar{x}}{\bar{s}}>z_q\right)=\alpha$,

где $s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$, для распределения $r=\frac{x_n-\bar{x}}{\sqrt{\frac{n-1}{n}}\,\bar{s}}$ (см. 8.4.1)

n \ α	0,025	0,050	0,075	0,100
3	1,15	1,15	1,15	1,15
4	1,48	1,46	1,44	1,42
5	1,72	1,67	1,64	1,60
6	1,89	1,82	1,77	1,73
7	2,02	1,94	1,88	1,83
8	2,13	2,03	1,96	1,91
9	2,21	2,11	2,04	1,98
10	2,29	2,18	2,10	2,03
11	2,36	2,23	2,14	2,09
12	2,41	2,29	2,20	2,13
13	2,47	2,33	2,24	2,17
14	2,50	2,37	2,28	2,21
15	2,55	2,41	2,32	2,25
16	2,58	2,44	2,35	2,28
17	2,62	2,48	2,38	2,31
18	2,66	2,50	2,41	2,34
19	2,68	2,53	2,42	2,36
20	2,71	2,56	2,46	2,38

Пример. Требуется найти отклонение единичного наблюдения от средней арифметической $\bar{x}$ при 7 наблюдениях, вероятность превысить которое равна 2,5%, если параметр распределения σ оценивается с помощью несмещенной оценки, полученной из данных выборки.

Имеем: $z_q=2{,}02\bar{s}$.

Таблица XXV

Максимумы математических ожиданий ошибок отсчета (при различных истинных значениях измеряемой величины) в зависимости от отношения параметра σ исходного рассеивания погрешностей измерения к шагу h шкалы прибора (см. 8.4.3)

$\frac{\sigma}{h}$	Максимум математического ожидания ошибки отсчета в долях σ	$\frac{\sigma}{h}$	Максимум математического ожидания ошибки отсчета в долях σ
0,10	0,36531	0,40	0,01353
0,15	0,22219	0,45	0,00985
0,20	0,14521	0,50	0,00229
0,25	0,09267	0,60	0,00026
0,30	0,05384	0,70	0,00002
0,35	0,02836		

Пример. Требуется определить максимум математического ожидания ошибки отсчета, если шаг (интервал деления) шкалы прибора составляет 0,25 от параметра σ исходного распределения погрешностей измерения.

Имеем: $\max \mathbf{M}\left(\frac{\omega}{\xi}\right) = 0{,}09267\sigma$.

Таблица XXVI

Наивыгодчейшие комбинации объемов (n) выборки и приемочных чисел (c) при заданных объеме (N) контролируемой партии и средней доле ($\bar{q}$) производственного брака в партии в зависимости от допускного качества (q_0) или от отправного качества (Q_L) (см. 8.6.2)

Одинарные выборки. Допускное качество 0,1% (q_0)

Средняя производственная доля брака $\bar{q} = 0{,}00025$—$0{,}0005$		
Объем партии в штуках N	Объем выборки в штуках n	Число дефектных единиц в выборке c
1 001—2 000	1 220	0
2 001—3 000	1 520	0
3 001—4 000	1 760	0
4 001—5 000	1 850	0
5 001—7 000	1 950	0
7 001—10 000	3 320	1
10 001—20 000	4 740	2
20 001—50 000	8 750	5
50 001—100 000	11 410	7
100 001—200 000	15 100	10
200 001—500 000	19 840	14
500 001—1 000 000	21 110	17

Примечание. Партии меньшего объема не могут проверяться выборочным путем. Вычисления проведены в Ленинградском электротехническом институте имени Ульянова (Ленина).

Одинарные выборки. Допускное качество 0,5—3% (q_0).
$\bar{q}$ — средняя производственная доля брака

q_0	0,5%						1,0%					
$\bar{q}$	0—0,005		0,051—0,100		0,201—0,250		0—0,01		0,11—0,20		0,41—0,50	
N	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c
151—200	—		—		—		140	0	140	0	140	0
201—300	—		—		—		165	0	165	0	165	0
251—300	240	0	240	0	240	0	—	—	—	—	—	—
301—400	275	0	275	0	275	0	175	0	175	0	175	0
401—500	300	0	300	0	300	0	180	0	180	0	180	0
501—600	320	0	320	0	320	0	190	0	190	0	305	1
601—800	350	0	350	0	350	0	200	0	200	0	330	1
801—1 000	365	0	365	0	365	0	205	0	205	0	335	1
1 001—2 000	410	0	610	0	670	1	220	0	360	1	610	3
2 001—3 000	430	0	705	1	955	2	220	0	505	2	870	5
3 001—4 000	440	0	730	1	1230	3	225	0	510	2	1000	6
4 001—5 000	445	0	1000	2	1480	4	225	0	520	2	1120	7
5 001—7 000	450	0	1020	2	1760	5	230	0	655	3	1260	8
7 001—10 000	455	0	1040	2	2240	7	230	0	660	3	1500	10
10 001—20 000	460	0	1330	3	2780	9	390	1	785	4	1980	14
20 001—50 000	775	1	1600	4	4200	15	390	1	920	5	2570	19
50 001—100 000	780	1	1840	5	5140	19	390	1	1040	6	3150	23

q_0	2%						3%					
$\bar{q}$	0—0,02		0,21—0,40		0,81—1,00		0—0,03		0,31—0,60		1,21—1,50	
N	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c
56—100	—	0	—		—		55	0	55	0	55	0
76—100	70	0	70	0	70	0	—		—		—	
101—200	85	0	85	0	85	0	65	0	65	0	65	0
201—300	95	0	95	0	95	0	70	0	70	0	110	1
301—400	100	0	100	0	160	1	70	0	115	1	155	2
401—500	105	0	105	0	165	1	70	0	120	1	160	2
501—600	105	0	175	1	235	2	75	0	120	1	200	3
601—800	110	0	180	1	300	3	75	0	125	1	240	4
801—1 000	115	0	185	1	305	3	75	0	170	2	290	5
1 001—2 000	115	0	255	2	440	5	75	0	175	2	380	7
2 001—3 000	115	0	260	2	565	7	75	0	220	3	460	9
3 001—4 000	115	0	330	3	690	9	130	1	220	3	540	11
4 001—5 000	195	1	335	3	750	10	130	1	260	4	620	13
5 001—7 000	195	1	335	3	870	12	130	1	265	4	700	15
7 001—10 000	195	1	395	4	1050	15	130	1	265	4	775	17
10 001—20 000	200	1	460	5	1230	18	130	1	305	5	900	20
20 001—50 000	200	1	520	6	1520	23	130	1	350	6	1090	25
50 001—100 000	200	1	585	7	1690	26	130	1	390	7	1215	28

Одинарные выборки. Допускное качество 4—10%.
$\bar{q}$ — средняя производственная доля брака

q_0	4%						5%					
$\bar{q}$	0—0,04		0,41—0,80		1,61—2,0		0—0,05		0,51—1,00		2,01—2,50	
N	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c
51—100	44	0	44	0	44	0	37	0	37	0	37	0
101—200	50	0	50	0	50	0	40	0	40	0	40	0
201—300	55	0	85	1	85	1	43	0	70	1	95	2
301—400	55	0	90	1	145	3	44	0	70	1	145	4
401—500	55	0	90	1	150	3	45	0	100	2	150	4
501—600	55	0	125	2	185	4	45	0	100	2	175	5
601—800	55	0	125	2	220	5	45	0	100	2	200	6
801—1 000	55	0	130	2	255	6	45	0	105	2	225	7
1 001—2 000	55	0	165	3	315	8	45	0	130	3	280	9
2 001—3 000	95	1	165	3	405	11	75	1	135	3	370	13
3 001—4 000	95	1	195	4	465	13	75	1	160	4	420	15
4 001—5 000	95	1	195	4	520	15	75	1	160	4	440	16
5 001—7 000	95	1	200	4	575	17	75	1	185	5	490	18
7 001—10 000	95	1	230	5	645	19	75	1	185	5	535	20
10 001—20 000	95	1	265	6	730	22	75	1	210	6	610	23
20 001—50 000	95	1	295	7	870	26	75	1	235	7	700	27
50 001—100 000	95	1	325	8	925	29	75	1	235	7	770	30

q_0	7%						10%					
$\bar{q}$	0—0,07		0,71—1,40		2,81—3,50		0—0,10		1,01—2,00		4,01—5,00	
N	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c
21—50	—		—		—		17	0	17	0	17	0
26—50	24	0	24	0	24	0	—		—		—	
51—100	28	0	28	0	28	0	20	0	20	0	33	1
101—200	30	0	49	1	65	2	22	0	35	1	60	3
201—300	31	0	50	1	85	3	23	0	50	2	85	5
301—400	32	0	70	2	125	5	23	0	50	2	100	6
401—500	32	0	75	2	140	6	23	0	50	2	110	7
501—600	32	0	75	2	145	6	23	0	65	3	125	8
601—800	32	0	75	2	160	7	23	0	65	3	140	9
801—1 000	33	0	95	3	180	8	39	1	65	3	150	10
1 001—2 000	55	1	95	3	230	11	39	1	80	4	195	14
2 001—3 000	55	1	115	4	300	15	39	1	80	4	230	17
3 001—4 000	55	1	115	4	330	17	39	1	90	5	255	19
4 001—5 000	55	1	130	5	350	18	39	1	90	5	270	20
5 001—7 000	55	1	130	5	385	20	39	1	105	6	295	22
7 001—10 000	55	1	150	6	415	22	39	1	105	6	315	24
10 001—20 000	55	1	150	6	470	25	39	1	120	7	340	26
20 001—50 000	55	1	170	7	530	29	39	1	120	7	380	30
50 001—100 000	55	1	185	8	530	29	39	1	130	8	380	30

Одинарные выборки. Отправное качество 0,1—0,75% (Q_L).
$\bar{q}$ — средняя производственная доля брака

Q_L	0,1%						0,25%					
$\bar{q}$	0—0,002		0,021—0,04		0,081—0,1		0—0,005		0,051—0,1		0,201—0,25	
N	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c
96—130	95	0	95	0	95	0	—		—		—	
101—200	—		—		—		85	0	85	0	85	0
101—200	130	0	130	0	130	0	—		—		—	
201—300	165	0	165	0	165	0	100	0	100	0	100	0
301—400	190	0	190	0	190	0	110	0	110	0	110	0
401—500	210	0	210	0	210	0	115	0	115	0	115	0
501—600	230	0	230	0	230	0	120	0	120	0	120	0
601—800	250	0	250	0	250	0	125	0	125	0	125	0
801—1 000	270	0	270	0	270	0	130	0	130	0	250	1
1 001—2 000	310	0	310	0	310	0	135	0	135	0	290	1
2 001—3 000	330	0	330	0	655	1	140	0	300	1	300	1
3 001—4 000	340	0	340	0	695	1	140	0	310	1	485	2
4 001—5 000	345	0	345	0	720	1	145	0	315	1	495	2
5 001—7 000	350	0	750	1	750	1	145	0	320	1	700	3
7 001—10 000	355	0	775	1	1210	2	145	0	325	1	720	3
10 001—20 000	360	0	810	1	1770	3	145	0	535	2	1190	5
20 001—50 000	365	0	1330	2	2980	5	145	0	545	2	1980	8
50 001—100 000	365	0	1350	2	4270	7	335	1	775	3	2810	11

Q_L	0,5%						0,75%					
$\bar{q}$	0—0,01		0,11—0,20		0,41—0,50		0—0,015		0,16—0,30		0,61—0,75	
N	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c
51—100	42	0	42	0	42	0	33	0	33	0	33	0
101—200	55	0	55	0	55	0	39	0	39	0	39	0
201—300	60	0	60	0	60	0	42	0	42	0	42	0
301—400	60	0	60	0	60	0	44	0	44	0	90	1
401—500	65	0	65	0	125	1	45	0	45	0	90	1
501—600	65	0	65	0	130	1	45	0	45	0	95	1
601—800	65	0	65	0	140	1	46	0	100	1	100	1
801—1 000	70	0	70	0	145	1	47	0	100	1	155	2
1 001—2 000	70	0	155	1	240	2	48	0	105	1	170	2
2 001—3 000	70	0	160	1	250	2	48	0	110	1	240	3
3 001—4 000	70	0	160	1	355	3	48	0	110	1	315	4
4 001—5 000	75	0	165	1	460	4	49	0	175	2	320	4
5 001—7 000	75	0	265	2	475	4	49	0	180	2	400	5
7 001—10 000	75	0	265	2	595	5	49	0	180	2	560	7
10 001—20 000	75	0	270	2	855	7	49	0	255	3	750	9
20 001—50 000	170	1	390	3	1410	11	110	1	260	3	1130	13
50 001—100 000	170	1	510	4	2130	16	110	1	335	4	1720	19

Одинарные выборки. Отправное качество 1—2,5% (Q_L).
$\bar{q}$ — средняя производственная доля брака

Q_L	1,0%						1,5%					
$\bar{q}$	0—0,02		0,21—0,40		0,81—1,00		0—0,03		0,31—0,60		1,21—1,50	
N	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c
26—50	22	0	22	0	22	0	—		—		—	
16—50	—		—		—		16	0	16	0	16	0
51—100	27	0	27	0	27	0	20	0	20	0	20	0
101—200	32	0	32	0	32	0	22	0	22	0	44	1
201—300	33	0	33	0	65	1	23	0	23	0	47	1
301—400	34	0	34	0	70	1	23	0	49	1	49	1
401—500	35	0	35	0	70	1	23	0	50	1	50	1
501—600	35	0	75	1	75	1	24	0	50	1	50	1
601—800	35	0	75	1	120	2	24	0	50	1	80	2
801—1 000	35	0	80	1	120	2	24	0	55	1	85	2
1 001—2 000	36	0	80	1	180	3	24	0	55	1	155	4
2 001—3 000	36	0	80	1	235	4	24	0	90	2	200	5
3 001—4 000	36	0	135	2	295	5	24	0	90	2	240	6
4 001—5 000	36	0	135	2	300	5	24	0	90	2	280	7
5 001—7 000	37	0	135	2	420	7	24	0	90	2	325	8
7 001—10 000	37	0	135	2	430	7	24	0	130	3	375	9
10 001—20 000	85	1	195	3	635	10	55	1	130	3	515	12
20 001—50 000	85	1	255	4	990	15	55	1	170	4	860	19
50 001—100 000	85	1	255	4	1520	22	55	1	210	5	1120	24

Q_L	2,0%						2,5%					
$\bar{q}$	0—0,04		0,41—0,80		1,61—2,0		0—0,05		0,51—1,00		2,01—2,50	
N	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c
11—50	—		—		—		11	0	11	0	11	0
16—50	14	0	14	0	14	0	—		—		—	
51—100	16	0	16	0	16	0	13	0	13	0	13	0
101—200	17	0	17	0	35	1	14	0	14	0	29	1
201—300	17	0	17	0	37	1	14	0	30	1	30	1
301—400	18	0	38	1	60	2	14	0	31	1	48	2
401—500	18	0	39	1	60	2	14	0	32	1	49	2
501—600	18	0	39	1	60	2	14	0	32	1	70	3
601—800	18	0	40	1	85	3	14	0	32	1	70	3
801—1 000	18	0	40	1	90	3	15	0	33	1	90	4
1 001—2 000	18	0	65	2	120	4	15	0	55	2	120	5
2 001—3 000	18	0	65	2	180	6	15	0	55	2	145	6
3 001—4 000	18	0	65	2	210	7	15	0	55	2	195	8
4 001—5 000	18	0	70	2	245	8	15	0	75	3	225	9
5 001—7 000	18	0	95	3	280	9	33	1	75	3	250	10
7 001—10 000	42	1	95	3	350	11	34	1	75	3	310	12
10 001—20 000	42	1	95	3	460	14	34	1	100	4	425	16
20 001—50 000	42	1	125	4	720	21	34	1	100	4	640	23
50 001—100 000	42	1	160	5	955	27	34	1	125	5	800	28

Одинарные выборки. Отправное качество 3—7% (Q_L).
$\bar{q}$ — средняя производственная доля брака

Q_L	3%						4%					
$\bar{q}$	0—0,06		0,61—1,20		2,41—3,00		0—0,08		0,81—1,00		3,21—4,00	
N	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c
11—50	10	0	10	0	10	0	8	0	8	0	8	0
51—100	11	0	11	0	22	1	8	0	8	0	17	1
101—200	12	0	12	0	25	1	9	0	19	1	19	1
201—300	12	0	26	1	40	2	9	0	20	1	31	2
301—400	12	0	26	1	41	2	9	0	20	1	43	3
401—500	12	0	27	1	42	2	9	0	20	1	44	3
501—600	12	0	27	1	60	3	9	0	20	1	60	4
601—800	12	0	27	1	60	3	9	0	33	2	60	4
801—1 000	12	0	44	2	80	4	9	0	33	2	75	5
1 001—2 000	12	0	45	2	100	5	9	0	34	2	105	7
2 001—3 000	12	0	45	2	140	7	9	0	34	2	125	8
3 001—4 000	12	0	65	3	165	8	21	1	48	3	155	10
4 001—5 000	28	1	65	3	210	10	21	1	48	3	175	11
5 001—7 000	28	1	65	3	235	11	21	1	48	3	210	13
7 001—10 000	28	1	65	3	280	13	21	1	65	4	245	15
10 001—20 000	28	1	85	4	380	17	21	1	65	4	340	20
20 001—50 000	28	1	105	5	560	24	21	1	80	5	460	26
50 001—100 000	28	1	125	6	690	29	21	1	95	6	540	30

Q_L	5%						7%					
$\bar{q}$	0—0,01		1,01—2,00		4,01—5,00		0—0,14		1,41—2,80		5,61—7,00	
N	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c
6—50	6	0	6	0	6	0	5	0	5	0	5	0
51—100	7	0	7	0	14	1	5	0	5	0	11	1
101—200	7	0	16	1	24	2	5	0	11	1	18	2
201—300	7	0	16	1	25	2	5	0	12	1	25	3
301—400	7	0	16	1	35	3	5	0	12	1	33	4
401—500	7	0	16	1	46	4	5	0	19	2	34	4
501—600	7	0	26	2	47	4	5	0	19	2	42	5
601—800	7	0	27	2	60	5	5	0	19	2	50	6
801—1 000	7	0	27	2	70	6	5	0	19	2	60	7
1 001—2 000	7	0	27	2	85	7	5	0	27	3	70	8
2 001—3 000	7	0	38	3	125	10	12	1	28	3	100	11
3 001—4 000	17	1	39	3	140	11	12	1	28	3	120	13
4 001—5 000	17	1	39	3	155	12	12	1	36	4	140	15
5 001—7 000	17	1	39	3	185	14	12	1	36	4	160	17
7 001—10 000	17	1	50	4	225	17	12	1	36	4	195	20
10 001—20 000	17	1	50	4	305	22	12	1	45	5	240	24
20 001—50 000	17	1	65	5	400	28	12	1	55	6	310	30
50 001—100 000	17	1	75	6	450	31	12	1	55	6	355	34

Одинарные выборки. Отправное качество 10% (Q_L).
$\bar{q}$ — средняя производственная доля брака

$\bar{q}$	0—0,20		2,01—4,00		8,01—10,00	
N	n	c	n	c	n	c
4—50	3	0	3	0	7	1
51—100	4	0	8	1	12	2
101—200	4	0	8	1	18	3
201—300	4	0	8	1	23	4
301—400	4	0	13	2	29	5
401—500	4	0	13	2	30	5
501—600	4	0	13	2	36	6
601—800	4	0	13	2	42	7
801—1 000	4	0	14	2	49	8
1 001—2 000	8	1	19	3	65	10
2 001—3 000	8	1	19	3	85	13
3 001—4 000	8	1	25	4	100	15
4 001—5 000	8	1	25	4	120	18
5 001—7 000	8	1	25	4	135	20
7 001—10 000	8	1	32	5	160	23
10 001—20 000	8	1	32	5	190	27
20 001—50 000	8	1	38	6	225	31
50 001—100 000	14	2	44	7	260	35

Пример. Требуется определить наивыгоднейший объем выборки из партии в 2500 штук изделий при среднем производственном браке 0,05% и допускном качестве 0,1%.

Имеем:

объем выборки . . . . . 1520 штук
число дефектных изделий . . . . 0 »

Таблица XXVII

Максимумы среднего выходного качества (см. 8.6.3)

Максимальная величина среднего выходного качества (% брака после контроля), $\max Q\,(q)$	Необходимое число n изделий	Минимальный процент годных изделий в каждой отдельной партии, гарантированный с вероятностью 0,99, $q_{\min}$
4	9	60
3,5	10	63
2,5	15	74
2	20	79
1,5	25	83
1	35	88
0,75	50	91
0,5	75	94
0,2	200	97,7
0,1	350	98,7
0,05	750	99,6

Пример. Требуется определить процент брака после контроля при выборке объема 50 штук при минимальном проценте годных изделий в каждой отдельной партии 91%.

Имеем: 0,75%.

Таблица XXVIII

Объемы выборки, отвечающие различным уровням выходного качества (см. 8.6.3)

Число изделий в пробе	Минимально возможное математическое ожидание числа годных изделий (%)	Минимальный процент годных изделий в отдельных партиях, гарантированный с вероятностью $1-\alpha$			
		$1-\alpha=0{,}9$	$1-\alpha=0{,}95$	$1-\alpha=0{,}99$	$1-\alpha=0{,}995$
1	2	3	4	5	6
3	89,5	46,4	36,8	21,5	17,1
5	93,3	63,1	54,9	39,8	34,7
8	95,7	75,0	68,8	56,2	51,6
10	96,5	79,4	73,6	63,1	58,9
15	97,6	85,8	81,9	73,6	70,2
20	98,2	89,1	86,1	79,4	76,7
25	98,6	91,2	88,7	83,2	80,9
35	99,0	93,6	91,8	87,7	86,0
50	99,3	95,5	94,2	91,2	89,9
75	99,5	97,0	96,1	94,0	93,2
100	99,6	97,7	97,0	95,5	94,8
150	99,8	98,5	98,0	97,0	96,5
200	99,82	98,9	98,5	97,7	97,4
250	99,86	99,1	98,8	98,2	97,9
350	99,90	99,3	99,1	98,7	98,5
500	99,93	99,5	99,4	99,1	98,9
750	99,96	99,7	99,6	99,4	99,3
1000	99,97	99,8	99,7	99,6	99,5

Пример. Требуется определить минимально возможное математическое ожидание числа годных изделий (в процентах), если в отдельных партиях гарантируется с вероятностью 0,95% годных изделий не менее 94,2%. Объем выборки составляет 50 штук.

Имеем: 99,3%.

Объемы выборки.

Зависимость фактического выходного качества от доли брака до контроля (пример для $n = 50$) (см. 8.6.5)

Процент брака до контроля (q)	20	10	5	4	3	2,5	2,3	2,1	2	1,9	1,7	1,5	1,3	1,1	1,0
Число проб, обеспечивающее $\delta = 0{,}75\%$	15	25	37	41	46	47	48	49	50	49	48	46	42	35	29
Значение δ (%) при $n = 50$	0,002	0,05	0,32	0,52	0,64	0,70	0,72	0,73	0,75	0,73	0,72	0,71	0,68	0,67	0,61

Ожидаемый (O) и минимально возможный (O_{min}) объем контроля в процентах от объема всей партии.

$\bar{q}_k$	2,5		2		1,5		1		0,75		0,5		0,2		0,1	
q	O	O_{min}	O	O_{min}	O	O_{min}	O	O_{min}	O	O_{min}	O	O_{min}	O	O_{min}	O	O_{min}
30	99,5	91,7	99,9	93,3	100	95	100	96,7	100	97,5	100	98,3	100	99,3	100	99,7
20	96,5	87,5	98,9	90	99,6	92,5	100	95	100	96,2	100	97,5	100	99	100	99,5
10	79,4	75,0	87,8	80	92,8	85	95,5	90	99,5	92,5	100	95	100	98	100	99
5	53,7	50,0	64,2	60	72,3	70	83,4	80	92,3	85	97,9	90	100	96	100	98
2,5	31,6	0	39,7	25	46,9	40	68,8	60	71,8	70	85,0	80	99,4	92	100	96
2	25,0	0	33,2	0	39,6	25	50,7	50	63,6	62,5	78,0	75	98,2	90	99,9	95
1	14,0	0	18,2	0	22,2	0	29,6	0	39,5	25	52,9	50	86,6	80	97,0	90
0,5	7,2	0	9,5	0	11,8	0	16,1	0	22,2	0	31,4	0	63,3	60	82,7	80

q — процент брака в партии до контроля, q_k — средний процент брака после контроля, δ — уровень выходного качества.

Пример. Требуется определить минимально возможный объем контроля и объем контроля, который можно ожидать, если в партии до контроля содержится 5% брака, а допускается после контроля 1%.

Имеем: ожидаемый объем контроля 83,4%, минимально возможный объем контроля 80%.

Таблица XXX

Значения $Z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}$, отвечающие значениям r (см. 7.3.2)

r	Сотые доли[1])									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0100	0,0200	0,0300	0,0400	0,0500	0,0601	0,0701	0,0802	0,0902
0,1	0,1003	0,1104	0,1206	0,1307	0,1409	0,1511	0,1614	0,1717	0,1820	0,1923
0,2	0,2027	0,2132	0,2237	0,2342	0,2448	0,2554	0,2661	0,2769	0,2877	0,2986
0,3	0,3095	0,3205	0,3316	0,3428	0,3541	0,3654	0,3769	0,3884	0,4001	0,4118
0,4	0,4236	0,4356	0,4477	0,4599	0,4722	0,4847	0,4973	0,5101	0,5230	0,5361
0,5	0,5493	0,5627	0,5763	0,5901	0,6042	0,6184	0,6328	0,6475	0,6625	0,6777
0,6	0,6931	0,7089	0,7250	0,7414	0,7582	0,7753	0,7928	0,8107	0,8291	0,8480
0,7	0,8673	0,8872	0,9076	0,9287	0,9505	0,9730	0,9962	1,0203	1,0454	1,0714
0,8	1,0986	1,1270	1,1568	1,1881	1,2212	1,2562	1,2933	1,3331	1,3758	1,4219
0,9	1,4722	1,5275	1,5890	1,6584	1,7380	1,8318	1,9459	2,0923	2,2976	2,6466
0,99	2,6466	2,6996	2,7587	2,8257	2,9031	2,9945	3,1063	3,2504	3,4534	3,8002

Примеры: 1. Требуется определить значение Z при $r = 0{,}84$. Имеем $Z = 1{,}121$
2. Требуется определить значение Z при $r = -0{,}84$. Имеем $Z = 1{,}121$

[1]) Для последней строки это тысячные доли.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арсей Н. и Бух К., Введение в теорию вероятностей и математическую статистику, ИЛ, М., 1951.
2. Ачеркан Н. С., Статистические методы контроля, Машгиз, М., 1946.
3. Бернштейн С. Н., Теория вероятностей, 4-е издание, Гостехиздат, М.—Л., 1946.
4. Баев Г. П. Теория вероятностей, Гостехиздат, М.—Л, 1950.
5. Бородачев Н. А., Анализ качества и точности производства, Машгиз, М., 1946.
6. Бородачев Н. А., Основные вопросы теории точности производства, Из-во АН СССР, М.—Л., 1950.
7. Браунли К. А., Статистические исследования в производстве, ИЛ, М., 1949.
8. Бруевич Н. Г., Точность механизмов, Гостехиздат, М.—Л., 1946.
9. Брунимович В. И., Флюктуационные процессы в радиоприемных устройствах, «Советское радио», М., 1951.
10. Гливенко В. И., Курс теории вероятностей, ГОНТИ, 1939.
11. Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, 2-е издание, Гостехиздат, М.—Л., 1954.
12. Гнеденко Б. В. и Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, Гостехиздат, М.—Л., 1949.
13. Гнеденко Б. В. и Хинчин А. Я., Элементарное введение в теорию вероятностей, ГТТИ, М.—Л., 1946.
14. Гончаров В. Л., Теория вероятностей, Оборонгиз, М., 1939.
15. Длин А. М., Математическая статистика в технике, 2-е издание, «Советская наука», М., 1951.
16. Журавлев А. Н., Статистический метод контроля в машиностроении, Внитомаш, М., 1948.
17. Идельсон Н. И., Способ наименьших квадратов, Л., 1932.
18. Колашников Н. А., Точность в машиностроении и ее законы, Машгиз, М., 1950.
19. Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, ОНТИ, М.—Л., 1936.
20. Колмогоров А. Н., Статистический приемочный контроль при допустимом числе дефектных изделий, равном нулю, ЛД НТП, Л., 1951.
21. Крамер Г., Математические методы статистики, ИЛ, М., 1948.
22. Митрокольский А. К., Статистическое исчисление, ВЗЛИ Л., кн. 1—1952, кн. 2—1952, кн. 3—1953, кн. 4—1954.
23. Немчинов В. С., Полиномы Чебышева и математическая статистика, ТСХА, М., 1946.
24. Романовский В. И., Математическая статистика, ГОНТИ, М.—Л., 1938.
25. Романовский В. И., Элементарный курс математической статистики, Госпланиздат, М., 1939.
26. Романовский В. И., Основные задачи теории ошибок, Гостехиздат, М.—Л., 1947
27. Романовский В. И., Применение математической статистики в опытном деле, Гостехиздат, М.—Л., 1947.
28. Романовский В. И., Дискретные цепи Маркова, Гостехиздат, М.—Л., 1949.
29. Сарымсаков Т. А., Основы теории процессов Маркова, Гостехиздат, М.—Л., 1954.
30. Соколовский А. П., Расчеты точности обработки на металл. станках, Машгиз, М.—Л., 1952.
31. Солодовников В. В., Введение в статистическую динамику систем автоматического управления, Гостехиздат, М.—Л., 1952.
32. Статистические методы анализа и контроля качества машиностроительной продукции, Машгиз, М.—Л., 1949.
33. Теория передачи электрических сигналов при наличии помех, ИЛ, М., 1953.
34. Теория следящих систем, ИЛ, М., 1953.
35. Уиттекер Э. и Робинсон Г., Математическая обработка результатов наблюдений, ГТТИ, М.—Л., 1933.
36. Уорсинг А. и Геффиер Дж., Методы обработки экспериментальных данных, ИЛ М., 1953.
37. Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, ИЛ, М., 1952.
38. Фрай Горнтон, Теория вероятностей для инженеров, ГТТИ, М.—Л., 1934.
39. Хинчин А. Я., Асимптотические законы теории вероятностей, ОНТИ, М.—Л., 1936.
40. Чеботарев А. С., Способ наименьших квадратов, М., 1936.
41. Шилов П. И., Способ наименьших квадратов, Госгеокартиздат, М., 1941.
42. Яковлев К. П., Математическая обработка результатов измерений, Гостехиздат, М.—Л., 1950.
43. Яхин А. Б., Проектирование технологических процессов механической обработки, Оборонгиз, М., 1946.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Анализ взаимосвязей между признаками качества и производственными факторами 444
— настройки 445
— стабильности технологического процесса 441
— точности технологического процесса 438
Асимметрия 137, 194
— биномиального распределения 139
— выборки 194
— гамма-распределения 148
— нормального распределения 137
— распределения редких событий (Пуассона) 139
— χ^2-распределения 154

Бейеса формула 38
Бернулли теорема 101
— схема 42
Бэта-распределение 149, 238
— —, интегральная функция 149
— функция 149
— — неполная 150
Бюффона задача 41

Вариация показаний 457
Величина случайная см. Случайная величина
Вероятнейшее число появления события 45
Вероятностная мера 39
— связь 65, 364
Вероятность 18
— безусловная 29
— гипотез 38
— доверительная 159, 246, 257
—, классическое определение 21, 22
—, основные принципы 40
— ошибки второго рода 476
— — первого рода 476
—, свойства 23—24
—, сложение 28, 32
—, умножение 33, 34, 36
— условная 29, 31, 62
Взаимозаменяемость 453
Возможные исходы испытания 22
Выбор без возврата 179
— — повторения 179
— простой случайный 179
— с возвратом 179
— — повторением 179
— числа наблюдений 231—232
Выборка 184
— безвозвратная 26
— безповторная 26
— двойная 483
— механическая 222
— одинарная 482
— представительная 179
— репрезентативная 179
— случайная 179
— статистическая безвозвратная 26, 114
— — возвратная 112
— — повторная 112
— типическая 219
— упорядоченная 184

Гамма-распределение 144
— —, производящая функция 147
— функция 144
— — неполная 147
Гипотеза 37
— альтернативная 361
— нулевая 293
— о положении центра группирования 295—297
— статистическая 294
Гипотезы событий 37
Гистограмма 188
Гомоскедастичность 383
— условных нормальных распределений 383
Группа событий полная 20
Группировка значений выборки 185

Диаграмма доверительных интервалов 443
Диаграммы точечные 442
— точностные 442
Дисперсионный анализ 306
Дисперсия 81, 190
— выборки, вычисление 191—192
— коэффициента корреляции, выборочная 393—396
— между группами 219
— остаточная внутри групп 219
— постоянной величины 84
—, приближенное вычисление 227
— произведения 85
— распределения эксцентриситетов 158
—, свойства 84—86
— при биномиальном распределении 113
— — бэта-распределении 150
— — гамма-распределении 148
— — гипергеометрическом законе 116
— — законе Пуассона 97, 117
— — нормальном законе 123
— средняя взвешенная 219
— суммы нескольких независимых величин 85
— — — случайных величин 89
— — постоянной величины 85
— условная 368
— условных математических ожиданий 379
— — средних 369
— функции двух величин 94
— — случайной величины 93
— χ^2-распределения 154
— чисел серий 337—339
Длина серии 335
Доверительная вероятность 257
— граница 159
— плоская область 262
Доверительные границы для дисперсии 264
— — при большом числе наблюдений 283—285
— интервалы для оценки генеральной дисперсии σ^2 262—269
— — — — — средней 276—278
— — — — среднего квадратического отклонения 262—269
— области для теоретического закона распределения 288—291
Доверительный интервал 258, 262, 265
— — для оценки генеральной средней 276—278
— — — — коэффициента корреляции 394
— — — — — регрессии 395
— —, построение с помощью выборочного размаха R_n 269—271
Допускное качество 480
Допустимые пределы 254

Зависимость корреляционная 370
— событий 19
— форм линейная 307
— функциональная 364
Заградительные зоны 471
Задача о статистической выборке 26—28
— об игле 41
— статистической оценки законов распределения и их характеристик 182
Закон больших чисел 103
— равной вероятности 59
— распределения 58
— — выборочной характеристики 182

Закон распределения генеральной совокупности 180
— — двойной показательный 250
— — двумерный 61, 63, 65
— — дифференциальный 59
— — интегральный 59
— — Колмогорова 290
— — Коши 234
— — коэффициента корреляции 393—396
— — Максвелла 158
— — нормальный 60
— — общего числа серий 336
— — ошибок 461—462
— — показательный 241
— — R 337
— — Пуассона 47, 53
— — Стьюдента 272
— — суммы дискретных величин 105—106
— — — непрерывных величин 107—109
— — условный 62
— — эксцентриситета 157
Звено 162
— замыкающее 162
— исходное 162
— конечное 162
— отрицательное 163
— положительное 162, 163
— увеличивающее 162, 163
— уменьшающее 163
Значение среднее см. среднее значение

Инвариантность оценок правдоподобия 288
Интеграл Эйлера 144
Испытание 16
Исход испытания элементарный 21
Исходы испытания благоприятствующие 22
— — возможные 22
Исчисления вероятностей, общие принципы 40

Калибр распределения 471
Квантиль 59
Квартиль верхний 59
— нижний 59
Ковариация 87, 379
Колмогорова закон распределения 290
Комбинаторика 25—26
Композиция дискретных величин 106
— законов распределения 105
— непрерывных величин 108—109
Контроль положения центра настройки машины по медиане или средней арифметической 468—470
— последовательный 486
— рассеивания размеров по крайним значениям, размаху варьирования или среднему квадратическому отклонению 470
— сплошной 478
— статистический последующий 468
— — предупредительный 468
— — текущий 468
— эксцентриситетов 474
Концевые меры 456
Корреляционная зависимость 370
— таблица 336
Корреляционное отношение 370
— — выборочное 338
— —, вычисление 385—393
— —, свойства 371
— — эмпирическое 388
Корреляция многих переменных, линейная 398
— нормальная 380
— положительная 374
— трех переменных, линейная 398
Коши распределение 234
Коэффициент вариации 81, 82, 190, 228
— доверия 254
— корреляции 88, 90, 373
— — выборочный 388
— —, вычисление 385—393
— — полный 401
— — сводный 401
— —, свойства 377
— — частный 406
— — эмпирический 388
— относительного рассеивания 165
— относительной асимметрии 165
— регрессии 373
— — выборочный 388
— —, вычисление 385—393
— — эмпирический 388
Кривая нормального распределения, дифференциальная 60, 118
— — —, интегральная 60, 120
— оперативная 448
Кривая плотности вероятности гамма-распределения 145
— — — равномерного распределения 59
— — — распределения эксцентриситетов 157
— — — F-распределения 305
— — — χ^2-распределения 154
— равномерного распределения 59, 84
— распределения антимодальная 76
— — вероятности 84
— — — при законе Симпсона 84
— — двухмодальная 75
— — дискретной случайной величины 56
— — многовершинная 76
— — многомодальная 75
— — непрерывной случайной величины 57
— — одномодальная 75
— — при биномиальном законе 53
— — — гипергеометрическом законе 53
— ступенчатая 188
— t-распределения 274
Кривые статистических распределений 188
Критерии равномерно наиболее мощные 362
Критерий длины серии 343
— независимости 323—326
— проверки 294
— случайности 339—344
— χ^2 316
— —, чувствительность 318
— числа серий 344
q-процентное значение нормального отклонения 128

Лапласа теорема 132
— формула 132
— функция 126
— — нормированная 126
Линии регрессии 367
Линия нормальной регрессии 383
— скедастическая 368
— условных дисперсий 368
Ляпунова теорема 129

Максвелла закон распределения 158
Массовые явления 16
Математическое ожидание 68
— — двумерной величины 72
— — дискретной величины 69
— — коэффициента корреляции, выборочное 393—396
— — крайних членов 49
— — минимальной погрешности 249
— — непрерывной величины 70
— — ошибки округления 464
— — постоянной 77
— — произведения двух величин 88
— — — независимых величин 78
— — — постоянной на случайную величину 77
— — распределения эксцентриситетов 157
— —, свойства 77—78
— — величины при биномиальном распределении 113
— — — — бэта-распределении 150
— — — — гамма-распределении 148
— — — — гипергеометрическом законе 115
— — — — законе Пуассона 97, 117
— — — — нормальном законе 123
— — суммы величин 77, 78
— — условное 367
— — функции двух величин 93—94
— — — величины 92—93
— — χ^2-распределения 154
— — чисел серий 337—339
Медиана 59, 68, 189
— выборочного распределения 181
— теоретическая 74
— эмпирическая 68
Мера вероятностная 39
— надежности 258
Метод группировок 471
— заградительных зон 471
— индивидуальных значений 471
— крайних значений 472
— максимума-минимума 164
— — правдоподобия 285
— моментов 223
— наименьших квадратов 412, 424
— неполной взаимозаменяемости 164
— полной взаимозаменяемости 164
— получения доверительных интервалов, общий 278—281
— пробных проходов 446
— теоретико-вероятностный 164
Метрология 453
Механизм кривошипный 432
— кулачковый с толкателем 434
Многочлены Чебышева 427
Множество счетное 40

Мода 68, 75, 189, 190
— теоретическая 75
— эмпирическая 68
Момент бэта-распределения 150
— гамма-распределения 147
— начальный 94, 190
— обычный 190
— r-го порядка 94, 190
— смешанный 87
— центральный 94, 190
— — гамма-распределения 148
Моменты биномиального распределения 112—114
— гипергеометрического распределения 114—116
— нормального распределения начальные 123, 124
— — — центральные 123, 124
— относительные 193
— распределения Пуассона 117
— статистические 190
— эмпирические 190
Мощность критерия проверки 360
— — с данным уровнем значимости 361

Надежность методики оценки погрешности 457—458
— оценки 257
Независимость величин стохастическая 366
— случайных величин 62, 66
— событий 32, 34
— — в совокупности 35
— — попарная 35
— форм линейная 307
Неравенство Чебышева (вторая форма) 99
— — (первая форма) 98
Несмещенность оценки 206
Нормальная плотность вероятности 118
— функция распределения 118
Нормальное отклонение, q-процентные значения 128
Нормирование случайной величины 87
Нуль ложный 190

Область возможных состояний системы 39
— доверительная 262
— допустимых значений 295
— критическая 295
— практически возможных значений 257
— сомнительных значений 449
Объем выборки 53, 179
Ожидание математическое см. математическое ожидание
Ортогональность функций 426
Отклонение вероятное 243
— относительное 193
— случайной величины 81
— среднее квадратическое 81, 82, 190
Отношение вероятное 243
— правдоподобия 487
Оценка асимптотически эффективная 288
— вероятности 180
— — по частости 281—283
— генеральной средней 228—232
— дисперсии 223—232
— — по выборке из конечной совокупности 214
— достаточная 210
— закона распределения по данным выборки 204
— коэффициента корреляции 386, 393—396
— линейной зависимости по методу наименьших квадратов 410
— математического ожидания 181
— надежная 257
— несмещенная 206
— отрицательно смещенная 206
— параметра λ в распределении Пуассона 287
— — σ по размахам нескольких выборок 253—254
— параметров нормального закона распределения 287
— — статистическая 205
— положительно смещенная 206
— средней по выборке из конечной совокупности 213
— — при выборке по группам 218—223
— точности измерений по их результатам 456
— центра распределения 223—228
— — рассеивания 252
— эффективная 208
Оценки состоятельные 206
Ошибка отсчета 459
— оценки a предельная 232
— — σ предельная 232
— функциональная неопределенная 432
— — определенная 432
Ошибки второго рода 295, 361
— динамические 432
— первичные 432
— первого рода 295, 360
— положения 432
— функциональные 432

Параметризация 204
Параметры гамма-распределения 144
— распределения 118
Перестановка 26
— с повторениями 237
Плотность вероятности 57, 65
— — гамма-распределения 144
— — монотонной функции случайной величины 140—143
— — немонотонной функции случайной величины 143—144
— — нормальная 118
— — условная 67
— закона Стьюдента 274
— распределения Коши 234
— — мгновенная 161
— — условная 379
— F-распределения 302
— χ^2-распределения 154
Поверхность нормального распределения 333
— распределения 65
— регрессии 398
Погрешность измерения 453
— — полная 461
— относительная, предельная 232
— систематическая 454
— случайная 454
Подразделение события на частные случаи 20
Поле рассеивания 438
Полигон 188
Поправка к группировке 200
Поправки Шеппирда 202
Пределы доверительные 245—246
— допустимые 254
— q-процентные 275
— p-процентные 250
— толерантные 254
Преобразование плотности вероятности 141
Преобразования χ^2-распределения 155—160
Приемка по допускному качеству 482
— — среднему выходному качеству 482
Пробы временные 441
Проверка гипотез статистическая 183
— гипотезы нормальности 346
— — о криволинейной корреляционной связи 397
— — — равенстве двух средних по выборкам большого и малого объема 297—306
— — — — дисперсии 304—306
— — — распределении случайной величины 316
— — об однородности ряда средних 309—316
— — — — — — дисперсий 326
— — — — средних совокупности и ее подгрупп 300—301
— — — отсутствии корреляционной связи 396
— — по совокупности малых выборок 354
— — принадлежности двух независимых выборок одной и той же генеральной совокупности 331
Производящая функция 95
— — биномиального распределения 114
— — гамма-распределения 147
— — нормированная 98
— — нормированного отклонения случайной величины 98
— — нормального распределения 122
— — суммы независимых случайных величин 97
— — χ^2-распределения 153
Пространство параметров 39
Процесс случайный 17
Пуассона закон распределения 47, 53
— уточненная формула 50

Равновероятность 21
Равновозможность 21
Равноизменчивость 383
Размах варьирования 185, 190
— — показаний 457
— распределения 251
Размер настроечный 446
Размещения 26
Распределение вероятностей 51
— — биномиальное 42—45, 52
— выборки 180
— выборочного среднего квадратического отклонения 262—269
— генеральной совокупности 180
— гипергеометрическое 53
— двумерное 61
— дискретной величины 51—54
— квантилей выборки, предельное 240—243

Распределение Коши 234
— *крайних членов вариационного ряда 246—249*
— Максвелла 158
— мгновенное 438
— нормированное 120
— погрешности измерения 249
— Пуассона 47, 53
— равномерное 59
— редких событий 53
— Симпсона 84
— Стьюдента 272
— суммарное 438
— существенно положительных величин 155—160
— t 274
—, условный закон 62
— F 301
— χ^2 152, 154
Рассеивание двумерное 61
Расчет поверочный 163
— проектный 163
— размерных цепей 163—173
Регрессии средняя квадратическая 399
Регрессия линейная 372
— нормальная 383
Ряд вариационный 184

Связь корреляционная между переменными величинами 379, 398
— стохастическая 65, 364
— — между непрерывными величинами 379
Серия 335
Симпсона распределение 84
Система событий 20
Случайная величина 17, 51
— — двумерная 60
— — дискретная 51
— — многомерная 60
— — непрерывная 51, 54
— функция 17
Случайность выбора 179
Случайные величины центрированные 375
Случайный процесс 17
Событие 16
— достоверное 16, 20
— невозможное 16, 20
—, подразделение на частные случаи 20
— случайное 16
События, зависимость 19
—, независимость 32, 34
—, — в совокупности 35
—, — попарная 35
— несовместимые 20
— попарно несовместимые 20
—, произведение 20
— противоположные 20
— равносильные 20
—, сумма 20
— тождественные 20
Совокупность генеральная 179, 184
— объектов 183
Соединения с повторениями 26
Соотношения между событиями 19
Сопряженность стохастическая 365
Состоятельность оценки 206
Сочетания 26
Способ выпрямляемых диаграмм 346
— последовательных разностей 344
Среднее арифметическое выборки 181
— значение 68, 189
— — выборки 181
— — —, вычисление 191
— — дискретной случайной величины 69
— — непрерывной случайной величины 70
— квадратическое отклонение 81, 82, 190
— — — распределения эксцентриситетов 158
— — — при биномиальном законе 113
— — — — гипергеометрическом законе 116
— — — — законе Пуассона 117
— — — — нормальном законе 123
— — — χ^2-распределения 154
— — — эмпирического коэффициента регрессии 393
Средняя арифметическая 68, 189, 307
— величина условной дисперсии 379
— взвешенная 307
— — дисперсий 219
— квадратической регрессии 399
— условных дисперсий 369
Стандарт 190
Статистика достаточная 210
Статистическая гипотеза 294
Статистические моменты, вычисленные по способу произведений и сумм 194—199
Статистические моменты, вычисленные с помощью выражения значений по интервалам в долях ширины интервала 193—194
— —, — — — произвольного начального значения 191—193
Стирлинга формулы 26
Стохастическая связь 65
Стохастически независимые величины 366
Стьюдента закон распределения 272
— функция распределения 272
Схема Бернулли 42
— последовательных независимых испытаний 42
— суммы 129
Сходимость случайных величин по вероятности 103

t-распределение 274
Таблица корреляционная 386
— сопряженности признаков, четырехзначная 385
Теорема Бернулли 101
— Лапласа 132
— Ляпунова 129
— подразделения 308
— Хинчина 223
— Чебышева 100, 103
Теоремы о дисперсиях 84—86
— — математических ожиданиях 77—78
Теория корреляции 365
— соединений 25—26
— точности механизмов 431—432
Толерантные пределы 254
Точечные диаграммы 442
Точностные диаграммы 442
Точность оценок 182
— — технических измерений 453
Уклонения от нормального закона в производственных условиях 160—162
Уравнение нормальной регрессии 380
— размерной цепи основное 163
— регрессии 373
Уравнения линейной регрессии по эмпирическим данным 403
Уровень значимости критериев 295
— надежности оценки 182, 257
Условие ортогональности функций 426
Условная вероятность 29, 31, 62
— плотность вероятности 67
Условное математическое ожидание 367
Условный закон распределения 62
Устойчивость нормального закона 125

F-распределение 301
Факториал, приближенное вычисление 26
Форма квадратическая 308
— линейная 307
Формула Бейеса 38
— биномиального распределения 43
— вероятности гипотез 38
— Лапласа 132
— Ньютона — Лейбница 57
— полной вероятности 36
— Пуассона 47
— — уточненная 50
— Стирлинга 26
— условной вероятности 31
Формулы для вычисления статистических моментов 199—200
— композиции дискретных величин 105
— — непрерывных величин 108—109
Функция бэта 149
— бэта-распределения интегральная 149
— гамма-распределения интегральная 146
— Лапласа 126
— — нормированная 126
— правдоподобия 210
— производящая 95
— — гамма-распределения 147
— — суммы независимых величин 97
— распределения 52, 55
— — выборки 180
— — генеральной совокупности 180
— — двумерной непрерывной случайной величины 65
— — дифференциальная 57
— — интегральная 55, 65
— — нормальная 118
— — нормированной величины 121
— — Стьюдента 272
— — эмпирическая 180
— сложения вероятностей 28
— случайная 17

Характеристика вероятностная 189
— оперативная 480
— статистическая 189

Характеристика теоретическая 189
— эмпирическая 189
Характеристики выборочные 181
— генеральные 181
— положения центра группирования 189
— порядковые 234—236
— ранговые 234—236
— рассеивания 81, 189, 190
— теоретические 181
— эмпирические 181
χ^2-распределение 152, 154
— —, число степеней свободы 154
Хинчина теорема 223

Целая часть числа 46, 202
Центр группирования 67
— распределения 372
Цепь размерная 162
— — линейная 162
— — операционная 162
— — плоскостная 162
— — подетальная 162
— — пространственная 162
— — сборочная 162
— — угловая 162

Частость 18, 184
— накопленная 188
Частота накопленная 188, 189
Частота относительная 18
Чебышева многочлены 427
— неравенство (вторая форма) 99
— — (первая форма) 98
— теорема 100, 103
Число степеней свободы 307
— — — квадратичной формы 308
— — — χ^2-распределения 154
Чувствительность критерия χ^2 318

Шеппарда поправки 202
Широта интерквартильная 235
— — эмпирическая 243
— распределения 251
— — выборки 185

Эйлера интеграл 144
Эксцесс 137
— биномиального распределения 139
— выборки 194
— гамма-распределения 148
— нормального распределения 138
— распределения Пуассона 140
— — редких событий 140
— χ^2-распределения 154
Элементарные исходы данного испытания 21
Эффективность оценки сравнительная 208

Явления массовые 16

Опечатки

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
115	1 сн.	$\mathbf{M}(X^2 - X)$	$\mathbf{M}(X^2 - X)$
133	3 сн.	tk_0	t_{k_0}
159	16 сн.	y для x	для x
168	7 св.	λ_i	λ_i^2
207	18 сн.	σ_θ^2	$\sigma_{\bar{\theta}}^2$
210	9 св.	$\left(\frac{\sigma^{X_1+X_2+\ldots+X_n}}{n}\right)$	$\sigma^2\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right)$
376	6 св.	$\frac{\mathbf{M}[Y\cdot\hat{y}(x)]}{\sigma_Y\sigma_{\hat{y}(x)}}$	$\frac{\mathbf{M}[Y\cdot\hat{y}(X)]}{\sigma_Y\sigma_{\hat{y}(X)}}$

Зак. 1810.